SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA
I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA

Sveučilišni studij

UVOD U OPTIMALNO UPRAVLJANJE

Završni rad

Matko Teni

Osijek, 2016.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET OSIJEK

Obrazac Z1P - Obrazac za ocjenu završnog rada na preddiplomskom studiju

Osijek, 16.9.2015.

Odboru za završne i diplomske ispite

Prijedlog ocjene završnog rada

Ime i prezime studenta:	Matko Teni
Studij, smjer:	Sveučilišni preddiplomski studij računarstva
Mat. br. studenta, godina upisa:	3604, 2012.
Mentor:	Izv.prof.dr.sc. Dražen Slišković
Sumentor:	
Naslov završnog rada:	Uvod u optimalno upravljanje
Primarna znanstvena grana rada:	
Sekundarna znanstvena grana (ili polje) rada:	
Predložena ocjena završnog rada:	
Kratko obrazloženje ocjene prema Kriterijima za ocjenjivanje završnih i diplomskih radova:	Primjena znanja stečenih na fakultetu: Postignuti rezultati u odnosu na složenost zadatka: Jasnoća pismenog izražavanja: Razina samostalnosti:

Potpis sumentora:	Potpis mentora:

Dostaviti:

1. Studentska služba

Potpis predsjednika Odbora:

Dostaviti:

1. Studentska služba

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET OSIJEK

IZJAVA O ORIGINALNOSTI RADA

Osijek, 16.9.2015.

Ime i prezime studenta:	Matko Teni
Studij :	Sveučilišni preddiplomski studij računarstva
Mat. br. studenta, godina upisa:	3604, 2012.

Ovom izjavom izjavljujem da je rad pod nazivom**: Uvod u optimalno upravljanje**

izrađen pod vodstvom mentora **Izv.prof.dr.sc Dražena Sliškovića**

moj vlastiti rad i prema mom najboljem znanju ne sadrži prethodno objavljene ili neobjavljene pisane materijale drugih osoba, osim onih koji su izričito priznati navođenjem literature i drugih izvora informacija.
Izjavljujem da je intelektualni sadržaj navedenog rada proizvod mog vlastitog rada, osim u onom dijelu za koji mi je bila potrebna pomoć mentora, sumentora i drugih osoba, a što je izričito navedeno u radu.

Potpis studenta:

Sadržaj

1. UVOD

Automatska regulacija (upravljanje) je po definiciji automatsko održavanje željenog stanja nekog procesa ili mijenjanje tog stanja po određenom zakonu, bez obzira na djelovanje vanjskih i unutarnjih poremećaja. To se postiže pomoću povratne veze, koja omogućava usporedbu izmjerene vrijednosti neke veličine reguliranog procesa s njenom željenom vrijednosti (referencom), te se na temelju razlike tih dviju veličina odlučuje kako usmjeriti proces. Proces se usmjerava upravljanjem tokom njegove energije ili tvari [1].

Optimalno upravljanje proces je određivanja putanja upravljačkih veličina i veličina stanja za dinamički sustav za određeni period vremena kako bi se minimizirao kriterij kakvoće. Cilj optimalnog upravljanja je da se odredi upravljački signal $\mathbf{u}(t)$ kojim se traži ekstrem (minimum/maksimum) zadane funkcije, uz prisustvo ograničenja. S optimalnim upravljanjem postižu se „najbolje“ performanse za zadane kriterije kakvoće upravljanja [3].

Tema ovog rada je razrađena kroz dva poglavlja u kojima će biti govora o optimalnom upravljanju, elementima računa varijacije, Pontjanginovom principu, općem problemu regulacije te o integralnom kriteriju. U drugom poglavlju dan je kratki uvod u teoriju optimalnog upravljanja i povijest optimalnog upravljanja, te objašnjenje kriterija optimizacije za određenu funkciju troška i same teorije računa varijacije. U trećem poglavlju opisan je integralni kriterij te je riješen primjer zadatka. Četvrto poglavlje predstavlja zaključak u kojem se rezimiraju postignuti rezultati i daje se osvrt na postavljeni zadatk završnog rada.

1.1. Zadatak završnog rada

Kao proširenje gradiva kolegija Osnove automatskog upravljanja, potrebno je sačiniti uvod u optimalno upravljanje. Pri tome je potrebno dati osnovna načela i matematičku podlogu za ovakav način projektiranja regulatora te to ilustrirati kroz nekoliko primjera. Primjere realizirati simulacijom sustava upravljanja koristeći programski paket Matlab/Simulink.

2. TEORIJA OPTIMALNOG UPRAVLJANJA

Problemi optimalnog upravljanja mogu se podijeliti na statičke i dinamičke probleme optimalnog upravljanja, koji se bitno razlikuju. Statičko optimalno upravljanje primjenjuje se u situacijama kad se mora držati sustav upravljanja na optimalnoj radnoj točki koju karakterizira ili kriterij optimalnosti ili statička karakteristika procesa koja nužno mora imati ekstrem. Statičko optimalno upravljanje se odnosi na sustave upravljanja kod kojih je normalan režim rada ustaljeno stanje, odnosno rad u radnoj točki sustava. Dinamičko optimalno upravljanje minimizira/maksimizira postavljeni kriterij tijekom prelaska iz jednog u drugo ravnotežno stanje [4].

Optimalno upravljanje blisko je povezano s računom varijacija. Neki od važnijih pridonositelja rane teorije optimalnog upravljanja i računa varijacija su Johann Bernoulli (1667.-1748.), Isaac Newton (1642.-1727.), Leonhard Euler (1707.-1793.), Ludovico Lagrange (1736.-1813.), Andrien Legendre (1752.-1833.), Carl Jacobi (1804.-1851.), William Hamilton (1805.-1865.), Karl Weierstrass (1815.-1897.), Adolph Mayer (1839.-1907.) i Oskar Bolza (1857.-1942.). Neke od važnijih prekretnica u razvitku optimalnog upravljanja u 20. stoljeću uključuju formuliranje dinamičkog programiranja Richarda Bellmana 1950-ih godina, razvijanje principa minimuma Leva Pontryagina i njegovih suradnika 1950-ih godina te formulacija linearnog kvadratnog regulatora i Kalmanovog filtera od strane Rudolfa Kalmana 1960-ih godina [5].

Optimalno upravljanje i njegove inačice koriste se u mnogim različitim područjima koja uključuju aeronautiku, upravljanje procesom, robotiku, bioinženjering, ekonomiju i financije te je i dalje predmet istraživanja u teoriji upravljanja. Razvoj digitalnih računala omogućilo je primjenu teorije optimalnog upravljanja i metoda za mnoge složene probleme [5].

2.1. Kriterij optimizacije

Uzme li se u obzir (nelinearni) sustav ∑ opisan s:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \boldsymbol{x}(t_0) = x_0 \in \Re^m \quad , \qquad (2\text{-}1)$$

gdje je $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_m(t)\\ \vdots \\ \mathbf{x}_1(t)\end{bmatrix}$ vektor stanja, $\mathbf{u}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1(t)\\ \vdots \\ \mathbf{u}_l(t)\end{bmatrix}$ vektor upravljanja i **f** vektor vrijednosti koji ima komponente:

$$\mathbf{f}_\mathrm{i} : t \mapsto \boldsymbol{f}_i\left(t, \mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_m(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_2(t), \ldots, \mathbf{u}_l(t)\right), \quad i = 1,2,\ldots,\mathrm{m}. \tag{2-2}$$

Pretpostavka je da su $\boldsymbol{f}_i$ kontinuirane i da zadovoljavaju standardne uvjete, kao naprimjer da funkcija ima kontinuirano parcijalnu prvu derivaciju (tako da postoji rješenje i da je ono jedinstveno za zadani početni uvjet). Može se reći da je funkcija $\boldsymbol{f}$ kontinuirano derivabilna.

2.1.1. Osnovni problem optimalnog upravljanja

Osnovni problem optimalnog upravljanja odnosi se na minimizaciju neke funkcije $\mathcal{J}=\mathcal{J}[\mathbf{u}]$, gdje je $\mathcal{J}$ kriterij kakvoće (ili funkcija troška). Kriterij kakvoće $\mathcal{J}$ omogućuje mjeru sustava kojom se može odrediti kakvoća izvedbe sustava.

2.1.2. Problemi minimalnog vremena

U ovom slučaju vektor $\mathbf{u}(\cdot)$ mora biti odabran tako da sustav prenese iz početnog stanja x_0 do zadanog stanja u najkraćem mogućem vremenu. To je tada jednako minimiziranju kriterija kakvoće:

$$\mathcal{J} := t_1 - t_0 = \int_{t_0}^{t_1} dt\,, \tag{2-3}$$

gdje je t_1 vrijeme u kojem sustav prvi puta dostiže željenu veličinu.

2.1.3. Konačno upravljanje

U ovom slučaju konačno stanje $\mathbf{x}_f = \mathbf{x}(t_1)$ se dovodi što je bliže moguće željenom stanju $\bar{\mathbf{x}}(t_1)$. Prigodan kriterij kakvoće koji se mora minimizirati je:

$$\mathcal{J} := \mathbf{e}^{\mathrm{T}}(t_1)\mathbf{M}\mathbf{e}(t_1), \tag{2-4}$$

gdje je $\mathbf{e}(t) := \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)$ regulacijsko odstupanje, a **M** pozitivna definitna simetrična matrica ($\mathbf{M}^{\mathrm{T}} = \mathbf{M} > 0$).

Poseban slučaj je kada je **M** jedinična matrica te je onda:

$$\mathcal{J} := \left\| \mathbf{x}_f - \bar{\mathbf{x}}(t_1) \right\|^2. \tag{2-5}$$

Općenito gledano, ako je $\mathbf{M} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i)$ tada se unosi λ_i odabiru tako da mjere relativnu važnost devijacija $(\mathbf{x}_i(t_1) - \bar{\mathbf{x}}_i(t_1))$. Ako neke od vrijednosti $\bar{\mathbf{x}}_i(t_1)$ nisu definirane tada se odgovarajući elementi matrice **M** mijenjaju s 0 i onda će matrica **M** biti pozitivna semidefinitna ($\mathbf{M}^{\mathrm{T}} = \mathbf{M} \geq 0$).

2.1.4. Minimalni trud

Željeno konačno stanje se sada treba dobiti uz minimalan uložen trošak upravljanja.

Prigodan kriterij kakvoće koji se minimizira je:

$$\mathcal{J} := \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=0}^{l} \beta_i |\mathbf{u}_i| dt, \tag{2-6}$$

ili

$$\mathcal{J} := \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{R} \mathbf{u} dt, \tag{2-7}$$

gdje je $\mathbf{R} = [\, r_{ij}]$ pozitivna definitna simetrična matrica ($\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R} > 0$), a β_i i r_{ij} težinski faktori.

2.1.5. Problemi praćenja

Cilj je pratiti pobliže, što je više moguće, željeno stanje kroz interval $[t_0, t_1]$. Prigodan kriterij kakvoće je:

$$\boldsymbol{J} := \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{e}^{\mathrm{T}} \mathbf{Q} \mathbf{e} dt, \tag{2-8}$$

gdje je **Q** pozitivna semidefinitna simetrična matrica ($\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q} \geq 0$).

Takvi sustavi nazivaju se servo sustavi. Poseban slučaj za koji je $\bar{\mathbf{x}}(\cdot)$ konstanta ili nula se naziva regulatorom. Ako je $\mathbf{u}(\cdot)$ bez granica tada problem minimizacije može dovesti do toga da vektor upravljanja ima beskonačno mnogo komponenata. Za stvarne probleme ovo je neprihvatljivo, stoga se, da bi se ograničio ukupni trošak upravljanja, koristi sljedeći kriterij kakvoće:

$$\mathcal{J} := \int_{t_0}^{t_1} \left(\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{e} + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{u}\right)dt. \tag{2-9}$$

Izrazi (2-6), (2-7) i (2-8) se definiraju kao kvadratni kriteriji kakvoće (ili kvadratni troškovi).

2.1.6. Primjena kriterija kakvoće

Prije nego što se započne rješavati problem određivanja optimalnog upravljanja treba razmotriti vremensko-invarijantni sustav:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = x_0, \tag{2-10}$$

na temelju kojega se može prikazati kako odrediti kvadratne troškove:

$$\mathcal{J}_r := \int_0^{\infty} t^r \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x}dt, \quad r = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2-11}$$

gdje je $\mathbf{Q}$ pozitivna definitna simetrična matrica ($\mathbf{Q}^{\mathrm{T}} = \mathbf{Q} > 0$).

Ako (2-10) predstavlja regulator, a $\mathbf{x}(\cdot)$ predstavlja odstupanje od željenog konstantnog stanja, tada će minimiziranje $\mathcal{J}_r$, s poštivanjem parametara sustava, natjerati sustav da se približi željenom stanju na optimalan način. Povećanje vrijednosti r u (2-11) odgovara kažnjavanju velikih vrijednosti t u ovom procesu.

Kako bi se ocijenilo $\mathcal{J}_0$, koristi se tehnika Lyapunovog kriterija stabilnosti.

Uzevši da je:

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}\right) = -\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x}, \tag{2-12}$$

gdje $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$ zadovoljavaju Lyapunovu matričnu jednadžbu:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} = -\mathbf{Q}. \tag{2-13}$$

Integriranjem obje strane od (2-13), s obzirom na t, za rezultat daje:

$$\mathcal{J}_0 = \int_0^{\infty} \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x}dt = -\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}\mathbf{x}(t)\right)\Big|_0^{\infty} = \mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}_0 . \tag{2-14}$$

Uzevši u obzir da je **A** matrica stabilnosti, budući da je ovo slučaj da $\mathbf{x}(t) \to 0$ kada $t \to \infty$.

Matrica **P** je pozitivna definitna matrica te je $\mathcal{J}_0 > 0$ za svaki $x_0 \neq 0$.

Ponavljanje argumenata dovodi do sličnog izraza za $\mathcal{J}_r$, $r \geq 1$.

Na primjer:

$$\frac{d}{dt}\left(t\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}\right) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{x} - t\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x}, \tag{2-15}$$

integriranjem se dobije:

$$\mathbf{J}_o = \int_0^{\infty} t\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x}dt = \mathbf{x}_0^{\mathbf{T}}\mathbf{P}_1\mathbf{x}_0, \tag{2-16}$$

gdje je:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1\mathbf{A} = \mathbf{P}. \tag{2-17}$$

2.2. Elementi računa varijacija

Račun varijacija je ime za teoriju optimizacije integrala. Samo ime datira iz sredine 18. stoljeća i opisuje metodu iz koje je izvedena teorija [2].

Uzimajući u obzir problem minimiziranja funkcionala:

$$\boxed{\mathcal{J}[\mathbf{u}] := \varphi(\mathbf{x}(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})dt} \;, \tag{2-18}$$

s obzirom na:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathrm{x}_0 \in \Re^m. \tag{2-19}$$

Pretpostavlja se sljedeće:

- Nema ograničenja upravljačke funkcije $\mathbf{u}_i(\cdot), i = 1,2,\ldots,l$
(tj. upravljački vektor **u** je $\Re^l$).

- $\mathcal{J} = \mathcal{J}[\mathbf{u}]$ je diferencijabilna (tj. ako su **u** i $\delta\mathbf{u}$ dvije upravljačke veličine za koji je $\mathcal{J}$ definirana, onda vrijedi: $\Delta\mathcal{J} := \mathcal{J}[\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}] - \mathcal{J}[\mathbf{u}] = \delta\mathcal{J}[\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}] + \boldsymbol{j}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \cdot \|\delta\mathbf{u}\|$,
gdje $\delta\mathcal{J}$ je linearna funkcija i $\mathcal{J}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \to 0$ dok $\|\delta\mathbf{u}\| \to 0$.

Funkcija koštanja $\mathcal{J}$ zapravo je funkcija na funkciji prostora **U** (od svih dopustivih upravljanja) :

$$\mathcal{J} : \mathbf{u} \in \mathbf{U} \mapsto \boldsymbol{J}[\mathbf{u}] \in \Re.$$

$\delta\mathcal{J}$ se naziva (prvom) varijacijom od $\mathcal{J}$, što odgovara varijaciji $\delta\mathbf{u}$ u **u**.

Upravljanje $\mathbf{u}^*$ je ekstrem i $\mathcal{J}$ ima (relativni) minimum, uz uvjet da postoji $\varepsilon > 0$ takav da za sve funkcije **u** zadovoljavaju $\left\|\mathbf{u}-\mathbf{u}^*\right\| < \varepsilon$,

$$\mathcal{J}[\mathbf{u}] - \boldsymbol{J}[\mathbf{u}^*] \geq 0. \tag{2-20}$$

<u>Osnovni rezultat (dan bez dokaza) je sljedeći</u>:

Nužan uvjet da bi $\mathbf{u}^*$ bio ekstrem je:

$$\delta\mathcal{J}[\mathbf{u}^*, \delta\mathbf{u}] = 0 \text{ za svaki } \delta\mathbf{u}. \tag{2-21}$$

Sada koristimo relaciju (2-18). Uvodi se kovektor funkcije od Lagrangeovog multiplikatora $\mathbf{p}(t) = [p_1(t)p_2(t)\ldots p_m(t)] \in \Re^{1\text{xm}}$ takav da tvori prošireni funkcional s uključenim ograničenjima:

$$\mathcal{J}_a := \varphi(\mathbf{x}(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} (\boldsymbol{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{p}(\boldsymbol{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - \dot{\mathbf{x}}))dt. \tag{2-22}$$

Integriranjem po dijelovima zadnjeg izraza na desnoj strani jednadžbe daje:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_a &= \varphi(\mathbf{x}(t_1), t_1) + \int_t^{t_1} (\boldsymbol{L} + \mathbf{p}\,\boldsymbol{F} + \dot{\mathbf{p}}\mathbf{x})dt - \mathbf{p}\mathbf{x}\Big|_{t_0}^{t_1} \\ &= \varphi(\mathbf{x}(t_1), t_1) - \mathbf{p}\mathbf{x}\Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{H} + \mathbf{p}\mathbf{x}\,)dt, \end{aligned} \tag{2-23}$$

gdje je (upravljanje) Hamiltonova funkcija definirana s:

$$\boxed{\boldsymbol{H}(t, \mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) := L(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + \mathbf{p}F(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\,.} \tag{2-24}$$

Pretpostavka je da je **u** diferencijabilna na $[t_0, t_1]$ i da su t_0 i t_1 vezane varijable.

Varijacija u $\mathcal{J}_a$ odgovara varijaciji $\delta\mathbf{u}$ u **u:**

$$\delta\mathcal{J}_a = \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{p}\right)\delta x\right]_{t=t_1} + \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{x}}\delta\mathbf{x} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{u}}\delta\mathbf{u} + \dot{\mathbf{p}}\delta x\right)dt \ , \qquad (2\text{-}25)$$

gdje je $\delta\mathbf{x}$ varijacija u $\mathbf{x}$ u diferencijalnoj jednadžbi:

$$\dot{\mathbf{x}} = \boldsymbol{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \qquad (2\text{-}26)$$

zbog $\delta\mathbf{u}$.

Koristi se pretpostavka:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{x}} := \begin{bmatrix} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_1} & \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial x_m} \end{bmatrix}, \qquad (2\text{-}27)$$

i slično tome za $\frac{\delta\varphi}{\delta\mathbf{x}}$ i $\frac{\delta \boldsymbol{H}}{\delta\mathbf{u}}$.

Zato što je $\mathbf{x}(t_0)$ definiran, vrijedi da je $\delta x|_{t=t_0} = 0$.

Iz izraza za $\mathcal{J}_a$ prikladno je ukoniti izraz koji uključuje $\delta\mathbf{x}$ tako da se odabere prikladan $\mathbf{p}$, npr. uzevši:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{x}} \qquad \text{i} \qquad \mathbf{p}(t_1) = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{x}}\right|_{t=t_1} \ , \qquad (2\text{-}28)$$

iz čega slijedi da je:

$$\delta\mathcal{J}_a = \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{u}}\delta\mathbf{u}\right)dt \ . \qquad (2\text{-}29)$$

Stoga da bi u^* bio ekstrem sljedeći nužan uvjet je:

$$\boxed{\left.\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{u=u^*} = 0, \quad t_0 \le t \le t_1.} \qquad (2\text{-}30)$$

Utvrđeno je sljedeće:

Nužan uvjeti da bi funkcija u^* bila eskstrem za:

$$\mathcal{J}[\mathbf{u}] = \varphi(\mathbf{x}(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})dt, \qquad (2\text{-}31)$$

za:

$$\dot{x} = \boldsymbol{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{x}(t_0) = x_0 \ , \qquad (2\text{-}32)$$

su sljedeći:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{x}} \,, \tag{2-33}$$

$$p(t_1) = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}\right|_{t=t_1} \,, \tag{2-34}$$

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{u=u^*} = 0 \quad t_0 \le t \le t_1 \,. \tag{2-35}$$

Jednadžba (vektor) stanja:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \,, \tag{2-36}$$

i jednadžba (vektor) ko-stanja ili adjungirana jednadžba:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{x}} \,, \tag{2-37}$$

daju ukupno 2 linearne ili nelinearne diferencijalne jednadžbe s (miješanim) graničnim uvjetima $\mathbf{x}(t_0)$ i $\mathbf{p}(t_1)$. U pravilu, analitičko rješenje nije moguće, nego se moraju koristit numeričke metode.

Primjer 2.1.

Treba odabrati $\mathbf{u}(\cdot)$ takav da se minimizira:

$$\mathcal{J} = \int_0^{\mathrm{T}} \left(x^2 + u^2\right) , \tag{2-38}$$

za zadane uvjete:

$$\dot{\mathbf{x}} = -ax + u, \quad \mathbf{x}(0) = x_0 \in \Re \,, \tag{2-39}$$

gdje su $a, \mathrm{T} > 0$.

Zadano je:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{L} + \mathbf{p}\boldsymbol{F} = x^2 + u^2 + \mathbf{p}(-ax + u) \,. \tag{2-40}$$

Također:

$$\dot{\mathbf{p}}^* = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{x}} = -2x^* + ap^* \,, \tag{2-41}$$

i:

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{u=u^*} := 2u^* + p^* = 0\,, \tag{2-42}$$

gdje x^* i p^* obilježavaju stanje i adjugirane varijable za optimalno rješenje.

Rezultat zamjene je:

$$\dot{x}^* = -ax^* - \frac{1}{2}p^*. \tag{2-43}$$

Budući da je $\varphi \equiv 0,$ onda je granični uvjet samo:

$$\mathbf{p}(T) = 0. \tag{2-44}$$

Linearni sustav :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^* \\ \dot{\mathbf{p}}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -\frac{1}{2} \\ -2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ p^* \end{bmatrix}, \tag{2-45}$$

može se riješiti koristeći metode iz računa varijacija. Lako je dokazati da x^* i p^* poprimaju oblik $c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t}$, gdje je $\lambda = \sqrt{1+a^2}$ i konstante c_1 i c_2 izračunavaju se korištenjem uvjeta za $t = 0$ i $t = T.$

Iz ovoga slijedi da je optimalno upravljanje:

$$u^*(t) = -\frac{1}{2}p^*(t). \tag{2-46}$$

Mora se napomenuti da su pronađeni nužni uvjeti optimalnosti.

Ako funkcije $\boldsymbol{L}$ i $\boldsymbol{F}$ ne ovise eksplicitno o t, onda iz:

$$\boldsymbol{H}(p,\mathbf{x},\mathbf{u}) = \boldsymbol{L}(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \mathbf{p}\,\boldsymbol{F}(\mathbf{x},\mathbf{u})\,, \tag{2-47}$$

slijedi:

$$\begin{aligned} \dot{H} = \frac{d\,\boldsymbol{H}}{dt} &= \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} + p\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}}\right) + \dot{\mathbf{p}}\,\boldsymbol{F} \\ &= \left(\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{p}\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \mathbf{u}}\right)\dot{\mathbf{u}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \mathbf{x}} + p\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \mathbf{x}}\right)\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{p}}\,\boldsymbol{F} \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{x}}\dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{p}}\,\boldsymbol{F} \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{p}}\right)\boldsymbol{F}\,. \end{aligned} \tag{2-48}$$

Budući da je optimalna trajektorija:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{x}} \text{ i } \left.\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{u=u^*} = 0 \text{ ,} \tag{2-49}$$

slijedi da je $\boldsymbol{H} = 0$ kada je $\mathbf{u} = u^*$, tako da:

$$\boldsymbol{H}_{u=u^*} = \text{constant} \text{ ,} \quad t_0 \le t \le t_1 \text{ .} \tag{2-50}$$

Do sada je pretpostavka bila da je t_1 vezana varijabla, a $\mathbf{x}(t_1)$ slobodna varijabla. Ako to nužno nije slučaj, tada slijedi:

$$\delta \mathcal{J}_a = \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} - p \right) \delta \mathbf{x} + \left(\boldsymbol{H} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \delta t \right]_{\substack{u=u^* \\ t=t_1}} + \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + \dot{\mathbf{p}} \delta \mathbf{x} \right) dt \text{ .} \tag{2-51}$$

Izraz izvan integrala mora biti nula (po prirodi izraza (2-21)), rezultirajući time da je integral jednak nuli. Nadalje, to se može primijeniti u specijalnim slučajevima koji su navedeni u nastavku. Početni uvjet $\mathbf{x}(t_0) = x_0$ vrijedi u svim slučajevima.

2.2.1. Konačno vrijeme t_1 je definirano

<u>$\mathbf{x}(t_1)$ je slobodno</u>

Zadano je $\left.\delta t\right|_{t=t_1} = 0$, ali je $\left.\delta \mathbf{x}\right|_{t=t_1}$ proizvoljan, stoga uvjet:

$$\mathbf{p}(t_1) = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}\right|_{t=t_1} \text{ ,} \tag{2-52}$$

mora vrijediti. (s $\boldsymbol{H}_{u=u^*} = const.$, $t_0 \le t \le t_1$ kada je prikladno).

<u>$\mathbf{x}(t_1)$ je specificiran</u>

U ovom slučaju je $\left.\delta t\right|_{t=t_1} = 0$ i $\left.\delta \mathbf{x}\right|_{t=t_1} = 0$, stoga je:

$$\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{p} \right) \delta \mathbf{x} + \left(\boldsymbol{H} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \delta t \right]_{\substack{u=u^* \\ t=t_1}} \text{ ,} \tag{2-53}$$

automatski jednako nula, te je uvjet sljedeći:

$$\mathbf{x}^*(t_1) = x_f \,. \tag{2-54}$$

2.2.2. Konačno vrijeme t_1 je slobodno

$\mathbf{x}(t_1)$ je slobodno

Funkcije $\delta\, t\big|_{t=t_1}$ i $\delta\, x\big|_{t=t_1}$ su sada proizvoljne pa tako izraz:

$$\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}} - \mathbf{p}\right)\delta\mathbf{x} + \left(\boldsymbol{H} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\delta t\right]_{\substack{u=u^* \\ t=t_1}} \,, \tag{2-55}$$

iščezava, stoga uvjet:

$$\mathbf{p}(t_1) = \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{x}}\right|_{t=t_1} \quad \text{i} \quad \left.\left(\boldsymbol{H} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right|_{\substack{u=u^* \\ t=t_1}} = 0 \,, \tag{2-56}$$

mora vrijediti. Naročito ako $\varphi, \boldsymbol{L}$ i $\boldsymbol{F}$ ne ovise eksplicitno o t onda:

$$\boldsymbol{H}_{u=u^*} = 0, \quad t_0 \le t \le t_1 \,. \tag{2-57}$$

$\mathbf{x}(t_1)$ je definirano

U ovom slučaju je samo $\delta\, t\big|_{t=t_1}$ proizvoljno pa su stoga uvjeti:

$$\mathbf{x}^*(t_1) = x_f \quad \text{i} \quad \left.\left(\boldsymbol{H} + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\right|_{\substack{u=u^* \\ t=t_1}} = 0 \,. \tag{2-58}$$

Primjer 2.2.

Čestica jedinične mase kreće se duž x-osi uz utjecaj sile $\mathbf{u}(\cdot)$. Potrebno je odrediti upravljanje koje će prebaciti česticu iz točke mirovanja u početnom stanju u točku mirovanja za $x = 1$ u jedinici vremena, stoga treba minimizirati uložen trud koji se može mjeriti s:

$$\mathcal{J} := \int_0^1 \mathbf{u}^2 dt. \tag{2-59}$$

Jednadžba kretanja je:

$$\ddot{x} = \mathbf{u} \,, \tag{2-60}$$

i uzevši da je $x_1 := x$ i $x_2 := \dot{x}$ dobiju se sljedeće jednadžbe stanja:

$$\dot{x}_1 = x_2 \;, \quad \dot{x}_2 = u \;. \tag{2-61}$$

Budući da je:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{L} + \mathbf{p}\boldsymbol{F} = p_1 x_2 + p_2 u + u^2 \;, \tag{2-62}$$

iz:

$$\left.\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{u=u^*} = 0 \;, \tag{2-63}$$

optimalno upravljanje zadano je sa:

$$2u^* + p_2^* = 0 \;, \tag{2-64}$$

i adjungirane jednadžbe su:

$$\dot{p}_1^* = 0, \quad \dot{p}_2^* = -\dot{p}_1^* \,. \tag{2-65}$$

Integracija za rezultat daje:

$$\dot{p}_2 = c_1 t + c_2 \;, \tag{2-66}$$

prema tome:

$$\dot{x}_2^* = -\frac{1}{2}\left(c_1 t + c_2\right), \tag{2-67}$$

što pri integriranju i korištenju danih uvjeta $x_2(0) = 0 = x_2(1)$ daje:

$$x_2^* = \frac{1}{2} c_2 \left(t^2 - t\right), \quad c_1 = -2c_2 \;. \tag{2-68}$$

Konačno, integriranjem jednadžbe $\dot{x}_1 = x_2$ i koristeći $x_1(0) = 0, x_1(1) = 1$ za rezultat daje:

$$x_1^* = \frac{1}{2} t^2 (3 - 2t), \quad c_2 = -12 \,. \tag{2-69}$$

Stoga je u ovom slučaju optimalno upravljanje:

$$u^*(t) = 6(1 - 2t) \,. \tag{2-70}$$

2.3. Pontrjaginov princip

U stvarnim životnim problemima upravljačke veličine su uobičajeno podložne ograničenjima njihovih veličina, tipično oblika:

$$|u_i(t)| \le K_i, \quad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{2-71}$$

Ovime se nagovještava da je skup konačnih vrijednosti koje se mogu postići ograničen. Cilj je izvesti nužne uvjete za optimalnost koji odgovaraju relaciji (2-30) za neograničeni slučaj [2].

Dopustivo upravljanje je ono koje zadovoljava uvjete i uzimamo u obzir varijacije kao što su:

- u∗ + δu je dopustiva
- $\|\delta u\|$ je dovoljno mala vrijednost tako da se predznak:

$$\Delta \mathcal{J} = \mathcal{J}[\mathbf{u}^* + \delta\mathbf{u}] - \mathcal{J}[\mathbf{u}^*], \tag{2-72}$$

gdje je:

$$\mathcal{J}[\mathbf{u}] = \varphi(\mathbf{x}(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})dt \ , \tag{2-73}$$

određen s $\delta\mathcal{J}$ u

$$\mathcal{J}[\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}] - \mathcal{J}[\mathbf{u}] = \delta\mathcal{J}[\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}] + \boldsymbol{j}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) \cdot \|\delta\mathbf{u}\| \ . \tag{2-74}$$

Zbog ograničenja na $\delta\mathbf{u}$, relacija (2-287) više ne vrijedi, nego je umjesto toga nužan uvjet da u^* minimizira $\mathcal{J}$:

$$\delta \boldsymbol{J}[\mathbf{u}^*, \delta\mathbf{u}] \geq 0. \tag{2-75}$$

Daljnji postupak isti je kao i u prijašnjim podnaslovima; uvodi se Lagrangeov multiplikatori $\mathbf{p} = [p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_m]$ da bi se definirao $\mathcal{J}_a$ i odabiru se tako da zadovoljavaju:

$$\dot{p} = -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{x}} \quad \text{i} \quad p(t_1) = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}\right|_{t=t_1} . \tag{2-76}$$

Jedina je razlika da izraz za $\delta\mathcal{J}_a$ postaje:

$$\delta\mathcal{J}_a[\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}] = \int_{t_0}^{t_1} \left(\boldsymbol{H}(t, \mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}) - \boldsymbol{H}(t, \mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u})\right)dt \ . \tag{2-77}$$

Stoga slijedi da je nužan uvjet da bi $\mathbf{u} = u^*$ bilo minimizirajuće upravljanje sljedeći:

$$\delta\mathcal{J}_a[\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}] \geq 0 \ , \tag{2-78}$$

za sve dopustive $\delta\mathbf{u}$. Ovo zauzvrat nagovještava da je:

$$\boxed{\boldsymbol{H}(t, p^*, x^*, u^* + \delta u) \geq \boldsymbol{H}(t, p^*, x^*, u^*)} \tag{2-79}$$

za sve dopustive $\delta\mathbf{u}$ i za sve t u $[t_0, t_1]$. Ovo pokazuje da u^* minimizira $\boldsymbol{H}$, stoga je utvrđen Pontrjaginov princip minimuma.

Teorem 2.1.

Nužni uvjeti da bi u^* minimizirao:

$$\boldsymbol{J}[u] = \varphi(x(t_1), t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \boldsymbol{L}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) dt \ , \qquad \text{(2-80)}$$

su sljedeći:

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \mathbf{x}} \ , \qquad \text{(2-81)}$$

$$\mathbf{p}(t_1) = \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}\right|_{t=t_1} \ , \qquad \text{(2-82)}$$

$\boldsymbol{H}(t, p^*, x^*, u^* + \delta\mathbf{u}) \geq \boldsymbol{H}(t, p^*, x^*, u^*)$ za sve dopustive $\delta\mathbf{u}$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

S malo drugačije definiranom funkcijom ***H***, princip postaje maksimiziranje $\mathcal{J}$ te se on tada naziva Pontrjaginov princip maksimuma.

Primjer 2.3.

Zadan je problem „mekog spuštanja“ rakete gdje je indeks izvedbe:

$$\mathcal{J} = \int_{=}^{T} (|u| + k) dt \ , \qquad \text{(2-83)}$$

koji se mora minimizirati s obzirom na:

$$\dot{x}_1 = x_2 \ , \quad \dot{x}_2 = u \ . \qquad \text{(2-84)}$$

Hamiltonova funkcija je:

$$\boldsymbol{H} = |u| + k + p_1 x_2 + p_2 u \ . \qquad \text{(2-85)}$$

Budući da je raspon dopustivog upravljanja $-1 \leq \mathbf{u}(t) \leq 1$, slijedi da će ***H*** biti minimizirana s:

$$u^*(t) \begin{cases} -1 \text{ ako je } 1 < p_2^*(t) \\ 0 \text{ ako je } -1 < p_2^*(t) < 1 \\ +1 \text{ ako je } p_2^*(t) < -1 \end{cases} . \qquad \text{(2-86)}$$

Za takvo upravljanje koristi se grafički naziv *bang-zero-bang* budući da se maksimalni potisak primjenjuje pri kretanju naprijed ili nazad; ne koriste se međuvrijednosti različite od nule. Ako ne postoji period u kojem je u^* jednak nuli, upravljanje se naziva *bang-bang*. Na primjer, vozač utrka se pokušava približiti *bang-bang* operaciji, budući da on pokušava koristiti punu snagu motora ili pokušava maksimalno kočiti dok pokušava obići stazu u najbržem vremenu.

U (2-86) promjene u vrijednostima s obzirom na vrijednost $p_2^*(\cdot)$ se tada u ovom primjeru definiraju kao funkcija promjene.

Adjungirane funkcije su:

$$\dot{p}_1^* = 0, \quad \dot{p}_2^* = -p_1^* \, , \tag{2-87}$$

a integriranje tih funkcija za rezultat daje:

$$p_1^*(t) = e_1, \quad p_2^*(t) = -c_1 t + c_2 \, , \tag{2-88}$$

gdje su c_1 i c_2 konstante.

Kako je p_2^* linearna funkcija, slijedi da može poprimiti jednu od vrijednosti +1 ili -1 najviše jednom u intervalu [0,*T*], stoga se $u^*(\cdot)$ može promijeniti najviše dva puta. Međutim, da bi se odredilo stvarno optimalno upravljanje moraju se uzeti fizička razmatranja u obzir. Budući da vozilo za spuštanje započinje s brzinom prema dolje na visini od h, logičan slijed upravljanja bi izgledao kao:

$$u^* = 0 \text{ popraćen s } u^* = 1. \tag{2-89}$$

Ili (kretanje prema gore se smatra pozitivnim):

$$u^* = -1 \text{ te } u^* = 0 \text{ i } u^* = +1. \tag{2-90}$$

Razmotrit će se prva mogućnost i pretpostaviti da se u^* mijenja od 0 do +1 u vremenu t_1. Po prirodi od (2-86) ovaj slijed upravljanja je moguć ako se p_2^* smanjuje s vremenom. Lako je dokazati da je rješenje od:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \tag{2-91}$$

za početne uvjete:

$$x_1(0) = h, \quad x_2(0) = -v, \tag{2-92}$$

jednako:

$$x_1^* \begin{cases} h - vt \text{ ako je } 0 \le t \le t_1 \\ h - vt + \dfrac{1}{2}(t - t_1)^2 \text{ ako je } t_1 \le t \le T \end{cases} \tag{2-93}$$

$$x_2^* \begin{cases} -v \text{ ako je } 0 \le t \le t_1 \\ -v + (t - t_1) \text{ ako je } t_1 \le t \le T. \end{cases} \tag{2-94}$$

Uvrštavanjem zahtjeva za „meko slijetanje“:

$$x_1(T) = 0, \quad x_2(T) = 0, \tag{2-95}$$

u (2-93) i (2-94) za rezultat daje:

$$T = \frac{h}{v} + \frac{1}{2}v, \quad t_1 = \frac{h}{v} - \frac{1}{2}v. \tag{2-96}$$

Zbog toga što konačno vrijeme nije zadano i zato što oblik jednadžbe $\boldsymbol{HH}_{u=u^*}$ vrijedi, osobito za $\boldsymbol{H}_{u=u^*} = 0$ u $t = 0$; tj. :

$$k + p_1^*(0) x_2^*(0) = 0, \tag{2-97}$$

ili :

$$p_1^*(0) = \frac{k}{v}. \tag{2-98}$$

Stoga se dobije:

$$p_1^*(t) = \frac{k}{v}, \quad t \ge 0, \tag{2-99}$$

i:

$$p_2^*(t) = -\frac{kt}{v} - 1 + \frac{kt_1}{v}, \tag{2-100}$$

koristeći pretpostavku da $p_2^*(t_1) = -1$. Pretpostavljeno optimalno upravljanje će biti važeće ako $t_1 > 0$ i $p_2^*(0) < 1$ (s prvim uvjetom kao nužnim zato što je $u^* = 0$), i ovi uvjeti nagovještavaju da je:

$$h > \frac{1}{2}v^2, \quad \mathrm{k} < \frac{2v^2}{h - \frac{1}{2}v^2}. \tag{2-101}$$

Ako ove nejednakosti ne vrijede, tada drugi tip optimalne strategije postaje optimalan. Na primjer, ako se *k* poveća tako da je druga nejednakost u (2-101) prekršena, to znači da je veći značaj stavljen na vrijeme slijetanja u indeksu izvedbe. Stoga je razumno za očekivati da bi se to vrijeme smanjilo ako bi se prvo ubrzalo prema dolje s $u^* = -1$ prije kretanja s $u^* = 0$.

2.4. Opći problem regulacije

Sada se može raspraviti o općem linearnom regulatorskom problemu uobičajenom obliku:

$$\dot{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \ , \tag{2-102}$$

gdje je $\mathbf{x}(\cdot)$ devijacija od željenog konstantnog stanja. Cilj je prebaciti sustav iz početnog stanja u ishodište u minimalnom vremenu, uz uvjet:

$$|\mathbf{u}_i(t)| \leq K_i \ , \quad i = 1,2,\ldots,l \, . \tag{2-103}$$

Hamiltonova funkcija je:

$$\begin{aligned} H &= 1 + \mathbf{p}(\mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}) \\ &= 1 + \mathbf{pAx} + [pb_1 \quad pb_2 \quad \ldots \quad pb_l]u \\ &= 1 + \mathbf{pAx} + \sum_{i=1}^{l} (pb_i) u_i \, , \end{aligned} \tag{2-104}$$

gdje su b_i stupci od **B**.

Koristeći Pontrjaginov princip minimuma, daju nužni uvjet optimalnosti:

$$u_i^*(t) = -K_i \operatorname{sgn}(s_i(t)) \, , \quad i = 1,2,\ldots,l \ , \tag{2-105}$$

gdje je:

$$s_i(t) := p^*(t) b_i \ , \tag{2-106}$$

funkcija promjene za i-tu varijablu.

Adjungirana jednadžba je:

$$\dot{p}^* = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (p^* \mathbf{Ax}) \, , \tag{2-107}$$

ili:

$$\dot{p}^* = -p^* \mathbf{A} \ . \tag{2-108}$$

Rješenje ove obične diferencijalne jednadžbe može se zapisati u obliku:

$$p^*(t) = \mathbf{p}(0) \exp(-t\mathbf{A}) \, . \tag{2-109}$$

Stoga funkcija zamjene postaje:

$$s_i(t) = \mathbf{p}(0) \exp(-t\mathbf{A}) b_i \ . \tag{2-110}$$

Ako je $s_i \equiv 0$ u nekom intervalu, tada je $u_1^*(t)$ neodređen u tom intervalu. Istražena je mogućnost nestajanja izraza (2-106). Kao prvo, može se zaključiti da je $b_i = 0$. Sljedeće, budući da je konačno vrijeme slobodno, uvjet $\boldsymbol{H}_{u=u*} = 0$ vrijedi, što kao posljedicu daje (za sve vrijednosti *t*):

$$1 + p^*\left(\mathbf{A}x^* + \mathbf{B}u^*\right) = 0 \text{ ,} \tag{2-111}$$

jasno je da $p^*(t)$ ne može biti nula za bilo koju vrijednost od *t*. Konačno, ako je umnožak $p^* b_i$ nula, tada $s_i = 0$ implicira da:

$$\dot{s}_i(t) = -p^*(t)\mathbf{A}b_i = 0 \text{ ,} \tag{2-112}$$

slično i za veće vrijednosti derivacija od s_i. To dovodi do:

$$\mathbf{p}(t)\left[b_i \quad \mathbf{A}b_i \quad \mathbf{A}^2 b_i \quad \dots \quad \mathbf{A}^{m-1} b_i\right] \text{ .} \tag{2-113}$$

U sustavu (2-102) za i-ti ulaz koji se ponaša samostalno (tj. $u_j \equiv 0, j \neq i$) matrica u (2-113) nije jedinična i jednadžba ima samo trivijalno rješenje $p^* = 0$. Ta je mogućnost već izbačena, stoga s_i ne može biti jednako nula. Iz toga slijedi da uvjeti upravljanja vrijede i da ne postoji interval u kojem u_i^* nije definiran. Optimalno upravljanje za i-tu varijabli tada ima *bang-bang* oblik.

2.4.1. Linearni regulatori s kvadratnim koštanjem

Opće rješenje optimalnog problema je moguće za sve linearne regulatore s kvadratnim kriterijem kakvoće. Uzima se u obzir vremenski varijantni sustav:

$$\dot{x} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \tag{2-114}$$

s mjerilom (dobivenim spajanjem (2-3) i (2-9) zajedno) :

$$\mathcal{J} := \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}(t_1)\mathbf{M}\mathbf{x}(t_1) + \frac{1}{2}\int_0^{t_1}\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(t)\mathbf{u}\right)dt \text{ ,} \tag{2-115}$$

gdje je $\mathbf{R}(t)$ pozitivna definitna matrica, a **M** i **Q**(*t*) pozitivne semidefinitne simetrične matrice za $t \geq 0$.

Kvadratni izraz u (2-115) osigurava da je ukupni upravljački trud ograničen, tako da se upravljačke veličine mogu pretpostaviti neograničenim.

Hamiltonova funkcija je:

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{p}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u})\,. \tag{2-116}$$

A nužni uvjet za optimalnost (2-30) daje:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}\left(\frac{1}{2}\left(u^*\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{R}u^* + p^*\mathbf{B}u^*\right) = \left(\mathbf{R}u^*\right)^{\mathrm{T}} + p^*\mathbf{B} = 0\,, \tag{2-117}$$

tako da:

$$u^* = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(p^*\right)^{\mathrm{T}}, \tag{2-118}$$

gdje je R(t) ne jedinična matrica.

Adjungirana jednadžba je:

$$\left(\dot{p}^*\right)^{\mathrm{T}} = -\mathbf{Q}x^* - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(p^*\right)^{\mathrm{T}}. \tag{2-119}$$

Uvrštavanjem (2-118) u (2-114) za rezultat daje:

$$\dot{x}^* = \mathbf{A}x^* - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(p^*\right)^{\mathrm{T}}, \tag{2-120}$$

i kombiniranjem jednadžbi s (2-114) kao umnožak daje sustav s dvije linearne obične diferencijalne jednadžbe:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x^* \\ \left(p^*\right)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & -\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t) \\ -\mathbf{Q}(t) & -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^* \\ \left(p^*\right)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}. \tag{2-121}$$

Zato što $\mathbf{x}(t_1)$ nije određen, granični uvjet je:

$$\left(p^*\right)^{\mathrm{T}}(t_1) = \mathbf{M}x^*(t_1)\,. \tag{2-122}$$

Zgodno je izraziti rješenje od (2-121) kao:

$$\underline{\begin{bmatrix} x^* \\ \left(p^*\right)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \mathbf{\Phi}(t, t_1)\begin{bmatrix} x^*(t_1) \\ \left(p^*\right)^{T}(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & \Phi_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^*(t_1) \\ \left(p^*\right)^{T}(t_1) \end{bmatrix}}\,, \tag{2-123}$$

gdje je Φ matrica transponiranja za (2-121).

Stoga se može zapisati:

$$x^* = \mathbf{\Phi}_1 x^*(t_1) + \mathbf{\Phi}_2 \left(p^*\right)^{\mathrm{T}}(t_1)$$
$$= \left(\mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}_2 \mathbf{M}\right) x^*(t_1)\,. \tag{2-124}$$

Također se dobije:

$$\left(p^*\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbf{\Phi}_2 + \mathbf{\Phi}_4 \mathbf{M}\right) x^*(t_1)$$
$$= \left(\mathbf{\Phi}_2 + \mathbf{\Phi}_4 \mathbf{M}\right)\left(\mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}_2 \mathbf{M}\right)^{-1} x^*(t_1) \tag{2-125}$$
$$= \mathbf{P}(t) x^*(t_1)\,,$$

(može se dokazati da $\mathbf{\Phi}_1 + \mathbf{\Phi}_2 \mathbf{M}$ nije jedinična matrica za svaki $t \geq 0$).

Sada slijedi da je optimalno upravljanje linearnog povratnog oblika:

$$u^* = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t) x^*(t_1)\,. \tag{2-126}$$

Da bi se odredila matrica **P**(t), deriviranjem $\left(p^*\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{P} x^*$ kao rezultat daje:

$$\dot{\mathbf{P}} x^* + \mathbf{P} \dot{x}^* - \left(\dot{p}^*\right)^{\mathrm{T}} = 0\,, \tag{2-127}$$

a uvrštavanjem umjesto $\dot{x}^*, \left(\dot{p}^*\right)^{\mathrm{T}}$ (iz 2-121), daje:

$$\left(\dot{\mathbf{P}} + \mathbf{PA} - \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\right) x^*(t) = 0\,, \tag{2-128}$$

Budući da mora vrijediti $0 \leq t \leq t_1$, slijedi da **P**(t) zadovoljava

$$\boxed{\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} - \mathbf{PA} - \mathbf{Q}}\,, \tag{2-129}$$

s graničnim uvjetom:

$$\mathbf{P}(t_1) = \mathbf{M}\,. \tag{2-130}$$

Jednadžba (2-129) se često naziva Riccatijeva diferencijalna jednadžba.

Budući da je matrica M simetrična, slijedi da je **P**(t) simetrična za svaki t, stoga (vektor) obična diferencijalna jednadžba (2-129) predstavlja $\frac{m(m+1)}{2}$ skalar prvog reda obične diferencijalne jednadžbe koji se može brojčano integrirati [2].

Čak i kada su matrice **A**, **B**, **Q** i **R** vremenski invarijantne, rješenje **P**(t) iz (2.1), a samim time i matrica povratne veze u (2.128), će u pravilu varirati u vremenu.

Međutim, interesantan je slučaj kada dodatno konačno vrijeme t_1 teži u beskonačnost. Tada nema potrebe uključiti krajnji izraz za kriterij kakvoće jer je cilj napraviti $\boldsymbol{x}(t_1) \rightarrow 0$ za t_1

$\to\infty$, zato se postavlja $\mathbf{M} = 0$. Neka $\mathbf{Q}_1$ bude matrica istog ranga kao i $\mathbf{Q}$ te takva da vrijedi $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_1$. Može se pokazati da rješenje $\mathbf{P}(t)$ od (2-129) postaje konstantna matrica $\mathbf{P}$.

Definicija 2.1.

Ako linearni vremenski nepromjenjiv sustav upravljanja:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u(t), \tag{2-131}$$

je potpuno upravljiv i par $(\mathbf{A}, \mathbf{Q}_1)$ je potpuno osmotriv, tada je upravljanje koje minimizira:

$$\int_0^\infty \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{u}\right), \tag{2-132}$$

zadano s:

$$\boldsymbol{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{x}(t), \tag{2-133}$$

gdje je jedinstvena definitna simetrična matrica koja zadovoljava takozvanu algebarsku Riccatijevu jednadžbu:

$$\boxed{\mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} - \mathbf{PA} - \mathbf{Q} = 0}\,. \tag{2-134}$$

Jednadžba (2-134) predstavlja $\frac{m(m+1)}{2}$ kvadratnu algebarsku jednadžbu za nepoznate elemente (unose) od $\mathbf{P}$, tako da rješenje neće biti jedinstveno. Međutim, može se pokazati da ako postoji pozitivno definitno rješenje od (2-134), da tada postoji samo jedno takvo rješenje.

2.4.2. Interpretacija

Matrica $\mathbf{Q}_1$ može se interpretirati definiranje izlaznog vektora $\mathbf{y} = \mathbf{Q}_1\mathbf{x}$ i zamjenom kvadratnog oblika koji sadrži izraz iz (2-132) s

$$\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}\left(= \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_1\mathbf{x}\right). \tag{2-135}$$

Zatvoreni sustav koji se dobije uvrštavanjem (2-135) u (2-114) je jednak:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x\ , \tag{2-136}$$

gdje je $\mathbf{A} := \mathbf{A} - \mathbf{BR}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}$.

Lako je dokazati da:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{PA}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{PA}-2\mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}=-\mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}-\mathbf{Q}, \qquad (2\text{-}137)$$

koristeći činjenicu da je to rješenje (2-134). Budući da je $\mathbf{R}^{-1}$ pozitivna semidefinitna matrica, matrica s desne strane jednadžbe u (2-137) je negativna definitna matrica, osim ako **Q** nije pozitivna definitna matrica.

Može se pokazati da uređena trojka $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{Q_1})$ nije niti potpuno upravljiva niti potpuno osmotriva., ali je stabilna i može se pronaći. Tada Riccatieva algebarska jednadžba (2-134) ima jedinstveno rješenje i zatvoreni sustav (2-136) je asimptotski stabilan.

Stoga rješenje Riccatieve algebarske jednadžbe dovodi do stabilizacije linearnog reguliranog kruga s negativnom povratnom vezom(2-133), bez obzira na to da li je otvoreni regulacijski krug stabilan.

Ako je $x^{*}(\cdot)$ rješenje zatvorenog sustava (2-136), tada jednadžba (2-137) podrazumijeva:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\left(\mathbf{x}^{*}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Px}\right)&=-\left(\mathbf{x}^{*}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{Q}\right)\mathbf{x}^{*}\\&=-\left(\mathbf{u}^{*}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Ru}^{*}-\left(\mathbf{x}^{*}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Qx}^{*}.\end{aligned} \qquad (2\text{-}138)$$

Budući da je **A** matrica stabilnosti, može se integrirati obje strane jednadžbe s obzirom na t (od 0 do ∞) da se dobije minimalna vrijednost od (2-132):

$$\int_0^{\infty}\left(\left(\mathbf{x}^{*}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Qx}^{*}+\left(\mathbf{u}^{*}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{Ru}^{*}\right)dt=\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{Px}_0 . \qquad (2\text{-}139)$$

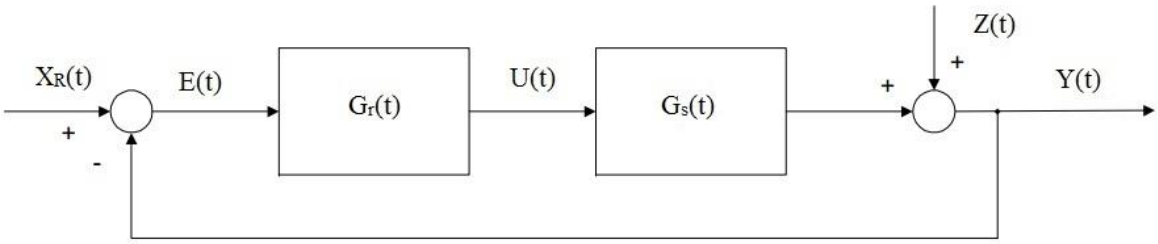
Kada je $B=0$, izrazi (2-134) i (2-139) se svode na:

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}+\mathbf{PA}=-\mathbf{Q}\ , \qquad (2\text{-}140)$$

$$\mathcal{J}_0=\int_0^{\infty}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Qx}dt=\mathbf{x}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{Px}_0. \qquad (2\text{-}141)$$

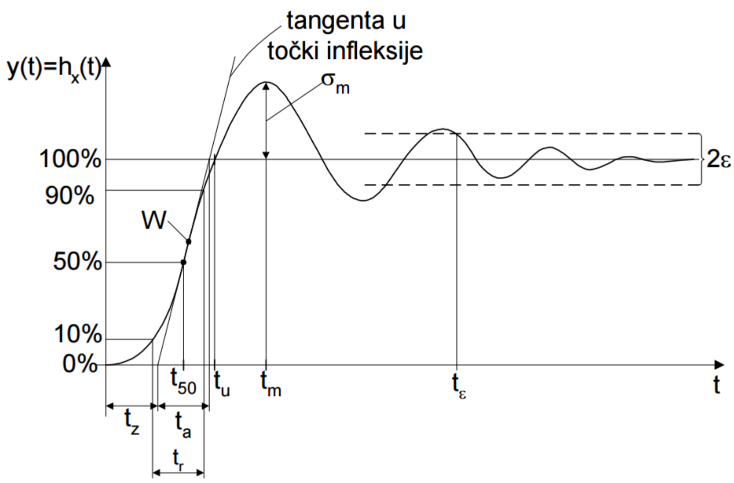
3. INTEGRALNI KRITERIJ

U ovome poglavlju problem optimizacije razmatra se na primjeru jednostavnog regulacijskog kruga, prikazanog na slici 3.1.



Slika 3.1. Struktura regulacijskog kruga.

Vladanje zatvorenog regulacijskog kruga najčešće se definira izravnim pokazateljima kakvoće regulacije, koji su definirani na prijelaznoj funkciji zatvorenog regulacijskog kruga, kako je to prikazano na slici 3.2. [1].



Slika 3.2. Prijelazna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga.

Iz slike 3.2. vidljivo je da površina između prijelazne funkcije $h_x(t)$ i pravca iznosa 100% predstavlja mjeru za odstupanje regulacijskog kruga od idealnog vladanja s obzirom na vodeću vrijednost U ovom se slučaja radi o ukupnoj površini ispod regulacijskog odstupanja $e(t)=x_r(t)-y(t)$ kojim se može opisati odstupanje od idealnog regulacijskog kruga. Prema tome, integral:

$$\mathcal{J}_k = \int_0^{\infty} f_k[e(t)]dt \tag{3-1}$$

predstavlja mjeru za kakvoću upravljanja, gdje funkcija $f_k[e(t)]$ može imati različite oblike, npr. $e(t)$, $|e(t)|t$, $e^2(t)$ itd. U takvoj integralnoj mjeri kakvoće mogu se uzeti u obzir i vremenske derivacije regulacijskog odstupanja kao i amplitude izvršnih veličina. Upravljanje je u smislu odabranog integralnog kriterija utoliko bolje ukoliko je $\mathcal{J}_k$ manji. Prema tome, potrebno je provesti minimizaciju $\mathcal{J}_k$, pri čemu se to može izvesti prikladnim izborom slobodnih (podesivih) parametara sustava r_1, r_2, ... (parametara regulatora). Time integralni kriterij poprima oblik:

$$\mathcal{J}_k = \int_0^\infty f_k[e(t)]dt = \mathcal{J}_k(r_1, r_2 \ldots) = \min . \tag{3-2}$$

Najvažnija svojstva mjera kakvoće $\mathcal{J}_k$ dana su u tablici 3.1.

Tablica 3.1. Tablica mjera kakvoće i njihov svojstava

MJERE KAKVOĆE	SVOJSTVA
$\mathcal{J}_1 = \int_0^\infty e(t)dt$	Linearna površina regulacijskog odstupanja: Prikladna je za analizu jako prigušenih ili monotonih sustava upravljanja; jednostavna matematička obrada.
$\mathcal{J}_2 = \int_0^\infty \lvert e(t)\rvert dt$	Linearna površina apsolutne vrijednosti regulacijskog odstupanja: Prikladna je za oscilatorne sustave upravljanja; mukotrpna matematička obrada.
ISE* - kriterij $\mathcal{J}_3 = \int_0^\infty e^2(t)dt$	Kvadratična površina regulacijskog odstupanja: Daje veće vrijeme ustaljivanja t_ε nego $\mathcal{J}_2$. U mnogim slučajevima moguć analitički proračun.
ITAE* - kriterij $\mathcal{J}_4 = \int_0^\infty \lvert e(t)\rvert t\, dt$	Vremenski otežana linearna površina apsolutne vrijednosti regulacijskog odstupanja: Djelovanje kao $\mathcal{J}_2$, ali dodatno uzima u obzir trajanje regulacijskog odstupanja.
$\mathcal{J}_5 = \int_0^\infty e^2(t)t\, dt$	Vremenski otežana kvadratična površina regulacijskog odstupanja: Djelovanje kao $\mathcal{J}_3$, ali dodatno uzima u obzir trajanje regulacijskog odstupanja.
$\mathcal{J}_6 = \int_0^\infty [e^2(t) + \alpha e^2(t)]dt$	Poopćena kvadratična površina regulacijskog odstupanja: Djelovanje povoljnije od $\mathcal{J}_3$; izbor težinskog koeficijenta α općenito je subjektivan.
$\mathcal{J}_6 = \int_0^\infty [e^2(t) + \beta u^2(t)]dt$	Kvadratična površina regulacijskog odstupanja i energetsko forsiranje: Veća vrijednost σ_m ima za posljedicu t_ε bitno kraće; izbor težinskog koeficijenta β općenito je subjektivan.

ISE - Integral of Squared Error
ITAE - Integral of Time Multiplied by Absolute Value of Error

(Napomena: Ako u regulacijskom krugu postoji trajno regulacijsko odstupanje e_∞, tada se u navedenim relacijama koristi $e(t) - e_\infty$ umjesto $e(t)$, kako bi integrali konvergirali.)

3.1 **Izračunavanje kvadratične površine regulacijskog odstupanja** (ISE kriterij)

ISE kriterij, kao kriterij kakvoće, pokazao se vrlo prikladnim u mnogim primjenama. Pri izračunavanju kvadratične površine regulacijskog odstupanja: $\int_0^{\infty} e^2(t)dt$ polazi se od kompozicijskog teorema o konvoluciji u frekvencijskom području (p kompleksna varijabla integracije):

$$\boldsymbol{L}\{f_1(t)f_2(t)\} = \int_0^{\infty} f_1(t)\cdot f_2(t)\cdot e^{-st}dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\omega}^{c+j\omega} F_1(p)\cdot F_2(s-p)dp \tag{3-3}$$

Ako se odabere da je $s = c = 0$ i $f_1(t) = f_2(t) = f(t)$ dobije se sljedeći izraz (Parsevalova jednadžba):

$$\int_0^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\pi}^{+j\pi} E(s)E(-s)ds \tag{3-4}$$

Pri tome se pretpostavlja $\int_0^{\infty} |f(t)|dt$ i $\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt$ konvergiraju.

Za $f(t) = e(t)$ dobije se kvadratična površina regulacijskog odstupanja:

$$\mathcal{J}_3 = \int_0^{\infty} e^2(t)dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\pi}^{+j\pi} E(s)E(-s)ds \tag{3-5}$$

Neka je $E(s)$ razlomljena racionalna funkcija:

$$E(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{c_0 + c_1 s \ldots + c_{n-1}s^{n-1}}{d_0 + d_1 s + \ldots + d_n s^n} \tag{3-6}$$

čiji polovi leže u lijevoj poluravnini s – ravnine.

Određivanje integrala (3-5) obavlja se pomoću izračunavanja reziduuma. Tablica 3.2. sadrži vrijednosti integrala do četvrtog reda (n = 4) prijenosne funkcije (3-6) ($\mathcal{J}_{3,n}$ za n = 1,2,3,4).

Tablica 3.2. Tablica vrijednosti integrala (3-5)

$\mathcal{J}_{3,1} = \dfrac{c_0^2}{2d_0 d_1}$
$\mathcal{J}_{3,2} = \dfrac{c_1^2 d_0 + c_0^2 d_2}{2d_0 d_1 d_2}$ $\mathcal{J}_{3,3} = \dfrac{c_2^2 d_0 d_1 + \left(c_1^2 - 2c_0 c_2\right) d_0 d_3 + c_0^2 d_2 d_3}{2d_0 d_3\left(-d_0 d_3 + d_1 d_2\right)}$
$\mathcal{J}_{3,4} = \dfrac{c_3^2\left(-d_0^2 + d_0 d_1 d_2\right) + \left(c_2^2 - 2c_1 c_3\right) d_0 d_1 d_4 + \left(c_1^2 - 2c_0 c_2\right) d_0 d_3 d_4 + c_0^2\left(-d_1 d_4^2 + d_2 d_3 d_4\right)}{2d_0 d_4\left(-d_0 d_3^2 + d_1^2 d_4 + d_1 d_2 d_3\right)}$

3.2 Određivanje optimalnih parametara regulatora prema ISE kriteriju

Pretpostavimo da je potrebno odrediti optimalne parametre regulatora regulacijskog kruga prikazanog na slici 3.1 u smislu kriterija kakvoće minimalne kvadratične površine regulacijskog odstupanja (skraćeno: kvadratični kriterij kakvoće). Uz zadanu vodeću odnosno poremećajnu veličinu kvadratična površina regulacijskog odstupanja:

$$\mathcal{J}_3 = \int_0^{\infty} \left[e(t) - e_{\infty}\right]^2 dt = \mathcal{J}_3\left(r_1, r_2, \ldots\right) \qquad (3\text{-}7)$$

postaje funkcijom parametara regulatora r_1, r_2,...., koje treba tako odrediti (optimirati) da $\mathcal{J}_3$ poprimi minimalnu vrijednost, tj.:

$$\mathcal{J}_3\left(r_1, r_2, \ldots\right) = \min. \qquad (3\text{-}8)$$

Optimalne vrijednosti parametara r_{1opt}, r_{2opt}, ...dobiju se na sljedeći način:

$$\left.\frac{\partial \mathcal{J}_3}{\partial r_1}\right|_{r_{2opt}, r_{3opt}, \ldots} = 0, \quad \left.\frac{\partial \mathcal{J}_3}{\partial r_2}\right|_{r_{1opt}, r_{3opt}, \ldots} = 0, \ldots \qquad (3\text{-}9)$$

Primjer 3.1

Proces opisan prijenosnom funkcijom:

$$G_s(s) = \frac{1}{(1+s)^3}, \qquad (3\text{-}10)$$

Regulira se regulatorom PI – djelovanja:

$$G_R(s) = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) \tag{3-11}$$

Potrebno je odrediti K_{Ropt} i T_{Iopt} da kvadratična površina $\mathcal{J}_3$ pri skokovitoj promjeni smetnje na ulazu objekta upravljanja (regulacijsku stazu) ima minimalnu vrijednost.

1. korak: Određivanje ruba stabilnosti

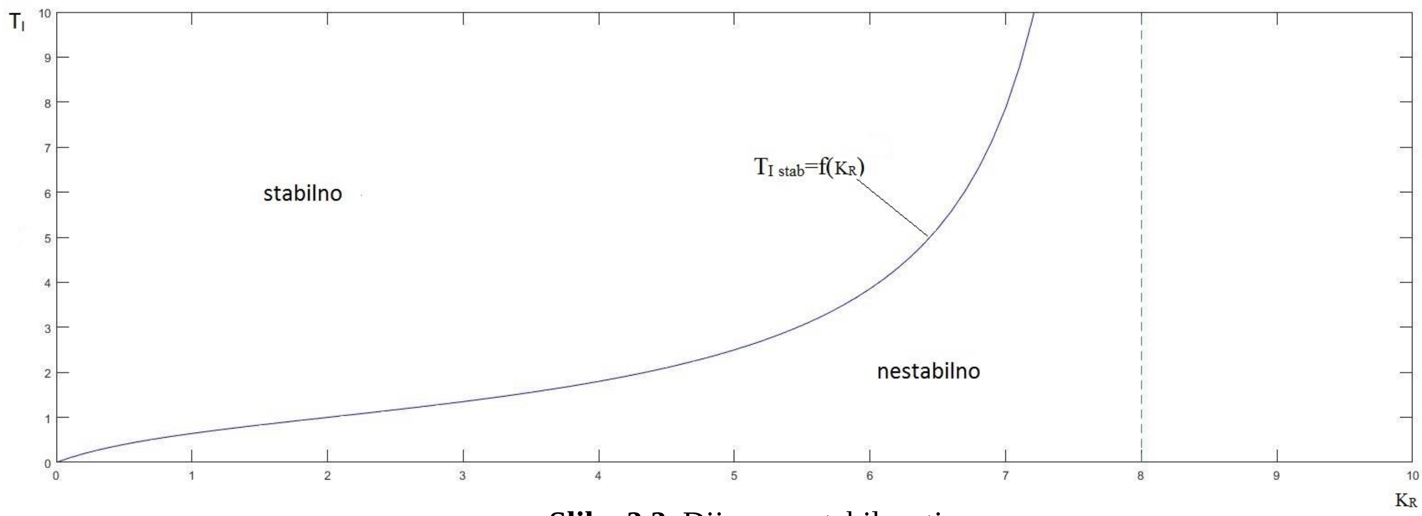
Potrebno je najprije odrediti područje podesivih vrijednosti parametara (K_R, T_I) uz koje je zatvoreni regulacijski krug stabilan.
Iz $G_s(s)$ i $G_R(s)$ dobije se karakteristična jednadžba:

$$\begin{aligned} &1 + G_0(s) = 1 + G_R(s)G_s(s) = 0, \\ &T_I s^4 + 3T_I s^3 + 3T_I s^2 + T_I(1 + K_R)s + K_R = 0. \end{aligned} \tag{3-12}$$

Na temelju algebarskih kriterija stabilnosti (npr. Hurwitzovog kriterija) proizlaze granične krivulje područja stabilnosti određene izrazima:

$$\begin{aligned} &K_R = 0, \\ &T_{Istab} = \frac{9K_r}{(1 + K_r)(8 - K_r)} \end{aligned} \tag{3-13}$$

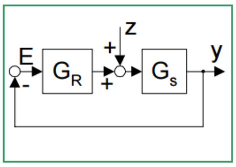
Dijagram stabilnosti, prema izrazima (3-12, 3-13) prikazan je na slici 3.3.:



Slika 3.3. Dijagram stabilnosti

2. korak: Određivanje kvadratične površine regulacijskog odstupanja

Laplaceova transformacija regulacijskog odstupanja $E(s)$, uz pretpostavku $X_R(s) = 0$, glasi:



$$E(s) = -Y(s) = -\frac{G_s(s)}{1+G_0(s)} \cdot Z(s). \tag{3-14}$$

Nakon uvrštenja prijenosnih funkcija $G_s(s)$ i G_R(s) (pretpostavlja se smetnja oblika odskočne funkcije na ulazu u regulacijsku stazu) dobije se:

$$E(s) = \frac{-T_I}{K_R + (1+K_R)T_I s + 3T_I s^2 + 3T_I s^3 + T_I s^4} \tag{3-15}$$

Iz tablice 3.2 i prethodnog izraza dobije se nakon elementarnog računanja:

$$\mathcal{J}_3 = \frac{T_I(8-K_R)}{2K_R\left[(1+K_R)(8-K_R) - \frac{9K_R}{T_I}\right]}. \qquad (\text{Za } K_R = 0 : T_I = \frac{9K_R}{(1+K_R)(8-K_R)}, \mathcal{J}_3 \to \infty) \tag{3-16}$$

<u>3. korak: Određivanje optimalne točke (K_{Ropt},T_{Iopt})</u>

Budući da tražena optimalna točka leži unutar područja stabilnosti, nužno vrijedi u tom području:

$$\frac{\partial \mathcal{J}_3}{\partial K_R} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \mathcal{J}_3}{\partial \mathrm{T_I}} = 0. \tag{3-17}$$

Iz svakog od ovih dvaju uvjeta proizlazi optimalna krivulja $T_I(K_R)$ u (K_R, T_I)- ravnini, čije sjecište, ako postoji i ako se nalazi unutar područja stabilnosti, predstavlja optimalnu točku. Iz jednadžbe $\frac{\partial \mathcal{J}_3}{\partial K_R} = 0$ dobije se optimalna krivulja.

$$T_{Iopt1} = \frac{9K_R(16-K_R)}{(8-K_R)(1+2K_R)}, \tag{3-18}$$

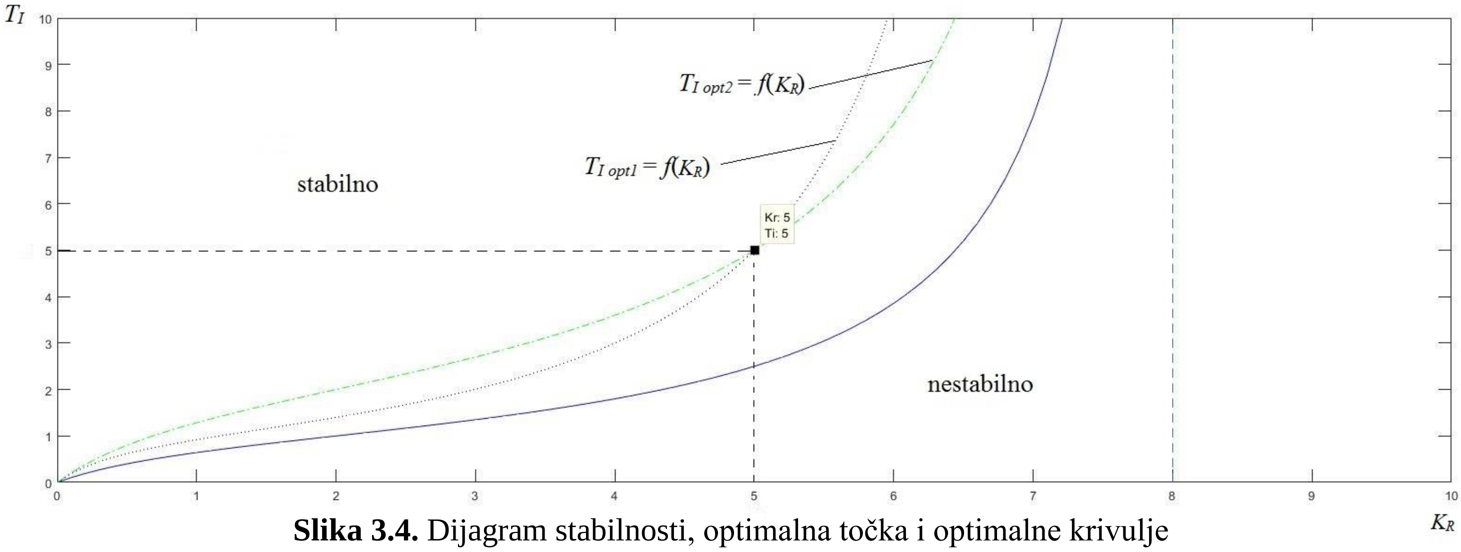
a iz jednadžbe $\frac{\partial \mathcal{J}_3}{\partial T_I} = 0$ dobije se optimalna krivulja:

$$T_{Iopt2} = \frac{18K_R}{(1+K_R)(8-K_R)}. \tag{3-19}$$

Obje optimalne krivulje prolaze kroz ishodište i imaju pol za $K_R = 8$ (kao i dijagram stabilnosti). Izjednačenjem $T_{Iopt1} = T_{Iopt2}$ dobije se tražena optimalna točka s koordinatama:

$$\boxed{K_{Ropt} = 5 \text{ i } T_{Iopt} = 5.} \tag{3-20}$$

Na slici 3.4. prikazane su obje optimalne krivulje i optimalna točka te dijagram stabilnosti:



Slika 3.4. Dijagram stabilnosti, optimalna točka i optimalne krivulje

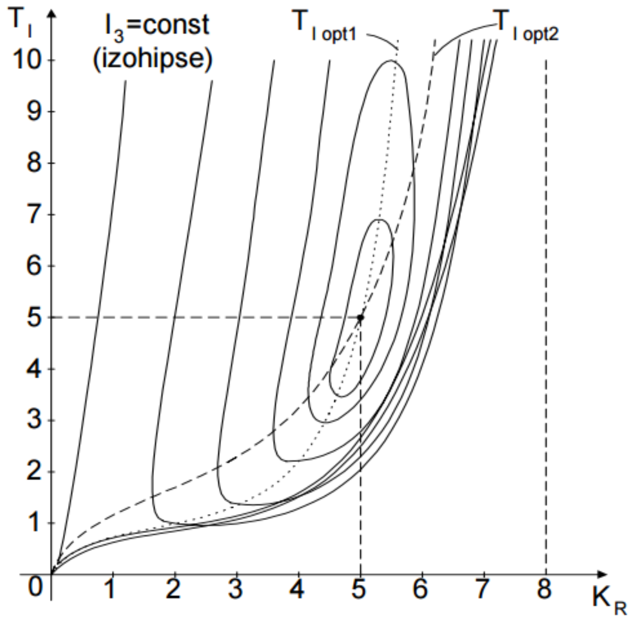
Vidljivo je da se optimalna točka nalazi u području parametara regulatora kojima se postiže stabilno vladanje sustava upravljanja.

<u>4. korak: Crtanje dijagrama kakvoće upravljanja</u>

Promjena parametara sustava upravljanja (npr. parametara procesa) ima za posljedicu promjenu optimalne radne točke. Stoga je često korisno znati izgled $\mathcal{J}_3 = f(K_R, T_I)$ u okolišu odabrane optimalne točke kako bi se mogao procijeniti utjecaj promjene parametara na vladanje sustava upravljanja. U tu svrhu potrebno je odrediti $T_{Ih}(K_R)$ - krivulje na kojima $\mathcal{J}_3$ ima konstantne vrijednosti (izohipse). Jednadžba za određivanje izohipsa dobije se iz izraza (3.16) i glasi:

$$T_{Ih1,2} = K_r \left[\mathcal{J}_3 (K_r + 1) \pm \sqrt{\mathcal{J}_3^2 (K_r + 1)^2 - \frac{18\mathcal{J}_3}{8 - K_r}} \right]. \text{ (Ovdje je } \mathcal{J}_3 \text{ parametar).} \tag{3-21}$$

Uz zadanu vrijednost $\mathcal{J}_3$ i za različite vrijednosti K_R dobije se, zbog dvoznačnosti korijena u prethodnom izrazu $T_{Ih1,2}$, dvije, jedna ili nijedna vrijednost za T_I. Izohipse, prema prethodnom izrazu, predstavljaju zatvorene linije u području parametara regulatora kojima se postiže stabilno vladanje sustava upravljanja. Ako se ucrta nekoliko izohipsa u sliku 3.4. dobije se dijagram kakvoće upravljanja kao na slici 3.5 [2].



Slika 3.5. Dijagram kakvoće upravljanja

Izohipse posjeduju u presjecištu s $T_{Iopt1}(K_R)$ vodoravnu tangentu (zbog $\frac{\partial I_3}{\partial K_r} = 0$), a u presjecištu s T_{opt2I} (K_R) uspravnu tangentu (zbog $\frac{\partial I_3}{\partial K_r} = 0$). Područje na dijagramu kakvoće upravljanja u kojemu su izohipse "gušće koncentrirane" u praksi treba izbjegavati jer je sustav upravljanja u tom području osjetljiviji na promjene parametara. Provedena razmatranja vezana za integralne kriterije, ilustrirana na navedenom primjeru, treba upotpuniti konstatacijom da optimalne vrijednosti parametara regulatora ovise o vrsti i o mjestu djelovanja smetnje u sustavu. Primjerice, dobivene vrijednosti parametara regulatora za analizirani primjer neće biti optimalne za vladanje s obzirom na vodeću vrijednost ili smetnju koja djeluje na izlazu sustava [2].

Uvrštavanjem (3-21) u (3-11) dobije se prijenosna funkcija regulatora:

$$G_R = 5\left(1 + \frac{1}{5s}\right) \quad . \tag{3-22}$$

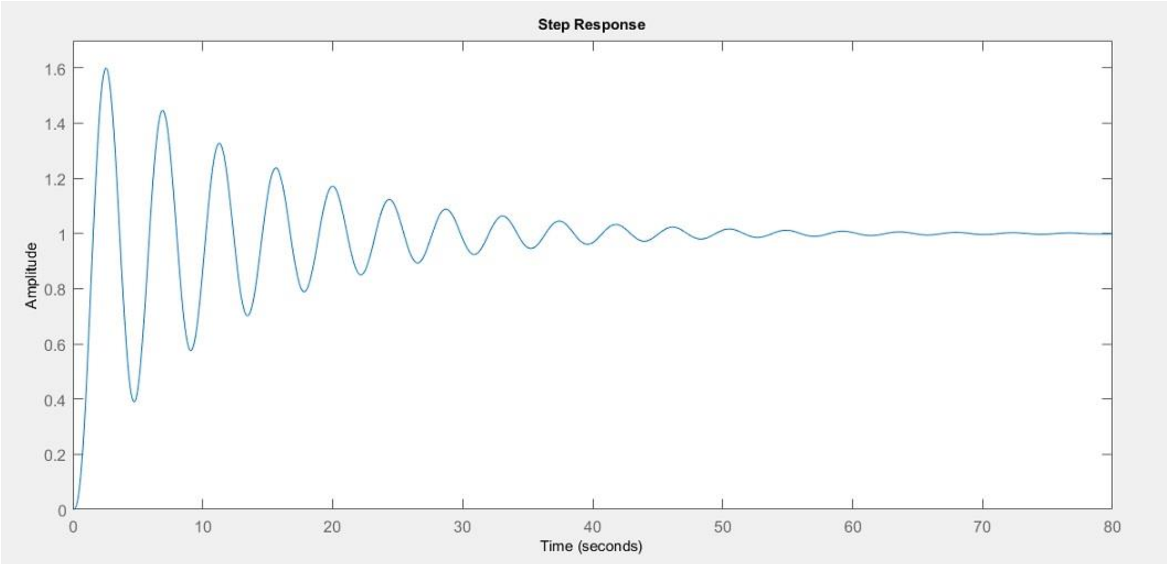
Tada prijenosna funkcija otvorenog sustava glasi:

$$G_O = \frac{25s + 5}{5s^4 + 15s^3 + 15s^2 + 5s} \quad . \tag{3-23}$$

Prijenosna funkcija zatvorenog sustava je:

$$G_X = \frac{G_O}{G_O + 1} = \frac{25s + 5}{5s^4 + 15s^3 + 15s^2 + 30s + 5} \quad . \tag{3-24}$$

Na slici 3.6 prikazana je odziv na step funkciju zatvorenog sustava (3-24).



Slika 3.6 Prijelazna funkcija zatvorenog sustava

Iz slike 3.6 može se vidjeti da je sustav stabilan i da ima oscilacije koje se nakon 80 sekundi stabiliziraju.

4. ZAKLJUČAK

Optimalno upravljanje proces je određivanja putanja upravljačkih veličina i varijabli stanja za dinamički sustav za određeni period vremena kako bi se minimizirao kriterij kakvoće. Postoje različite vrste problema optimalnog upravljanja; ovisno o kriteriju kakvoće, vrsti vremenske domene (kontinuirana, diskretna), prisutnosti određenih ograničenja te o varijablama koje se mogu koristiti. Formulacija problema optimalnog upravljanje zahtijeva matematički model kojima treba upravljati, specifikaciju kriterija kakvoće te specifikaciju svih rubnih uvjeta i stanja i ograničenja koja moraju biti zadovoljena.

Postoje više kriterija i metoda po kojima se mogu izračunati optimalni parametri, a u radu je dan primjer u kojem se koristi kvadratična površina regulacijskog odstupanja. Tom se metodom iz grafičkog prikaza jasno vidi područje u kojem se nalaze optimalni parametri regulatora za dani problem. U ovom radu nije napravljena usporedba sustava kojem je regulator optimiziran po jednom kriteriju kakvoće i sustava koji je optimiziran s nekom drugom metodom postavljanja parametara regulatora (npr. tehnički optimum, simetrični optimum, itd.) da bi se vidjela razlika u radu sustava.

LITERATURA

1. N. Perić, Automatsko upravljanje predavanja, 2004. , dostupno na: http://act.rasip.fer.hr/materijali/17/CCS_SKRIPTA_AU.pdf

2. https://www.ru.ac.za/media/rhodesuniversity/content/mathematics/documents/thirdyear/linearcontrol/AM32LC5%20Optimal%20Ctrl.pdf - …

3. Z. Vukić, Optimalni sustavi upravljanja, Fakultet elektrotehnike i računarstva Zagreb, dostupno na: https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/Optimal_Lecture01.pdf

4. Z. Vukić, Optimalno upravljanje, Fakultet elektrotehnike i računarstva Zagreb, dostupno na: https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/Optimal_Lecture02.pdf

5. http://www.scholarpedia.org/article/Optimal_control

SAŽETAK

Automatsko upravljanje je po definiciji automatsko održavanje željenog stanja nekog procesa ili mijenjanje tog stanja po određenom zakonu. Optimalno upravljanje odnosi se na dinamičke sustave i njihovu optimizaciju tijekom vremena. Optimalno upravljanje proces je određivanja putanja upravljačkih veličina i veličina stanja za dinamički sustav za određeni period vremena kako bi se minimizirao postavljeni kriterij kakvoće.

U ovom završnom radu prikazana je teorijska podloga optimalnog upravljanja, tj. način odabira optimalnih parametara regulatora u nekom procesu prema zadanim kriterijima. Objašnjeni su kriteriji optimizacije za određenu funkciju troška uz odgovarajuća ograničenja, objašnjeni su elementi računa varijacija kao i Pontrjaginov princip minimuma, odnosno maksimuma. Na jednostavnom primjeru prikazan je izračun parametara regulatora za zadani sustav i zadani kriterij.

Ključne riječi: optimalno upravljanje, kriterij kakvoće, funkcija troška, račun varijacija, Pontrjaginov princip

INTRODUCTION TO OPTIMAL CONTROL

ABSTRACT

Automatic control is by definition maintaining desired state of a process or changing that state by a specific law. Optimal control refers to the dynamic systems and their optimization over time. Optimal control is process of determining the path of control values and the size of the state for dynamic system for a certain period of time to minimize the performance index.

So in this final paper, theoretical background of optimal control was shown, ie, the selection of the optimal parameters of regulator in some process in regards to the set criteria. It explains the criteria of optimization for a specific cost function with appropriate restrictions, the elements of the calculus of variations and Pontryagin's minimum/maximum principle were also explained. A simple example shows the calculation of controller parameters for the given system and given criteria.

Key words: optimal control, performance index, cost function, calculus of variations, Pontryagin principle

ŽIVOTOPIS

Matko Teni rođen je 19.8.1993. godine u Osijeku. Nakon završene osnovne škole u Josipovcu, upisuje Elektrotehničku i prometnu školu u Osijeku u kojoj završava razrede s odličnim i vrlo dobrim uspjehom. Po završetku srednje škole upisuje Sveučilišni preddiplomski studij elektrotehnike na Elektrotehničkom fakultetu u Osijeku 2012. godine. Nakon prve godine studija se prebacuje na Sveučilišni preddiplomski studij računarstva.