

# Harmonije svijeta Johannesesa Keplera

---

Šifner, Antonio

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:200:326351>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom](#).

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-31**

Repository / Repozitorij:

[Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek](#)



**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I  
INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA OSIJEK**

**Sveučilišni studij**

**Harmonije svijeta Johannesa Keplera**

**Završni rad**

**Antonio Šifner**

**Osijek, 2022.**

**FERIT**FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA  
I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA **OSIJEK****Obrazac Z1P - Obrazac za ocjenu završnog rada na preddiplomskom sveučilišnom studiju**

Osijek, 11.07.2022.

**Odboru za završne i diplomske ispite****Prijedlog ocjene završnog rada na preddiplomskom sveučilišnom studiju**

<b>Ime i prezime Pristupnika:</b>	Antonio Šifner
<b>Studij, smjer:</b>	Preddiplomski sveučilišni studij Računarstvo
<b>Mat. br. Pristupnika, godina</b>	R4278, 26.07.2018.
<b>OIB Pristupnika:</b>	63762301698
<b>Mentor:</b>	Doc.dr.sc. Marina Skender
<b>Sumentor:</b>	Izv.prof.dr.sc. Tomislav Keser
<b>Sumentor iz tvrtke:</b>	
<b>Naslov završnog rada:</b>	Harmonije svijeta Johannes Keplera
<b>Znanstvena grana rada:</b>	<b>Telekomunikacije i informatika (zn. polje elektrotehnika)</b>
<b>Zadatak završnog rad:</b>	Cilj ovog završnog rada jest prikazati Keplerovo otkriće harmonijskog zakona objavljeno u knjizi Harmonices mundi.
<b>Prijedlog ocjene završnog rada:</b>	Izvrstan (5)
<b>Kratko obrazloženje ocjene prema Kriterijima za ocjenjivanje završnih i diplomskih radova:</b>	Primjena znanja stečenih na fakultetu: 3 bod/boda Postignuti rezultati u odnosu na složenost zadatka: 3 bod/boda Jasnoća pismenog izražavanja: 2 bod/boda Razina samostalnosti: 3 razina
<b>Datum prijedloga ocjene od strane mentora:</b>	11.07.2022.
<b>Datum potvrde ocjene od strane Odbora:</b>	07.09.2022.
<b>Potvrda mentora o predaji konačne verzije rada:</b>	Mentor elektronički potpisao predaju konačne verzije.
	Datum:

**FERIT**FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA  
I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA OSIJEK**IZJAVA O ORIGINALNOSTI RADA**

Osijek, 28.09.2022.

**Ime i prezime studenta:**

Antonio Šifner

**Studij:**

Preddiplomski sveučilišni studij Računarstvo

**Mat. br. studenta, godina upisa:**

R4278, 26.07.2018.

**Turnitin podudaranje [%]:**

2

Ovom izjavom izjavljujem da je rad pod nazivom: **Harmonije svijeta Johannes Keplera**

izrađen pod vodstvom mentora Doc.dr.sc. Marina Skender

i sumentora Izv.prof.dr.sc. Tomislav Keser

moj vlastiti rad i prema mom najboljem znanju ne sadrži prethodno objavljene ili neobjavljene pisane materijale drugih osoba, osim onih koji su izričito priznati navođenjem literature i drugih izvora informacija.

Izjavljujem da je intelektualni sadržaj navedenog rada proizvod mog vlastitog rada, osim u onom dijelu za koji mi je bila potrebna pomoć mentora, sumentora i drugih osoba, a što je izričito navedeno u radu.

Potpis studenta:

**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA OSIJEK**

**IZJAVA**

**o odobrenju za pohranu i objavu ocjenskog rada**

kojom ja Antonio Šifner, OIB: 63762301698, student/ica Fakulteta elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek na studiju Preddiplomski sveučilišni studij Računarstvo, kao autor/ica ocjenskog rada pod naslovom: Harmonije svijeta Johannesesa Keplera,

dajem odobrenje da se, bez naknade, trajno pohrani moj ocjenski rad u javno dostupnom digitalnom repozitoriju ustanove Fakulteta elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek i Sveučilišta te u javnoj internetskoj bazi radova Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu, sukladno obvezi iz odredbe članka 83. stavka 11. *Zakona o znanstvenoj djelatnosti i visokom obrazovanju* (NN 123/03, 198/03, 105/04, 174/04, 02/07, 46/07, 45/09, 63/11, 94/13, 139/13, 101/14, 60/15).

Potvrđujem da je za pohranu dostavljena završna verzija obranjenog i dovršenog ocjenskog rada. Ovom izjavom, kao autor/ica ocjenskog rada dajem odobrenje i da se moj ocjenski rad, bez naknade, trajno javno objavi i besplatno učini dostupnim:

- a) široj javnosti
- b) studentima/icama i djelatnicima/ama ustanove
- c) široj javnosti, ali nakon proteka 6 / 12 / 24 mjeseci (zaokružite odgovarajući broj mjeseci).

*\*U slučaju potrebe dodatnog ograničavanja pristupa Vašem ocjenskom radu, podnosi se obrazloženi zahtjev nadležnom tijelu Ustanove.*

Osijek, 28.09.2022.

(mjesto i datum)

\_\_\_\_\_  
(vlastoručni potpis studenta/ice)

# SADRŽAJ

<b>1. UVOD</b> .....	1
1.1. <i>Zadatak završnog rada</i> .....	1
<b>2. JOHANNES KEPLER</b> .....	2
2.1. <i>Rane godine života i školovanje</i> .....	2
2.2. <i>Graz i Misterij Svemira</i> .....	2
2.3. <i>Johannes Kepler i Tycho Brahe</i> .....	3
2.4. <i>Nova astronomija i druge spoznaje</i> .....	4
2.5. <i>Harmonije svijeta i krajnje godine života</i> .....	5
<b>3. PRVI KEPLEROV ZAKON</b> .....	6
3.1. <i>Otkriće prvog Keplerovog zakona</i> .....	6
3.2. <i>Obrazloženje prvog Keplerovog zakona</i> .....	7
3.3. <i>Analiza planetarnih putanja</i> .....	10
<b>4. DRUGI KEPLEROV ZAKON</b> .....	11
4.1. <i>Otkriće drugog Keplerovog zakona</i> .....	11
4.2. <i>Obrazloženje drugog Keplerovog zakona</i> .....	12
<b>5. HARMONICES MUNDI</b> .....	15
5.1. <i>Uvod u Harmonije svijeta</i> .....	15
5.2. <i>Pravilni poliedri</i> .....	17
5.3. <i>Harmonijske proporcije</i> .....	18
5.4. <i>Astronomska teorija</i> .....	19
5.5. <i>Pravi i ekstremni harmonici</i> .....	20
5.6. <i>Glazba planetarnih gibanja</i> .....	22
5.7. <i>Univerzalni harmonici</i> .....	25
5.8. <i>Četiri glasa Nebeske Harmonije</i> .....	28
5.9. <i>Uzroci ekscentričnosti</i> .....	29
5.10. <i>Obrazloženje trećeg Keplerovog zakona</i> .....	33
<b>6. ZAKLJUČAK</b> .....	34
<b>LITERATURA</b> .....	35
<b>SAŽETAK</b> .....	36
<b>ABSTRACT</b> .....	37
<b>ŽIVOTOPIS</b> .....	38

## **1. UVOD**

Astronom i matematičar Johannes Kepler (1571.-1630.) objavio je svoju epohalnu astronomsku raspravu *Harmonices Mundi*, Harmonije Svijeta, u Linzu, Austrija, 1619. godine. Ovo djelo opisuje korake Keplerovog proširenja teorije tadašnjih filozofa prirode, koja je sugerirala da se muzičke harmonije nalaze u položajima planeta Sunčevog sustava. Kepler je obnovio ovu teoriju predlažući da je sklad proizveden ne samo položajima planeta, već i odnosom između udaljenosti planeta od Sunca i njihovih orbitalnih perioda. Kepler je smatrao, u skladu s filozofskim idejama prisutnim u onodobnoj filozofiji prirode, da planeti povremeno svi zajedno "pjevuju" zajedno u savršenom skladu.

Na početku rada je dan kratak životopis Johannesa Keplera, pregled njegovih najvažnijih otkrića u djelima *Mysterium Cosmographicum* i *Astronomia Nova*, kao i rad s njegovim mentorom, velikim astronomom onog vremena, Tycho Braheom.

Obrađuje se Prvi Keplerov zakon, formulira ga se i jezikom moderne fizike, te se pomoću njega analiziraju putanje planeta i ostalih nebeskih tijela. Obrađuje se i Drugi Keplerov zakon te ga se obrazlaže i jezikom moderne fizike.

Na kraju rada detaljno se prikazuje rasprava *Harmonices Mundi*. Objašnjavaju se osnovni koraci, tj. propozicije, vezani uz muzičku teoriju i omjere stranica pravilnih poliedara, preko kojih je Kepler, uspoređujući ih s opažanjima Tychea Brahea i iz njih izračunatih perihela i afela planeta, u konačnici u vlastitom čuđenju dospio do formulacije Trećeg zakona planetarnog gibanja. Diskutira se i golem značaj ovih Keplerovih otkrića na početke moderne znanosti.

Slijedi Zaključak i Sažetak na hrvatskom i engleskom.

### **1.1. Zadatak završnog rada**

Zadatak ovog završnog rada je primijeniti znanje iz opće fizike i geometrije u prikazu Keplerovog otkrića harmonijskog zakona objavljenom u njegovoj astronomskoj raspravi *Harmonices Mundi*.

## **2. JOHANNES KEPLER**

### **2.1. Rane godine života i školovanje**

Johannes Kepler je rođen 27. prosinca 1571., u Slobodnom carskom gradu Weil der Stadt, na jugu Njemačke kao prvo dijete Heinricha i Katharine Kepler. Keplerove prve godine karakterizirala je disfunkcionalna obitelj, loše zdravlje i međusobno neprijateljstvo između njega i druge školske djece. Kada je imao pet godina, majka ga je odvela na visoko mjesto da vidi svijetli komet. Keplera je tri godine kasnije, njegov otac pozvao da pogleda pomrčinu Mjeseca. Upravo su ta dva događaja posijala sjeme kasnijeg zanimanja za astronomiju kod Keplera. Godine 1577. poslan je u latinsku školu blizu svog doma u Leonbergu. Trebao je do 1583. godine da završi tečaj, koji je prekinut selidbom obitelji u Ellmendingen. Godine 1584. položio je državni ispit, a u listopadu te godine, u dobi od dvanaest godina, prešao je iz latinske škole u sjemenište u Adelbergu. Nakon dvije godine u Adelbergu, u studenom 1586. prešao je na više sjemenište u Maulbronn, gdje je proveo sljedeće tri godine. U ožujku 1594. krenuo je za Graz[1].

### **2.2. Graz i Misterij Svemira**

U Grazu Kepler je počeo predavati krajem svibnja, iako ga podučavanje baš nije zanimalo. Johannes Kepler je smatrao Kopernikovu teoriju ispravnom pri čemu su ga intrigirala tri astronomska pitanja: zašto je postojalo samo šest planeta (Merkur, Venera, Zemlja, Mars, Jupiter i Saturn), zašto su bili na udaljenostima na kojima su bili od Sunca i zašto su se kretali sporije u svojim orbitama što su udaljeniji od Sunca? Odgovore na ta pitanja Kepler je razradio u *Mysterium Cosmographicum* (Kozmografski misterij) kojeg je objavio 1597. U ovom djelu Kepler donosi svoju kozmološku teoriju, utemeljenu na Kopernikovom sustavu, sa dodatkom pet Platonovih tijela (tetraedar, kocka, oktaedar, dodekaedar i ikozaeder) koja diktiraju strukturu svemira te tako kroz geometriju odražavaju Božji plan[1].



### ***2.3. Johannes Kepler i Tycho Brahe***

Kepler je upoznao danskog astronoma i znanstvenika Tychu Brahea u veljači 1600. u Bentaky palači. Obojica je bio zajednički duboki interes za astronomiju. Tycho je bio bogat i već je bio svjetski uspješan, za razliku od Keplera. Tycho je prvenstveno bio opažač, dok je Kepler bio teoretičar. Tycho je želio upotrijebiti Keplerove matematičke vještine kako bi pokazao istinitost svog modela svemira. Kepler je pak želio doći do Tychovih opažanja kako bi provjerio vlastitu verziju Kopernikove teorije i kako bi potvrdio tvrdnje koje ja razradio u *Mysterium Cosmographicum*. Zbog čestih međusobnih sukoba, Kepler je odlučio napustiti palaču i zaputiti se u Prag. Tycho je pristao dati sve od sebe kako bi uvjerio cara Rudolpha da pristane da Kepler radi za njega sljedeće dvije godine, pod uvjetom da Keplerovi poslodavci u Grazu budu zauzvrat spremni i dalje plaćati Keplera. Dok je bio u Grazu, Kepler je promatrao pomrčine Sunca. Kepler se nije smatrao kršćaninom, stoga je ubrzo bio protjeran iz Graza te se 1601. vratio u Prag, gdje je ponovno radio kod Tycha Brahea. Tycho je pak spoznao da planeti nisu nošeni na čvrstim kristalnim kuglama što ga je dovelo do konstrukcije sustava koji je sve bliži stvarnom svijetu. Nakon povratka u Prag Tycho je upoznao Keplera sa carem Svetog Rimskog Carstva Rudolphom II. Tycho je pomogao Kepleru sa svim svojim točnim opažanjima kretanja planeta, dok mu je car Rudolph dao potrebno pokroviteljstvo za daljnji rad. Tycho Brahe je umro 13. listopada 1601., nakon čega Kepler postaje carskim matematičarom. Kepler je dobio potpuni pristup Tychovoj ogromnoj dotad najpreciznijoj zbirci opažanja planeta Marsa, što je zauzvrat dovelo do najvećeg proboja u teorijskoj astronomiji od Kopernika - Keplerovog uspostavljanja dva matematička zakona koji upravljaju gibanjem planeta, izloženih u njegovoj knjizi *Astronomia Nova* (Nova astronomija)[1].

## 2.4. Nova astronomija i druge spoznaje

Bracheovim smrću završilo je jedno razdoblje Keplerovog života u kojemu je napisao djelo *Astronomia Nova*. U djelu *Astronomia Nova* objavio je svoje najvažnije otkriće o eliptičnom kretanju planeta, danas poznat pod nazivom Prvi Keplerov zakon. Kepler je svoje djelo dovršio 1606. godine, no tiskanje i čekanje na carevih 400 florina je trajalo tri godine pa djelo izlazi 1609. godine[1]. U razdoblju od 1600. do 1610. Kepler je ostvario napredak i u optici i astrologiji. U astrologiji je Kepler uveo nove takozvane aspekte kutnog odnosa između planeta: kvintil ( $72^\circ$ ), bikvintil ( $144^\circ$ ) i seskvikvadrat ( $135^\circ$ ).



Slika 1. Portret Johannesa Keplera iz 1610.godine, izvor: [2]

## ***2.5. Harmonije svijeta i krajnje godine života***

*Harmonices Mundi*, Harmonije Svijeta, u djelu u cijelosti napisanom na latinskom, u njemu Kepler raspravlja o harmoniji i podudarnosti u geometrijskim oblicima i fizikalnim pojavama. Posljednji dio djela odnosi se na njegovo otkriće takozvanog "trećeg zakona gibanja planeta". Knjigu je počeo pisati u 1599. godini ali ju je završio 19 godina kasnije u 1618., sa sveukupno pet poglavlja. Za vrijeme dok je pisao *Harmonices Mundi*, Kepler je morao braniti majku na sudu zbog optužbi da je vještica. Kepler je morao uskladiti i svoje odgovornosti za novi sustav utega i mjera s nadzorom tiskanja Rudolfskih tablica, koje sadrže zvjezdani katalog i planetarne tablice. Glavna svrha Rudolfskih tablica bila je omogućiti izračunavanje položaja planeta Sunčevog sustava. Kulminacija Keplerovog životnog djela konačno je došla u rujnu 1627. kada je tiskanje završeno. U listopadu 1630. Kepler je krenuo u Regensburg, gdje se Ferdinand II., car Svetog Rimskog Carstva sastao sa svojim kongresom birača. Na putu za Regensburg Kepler je dobio groznicu, koja se pogoršavala, te je 15. studenog Kepler umro od njezinih posljedica[1].

### **3. PRVI KEPLEROV ZAKON**

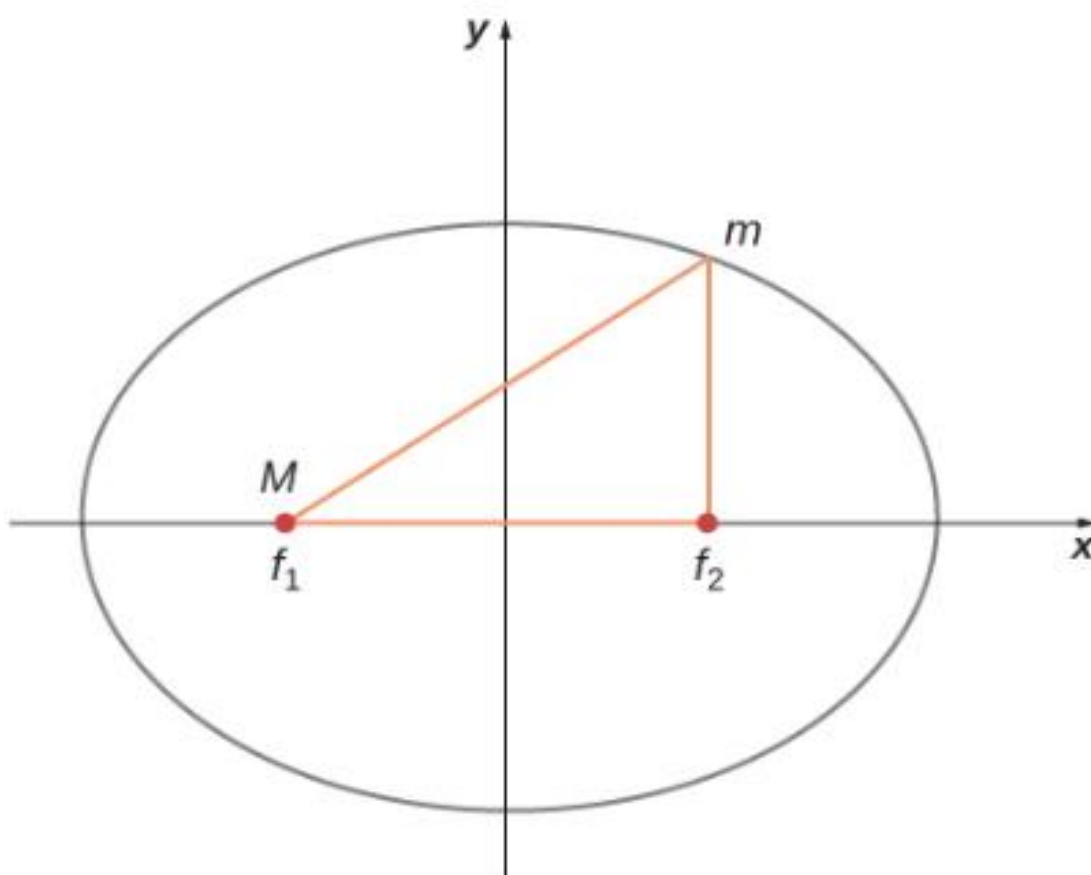
#### **3.1. Otkriće prvog Keplerovog zakona**

Za vrijeme Keplerovog boravka u Pragu Tycho Brahe je Kepleru postavio zadatak razumijevanja orbite planeta Marsa, čije se kretanje problematično uklapa u svemir kako ga je opisivao Aristotel i Ptolomej. Vjeruje se da je dio motivacije za davanje ovog teškog problema Kepleru bilo Braheovo očekivanje da će upravo on sam usavršiti teoriju Sunčevog sustava, temeljenu na geocentričnom modelu. Na temelju Braheovog modela, planeti Merkur, Venera, Mars, Jupiter i Saturn kruže oko Sunca, koje pak kruži oko Zemlje. Kepler je, za razliku od Brahea, vjerovao u kopernikanski model Sunčevog sustava, a to je heliocentrični model, koji je postavio Sunce u njegovo središte. No razlog odstupanja Marsove orbite od Kopernikovog modela je bio kao što je Kopernik pokazao, u tome što su orbite planeta malo spljoštene kružne orbite.

Došavši do spoznaje da su orbite planeta izdužene ili spljoštene kružnice koje su nalikovale Cassinijevim krivuljama ili elipsama, Braheova opažanja kretanja Marsa dovela su Keplera do zaključka da je orbita Marsa najspljoštenija od planeta za čije je podatke Brahe imao precizna opažanja[3].

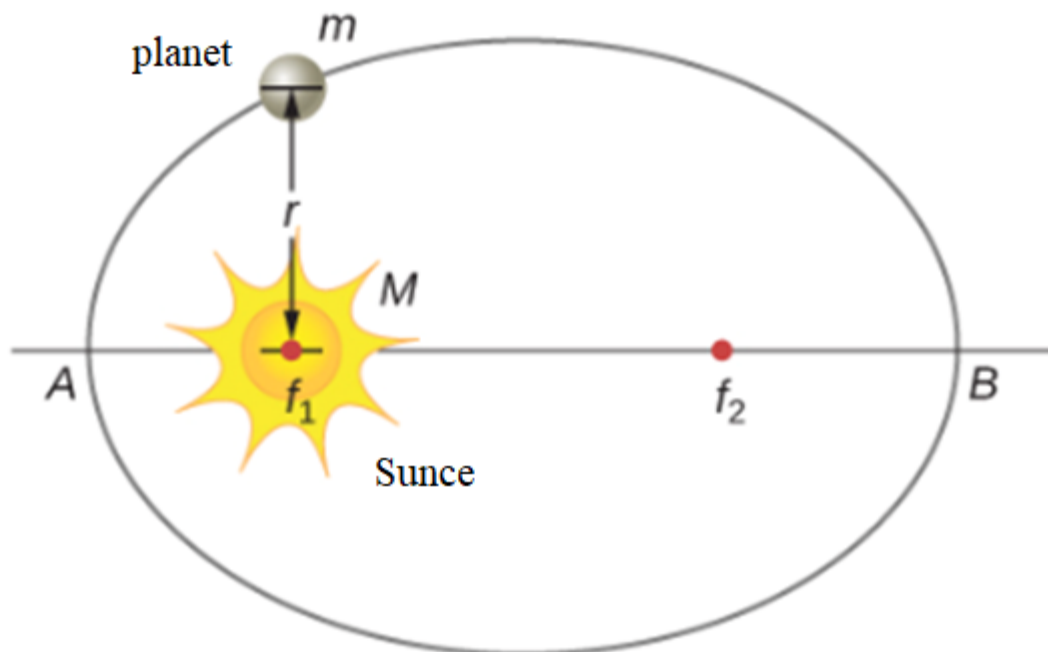
### 3.2. Obrazloženje prvog Keplerovog zakona

Prvi Keplerov zakon kaže da se svaki planet kreće duž elipse, a Sunce se nalazi u jednom od fokusa te elipse. Elipsa je definirana kao skup svih točaka takvih da je zbroj udaljenosti od svake točke do dva fokusa konstantan[4]. Slike 2. i 3. prikazuju elipsu.



Slika 2. Grafički prikaz elipse koji ujedno sugerira način konstrukcije elipse, izvor: [4]

Na slici 2. se vidi da je elipsa krivulja u kojoj je zbroj udaljenosti od točke na krivulji do dva fokusa ( $f_1$  i  $f_2$ ) konstanta. Iz ove definicije se vidi da se elipsa može napraviti na sljedeći način. Stavite pribadaču na svaki fokus, a zatim stavite omču konca oko olovke i pribadača. Pričvršćavanjem konca, pomičite olovku u potpunom krugu. Ako se dva žarišta nalaze na istoj točki, rezultat je kružnica - poseban slučaj elipse.



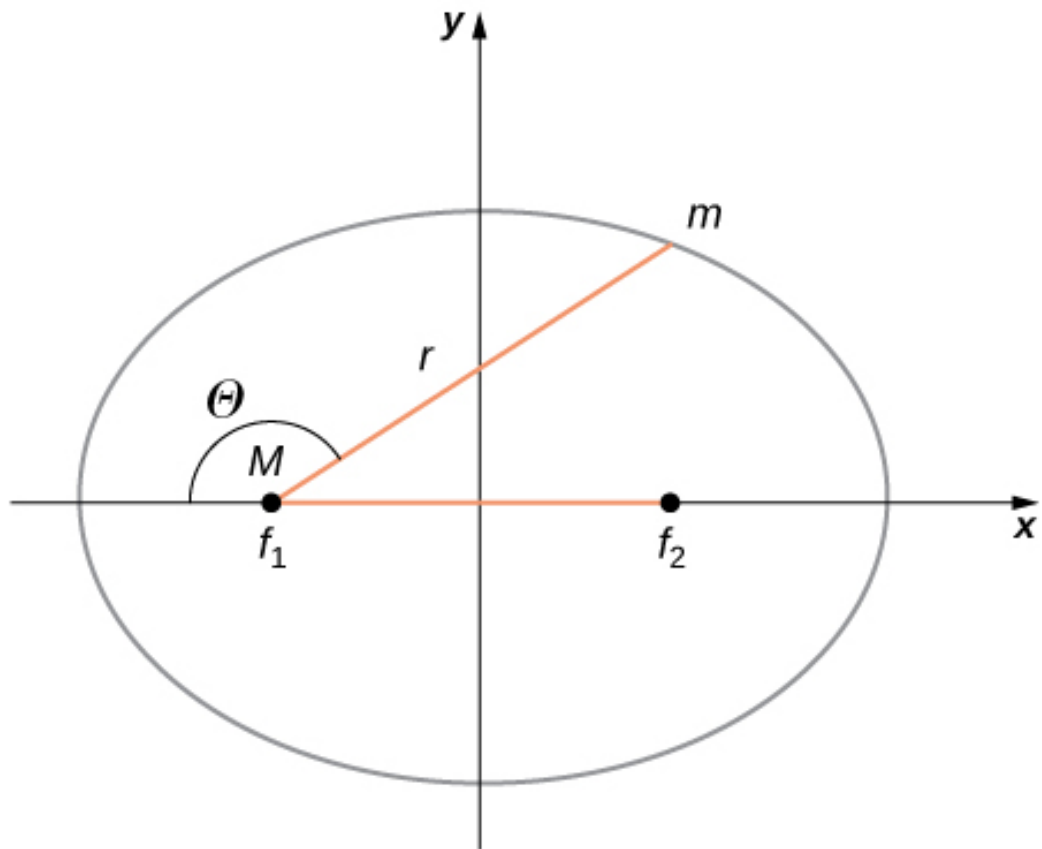
Slika 3. Prikaz eliptične orbite, malo  $m$  je masa planeta, a veliko  $M$  je masa Sunca izvor: [4]

Za eliptičnu orbitu vrijedi da ako je  $m \ll M$ , tada  $m$  slijedi eliptični put s  $M$  u jednom fokusu. Točnije, i  $m$  i  $M$  kreću se u vlastitoj elipsi oko zajedničkog centra mase.

Za eliptične orbite, točka najbližeg približavanja planeta Suncu naziva se perihel. Označena je točkom A na slici 3. Najdalja točka je afel i označena je točkom B na slici. Za Mjesečevu orbitu oko Zemlje, te se točke nazivaju perigej, odnosno apogej. Elipsa ima nekoliko matematičkih oblika, ali svi su specijalan slučaj jednadžbe za čunjosječnice. Postoje četiri različita konusna presjeka, svi su dati jednadžbom:

$$\frac{\alpha}{r} = 1 + e * \cos\theta \quad (1)$$

Varijable  $r$  i  $\theta$  prikazane su na slici 4. u slučaju elipse. Konstanta  $e$  naziva se ekscentricitet, dok je  $a$  velika poluos elipse. Vrijednosti  $a$  i  $e$  određuju koji od četiri konusna presjeka predstavlja putanju satelita[4].



Slika 4. Grafički prikaz jednadžbe (1), izvor: [4]

Na slici 4. se vidi da je  $r$ , udaljenost između planeta i Sunca, a kut mjeren od osi  $x$ , koja je duž glavne osi elipse, je  $\theta$ .

### 3.3. Analiza planetarnih putanja

Većina planeta ima slabo izdužene planetarne putanje (staze), koje je na malom crtežu okom teško razlikovati od kružnice. Tako Zemljina putanja s  $e = 0.001673$  ima veliku poluos  $a = 149.597 \cdot 10^6$  km, malu poluos  $b = 149.577 \cdot 10^6$  km, najmanju udaljenost od Sunca  $r_{min} = 147.1 \cdot 10^6$  km i najveću udaljenost od Sunca  $r_{max} = 152.1 \cdot 10^6$  km[5].

Staze planetoida u prosjeku imaju jače izdužene osi od planetarnih putanja. Kod kometa je šarolikost još i mnogo veća. Neki kometi imaju numerički ekscentricitet  $e$  blizak jedinici.

Razlike se opažaju i u nagibima planetarnih putanja. Plutonova i Merkurova staza najviše se od svih planeta otklanjaju od ravnine Zemljine putanje. Kod Plutona to dovodi do zanimljive posljedice. Naime, crtaju li se staze Neptuna i Plutona projicirane u istu ravninu, čini se da se zbog izduženosti Plutonove staze te dvije putanje sijeku, te da se dva planeta mogu i sudariti. Neptun je zaista u nekim razdobljima dalje od Sunca nego Pluton (na primjer kao od 1980. do 1999.). No kako se ravnine putanja Neptuna i Plutona sijeku pod kutom od kojih  $15^\circ$ , to su staze uvijek daleko jedna od druge. Stoga se oni nikada ne mogu sudariti[5].

Putanje planetoida nagnute su prema ekliptici za više desetaka stupnjeva, ravnine kometa mogu pak sjeći ekliptiku pod bilo kojim kutom. Kada je kut inklinacije veći od  $180^\circ$ , kaže se da je putanja nebeskog tijela i njegova revolucija retrogradna; projicirajući takvu stazu na ravninu ekliptike, vidjelo bi se da se tijelo giba oko Sunca u suprotnom smislu od Zemlje i ostalih planeta. Svi planeti i planetoidi imaju direktnu revoluciju. Fizički različite vrste tijela u Sunčevu sustavu se grupiraju po geometrijskim svojstvima njihovih putanja. Do razlika u vladanju nebeskih tijela došlo je u toku razvoja Sunčeva sustava. Općenito, veličine planetarnih putanja pojedinog člana Sunčeva sustava neprestano se mijenjaju. Promjena tih veličina kod Zemlje mogla je u prošlosti, u dugim geološkim razdobljima, utjecati na klimatske promjene. Vidi se još da se velika poluos, nazvana još i linija apsida, ne podudara s linijom koja povezuje zimsku i ljetnu točku. Razlika se u stvari stalno povećava, jer se linija apsida zakreće u liniji putanje; zakreće se u smjeru gibanja Zemlje, pa Zemlji treba više vremena da ponovo stigne u perihel, nego što joj treba da ponovi svoj položaj prema zvijezdama. Drugim riječima, zvjezdana (siderička) godina kraća je od vremena prolaska Zemlje perihelom. To razdoblje traje  $365 \text{ d } 6 \text{ h } 13 \text{ min } 53 \text{ s} = 365.25964 \text{ d}$  i zove se anomalistička godina[5].



## **4. DRUGI KEPLEROV ZAKON**

### **4.1. Otkriće drugog Keplerovog zakona**

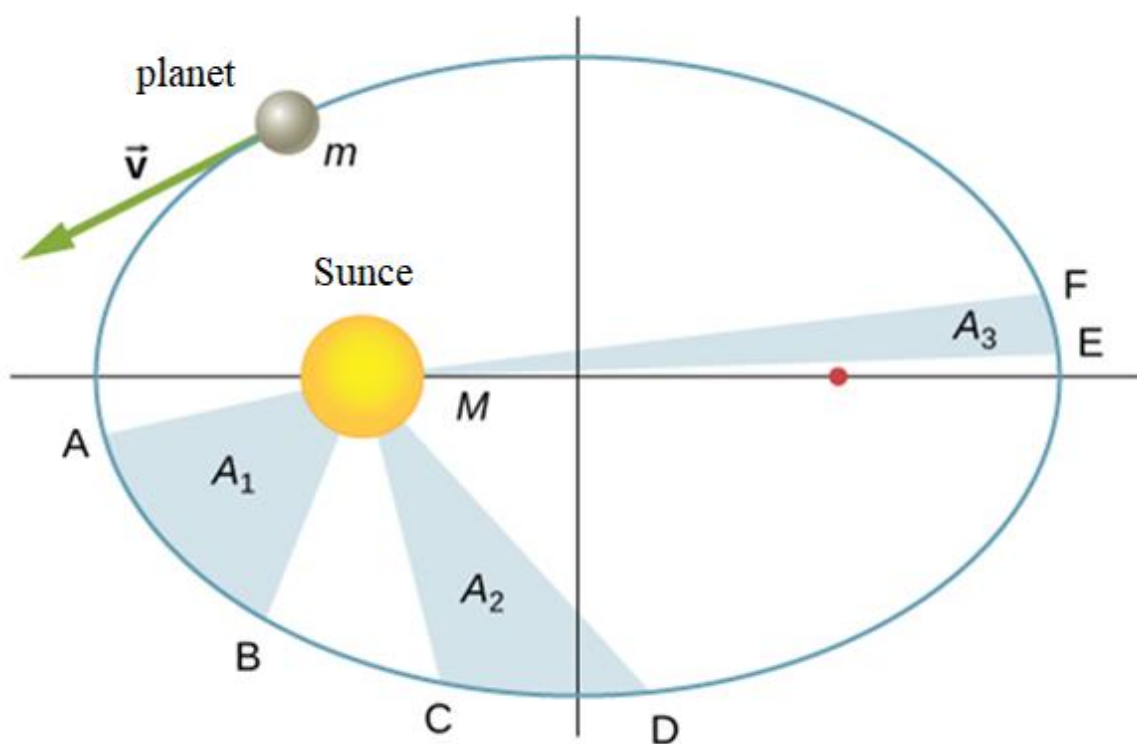
Klaudije Ptolomej (100.godine – 170.godine) bio je matematičar, astronom, astrolog, geograf i glazbeni teoretičar, koji je napisao desetak znanstvenih rasprava, od kojih su tri bile od značaja za kasniju bizantsku, islamsku i zapadnoeuropsku znanost[6].

On je znao da dopuštanje nejednolikog kružnog gibanja može dramatično pojednostaviti model. Stoga je uveo "ekvant", gibanje po kružnici tako da se polarni kut mijenja konstantnom brzinom gledano iz druge točke, različite od središta. Ova pomoćna točka naziva se ekvant. Ptolomejeva teorija opisala je položaj Marsa unutar 8'[7].

Kepler je prvo pokušao preciznije odrediti model kretanja Zemlje koristeći Tychova opažanja Marsa. Ptolomejevim matematičkim alatima, ekscentrom i ekvantom, pokušavajući što bolje uskladiti parametre s opažanjima, otkrio je takozvani Zakon područja koji je danas poznat još i kao Drugi Keplerov zakon. Kepler je shvatio da su se planeti gibali oko Sunca brzinom koja nije konstantna pri tome poštujući Zakon o područjima[7].

## 4.2. Obrazloženje drugog Keplerovog zakona

Keplerov drugi zakon kaže da planet prebriše jednaka područja u jednakim vremenima, odnosno da je površina podijeljena vremenom, nazvana površinska brzina, konstantna. Na slici 5. su shematski prikazana tri pomaka planeta za koje je planetu bio potreban jednak vremenski interval. U prvom slučaju planet se pomakne iz položaja A u B i pri tome prebriše područje  $A_1$ . U drugom slučaju planet se pomakne iz položaja C u D i pri tome prebriše područje  $A_2$ . U trećem slučaju planet se pomakne iz položaja E u F i pri tome prebriše područje  $A_3$ . Ova tri područja su jednaka.



Slika 5. Prikaz drugog Keplerovog zakona, izvor: [4]

Na slici 5. prikazane zasjenjene regije imaju jednake površine te predstavljaju površinu koju planet prebriše gibajući se u jednakom vremenskom intervalu.

Uspoređujući područja na slici i udaljenost prijeđenu duž elipse, može se vidjeti da kako bi područja bila jednaka, planet mora ubrzavati kako se približava Suncu i usporavati dok se udaljava. Ovo ponašanje je potpuno u skladu s danas poznatom jednadžbom očuvanja energije prikazanom jednadžbom (2), te je drugi Keplerov zakon zapravo posljedica očuvanja kutnog momenta. U jednadžbi (2)  $m$  predstavlja masu planeta, dok  $M$  predstavlja masu zvijezde,  $v_1$  i  $v_2$  su brzine planeta pri udaljenostima  $r_1$  i  $r_2$  od zvijezde, a  $G$  predstavlja univerzalnu gravitacijsku konstantu[4].

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{r_2} \quad (2)$$

Definicija kutnog momenta je  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ . Za slučaj gibanja u orbiti,  $\vec{L}$  je kutni moment planeta oko Sunca,  $\vec{r}$  je vektor položaja planeta mjereno od Sunca, a  $\vec{p} = m\vec{v}$  je trenutni linearni zamah u bilo kojoj točki orbite. Budući da se planet kreće duž elipse,  $\vec{p}$  je uvijek tangencijalan na elipsu.

Linearni zamah može se razdvojiti u dvije komponente: radijalnu komponentu  $\vec{p}_{rad}$  duž linije prema Suncu i komponentu  $\vec{p}_{perp}$  okomitu na  $\vec{r}$ . Unakrsni umnožak za kutni moment se tada može zapisati kao:

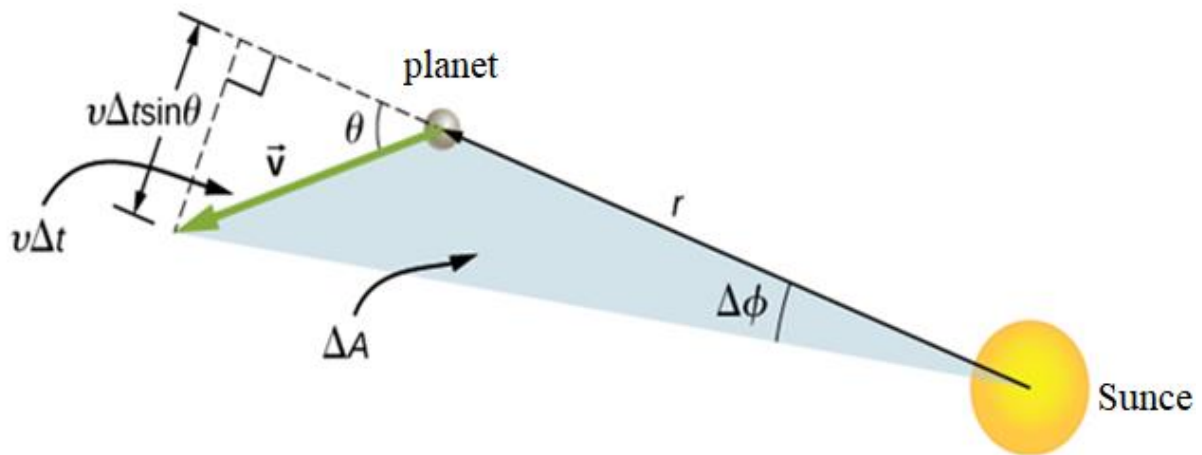
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (\vec{p}_{rad} + \vec{p}_{perp}) = \vec{r} \times \vec{p}_{rad} + \vec{r} \times \vec{p}_{perp} \quad (3)$$

Prvi član s desne strane je nula jer je  $\vec{r}$  paralelan s  $\vec{p}_{rad}$ , a u drugom je članu  $\vec{r}$  okomit na  $\vec{p}_{perp}$ , pa se veličina vektorskog produkta smanjuje na  $L = rp_{perp} = rmv_{perp}$ . Kutni moment ne ovisi o  $p_{rad}$ . Budući da je gravitacijska sila samo u radijalnom smjeru, ona može promijeniti samo  $p_{rad}$ , a ne  $p_{perp}$ ; dakle, kutni moment mora ostati konstantan[4].

Ako se pogleda slika 6. malu trokutastu površinu  $\Delta A$  planet prebriše u vremenu  $\Delta t$ . Brzina je duž putanje i čini kut  $\theta$  s radijalnim smjerom. Stoga je okomita brzina dana s  $v_{perp} = v * \sin\theta$ . Planet se pomiče na udaljenosti  $\Delta s = v\Delta t \sin\theta$  projiciranom duž smjera okomitog na  $r$ . Budući da je površina trokuta polovica osnovice ( $r$ ) puta visine ( $\Delta s$ ), za mali pomak, površina je dana

s  $\Delta A = 12r\Delta s\Delta A$ . Zamjenom  $\Delta s$ , množenjem s  $m$  u brojniku i nazivniku i preuređivanjem, dobiva se:

$$\Delta A = \frac{1}{2}r\Delta s = \frac{1}{2}r(v\Delta t\sin\theta) = \frac{1}{2m}r(mv\sin\theta\Delta t) = \frac{1}{2m}r(mv_{\text{perp}}\Delta t) = \frac{L}{2m}\Delta t \quad (4)$$



Slika 6. Prikaz površinske brzine, izvor: [4]

Površinska je brzina stopa promjene površine s vremenom, koja se izračuna prema jednadžbi:

$$\text{površinska brzina} = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{L}{2m} \quad (5)$$

Budući da je kutni moment konstantan, površinska brzina također mora biti konstantna. To je upravo drugi Keplerov zakon[4].

## 5. *HARMONICES MUNDI*

### 5.1. *Uvod u Harmonije svijeta*

Pet knjiga o Harmoniji svijeta, koje je Kepler objavio 1619., obrađivale su sklad u njegovim matematičkim, glazbenim, astronomskim i astrološkim aspektima, što je kulminiralo analizom harmonije u kretanju planeta[8]. Tretiranje svih ovih raznolikih polja znanja pod jednim konceptom "harmonije" bilo je ne samo dopušteno nego i nužno, po Keplerovom mišljenju, jer svi ti oblici harmonije imaju istu matematičku osnovu. Ta se osnova mogla naći u geometrijskim odnosima između fizičkih veličina, a ne u čisto numeričkim odnosima između cijelih brojeva na kojima se temeljila pitagorejska harmonijska teorija. Da bi odnos bio harmoničan prema Kepleru, njegova ljepota mora biti percipirana od strane duše, koja može biti ljudska ili drugačija. Planetarni sustav, kako ga je otkrio Kopernik, izražava harmoniju koja je stvorena da se percipira u svom središtu, od strane duše na Suncu. Astronomija je tako postala najpreciznije i najobjektivnije polje za harmonijska otkrića. U predgovoru 5. knjige *Harmonices Mundi*, Kepler se prisjetio svog ranog uvjerenja da se konstrukcija nebesa najbolje može razumjeti iz geometrijskih i harmonijskih principa. Njegov vlastiti rad na astronomskoj harmoniji tako je doveo do ostvarenja onoga što Ptolomej nije mogao ostvariti. Uvjerenje da je svoju inspiraciju dijelio s tako velikim znanstvenikom ojačalo je Keplerovu odlučnost da ispravno učini ono što Ptolomej nije uspio dovršiti. Prve dvije knjige *Harmonices Mundi* bavile su se geometrijskim simetrijama koje su, po Keplerovom mišljenju, dovele do svih manifestacija harmonije[8]. Ističući dijelove ovog materijala koji su matematički originalni i ukazujući na relevantnost sve naizgled čiste matematike za Keplerovu stvarnu brigu, a to je korištenje harmonijskih principa kao pomoćnog sredstva u razumijevanju prirodnog svijeta. Sve je to bilo zamišljeno kao pomoć u shvaćanju harmonija koje se nalaze u prirodi. Knjiga 3 djela *Harmonices Mundi* bavila se specifično glazbenom harmonijom, temom o kojoj je Kepler znao mnogo više nego što se obično shvaćalo. Kepler je nedavni razvoj polifonih teorija harmonije rangirao uz svoja astronomska otkrića kao razlog zašto u antici nije bilo moguće dati pravi prikaz harmonija na nebu. Kepler je otkrio da je sve to bilo uključeno u stvaranje nebesa i ne možemo početi cijeniti taj dizajn kao on, a da ih ne naučimo prepoznati. U svojoj knjizi 4, Kepler se okrenuo astrologiji. Odbacio je dobar dio tradicionalne astrologije, ali je ipak vjerovao u njezina temeljna načela. On ih je izveo iz istih harmonijskih razmatranja koja su u osnovi glazbe i astronomije. Napisao je nekoliko knjižica kako bi objasnio kako su planetarni aspekti utjecali na vrijeme, karakter ljudi rođenih dok su planeti bili u aspektu, te tijekom svijeta. Ova teorija nije imala glazbeni sadržaj, ali za Keplera je ipak bila harmonijska teorija. Pravilni

poliedri utjelovljuju geometrijske principe apstraktne harmonije, a on ih je već u 2. knjizi raspravljao kao primjene tih principa. Njihova pojava na nebesima ilustrirala je sveobuhvatnost harmonijskih razmjera u stvorenom svijetu. U *Mysterium Cosmographicum* Kepler zapravo nije bio u stanju razriješiti neslaganja između proporcija koje implicira teorija poliedara, s jedne strane, i relativnih udaljenosti planeta prema astronomiji, s druge strane. Nadao se da će odgovarajuća rekonstrukcija heliocentrične astronomije razjasniti ove probleme. Od tada je sam izvršio rekonstrukciju; pokazalo se da je mnogo temeljitije nego što je mogao zamisliti prije. Ipak, nije postigla željene udaljenosti, udaljenosti koje su podrazumijevale ugniježdene poliedre među planetarnim sferama. U skladu s tim, on je blizu početka knjige 5 sazeo stanje umjetnosti u planetarnoj astronomiji – naime, svoje vlastite teorije – a zatim je pokušao pokazati da prividna kretanja planeta, kako ih se percipira sa Sunca, utjelovljuju sve proporcije, svu raznolikost, sva harmonijska sredstva koja se koriste za prenošenje emocionalnih nijansi u suvremenoj polifonoj glazbi. Odnos period-distanca koji je otkrio dok je završio svoju *Harmonices Mundi* omogućio mu je da ode mnogo dalje. Godine 1618. Kepler je otkrio ovaj treći ili harmonijski zakon. Iznio je to u trećem poglavlju knjige 5, ali sa samo nekoliko ranih i nespretnih posljedica[8]. Tada nije odlučio je li to bila samo aproksimacija, koja se primjenjuje na orbite koje su bile gotovo kružne, ili temeljni rezultat koji se primjenjuje na sve orbite. U nekoliko mjeseci, zacijelo vrlo intenzivnog rada, tijekom ljeta i jeseni 1618., uspio je kombinirati novo otkriće s nekim svojim drugim rezultatima, učinkovito ga koristeći na kraju knjige 5 za izračunavanje relativnih udaljenosti planete od Sunca i pokazujući odatle da su čak i ekscentriciteti pojedinačnih planetarnih orbita bili harmonijski ograničeni da budu ono što jesu[8]. Harmonijski zakon povezo je različite orbite i priveo knjigu zadovoljavajućem kraju. Pokazalo se da je cijeli planetarni sustav lijepo konstruiran koliko je to moguće. Kepler je opravdao nekoliko preostalih disonancija ne na estetskim osnovama, već time što je pokazao da ih logično povlači drugi i temeljniji harmoniji u svijetu. Važni dijelovi teorije, ili raspon ugađanja u univerzalnim harmonijama, koji je omogućio da se harmonijske konfiguracije pojavljuju mnogo češće, i vrlo poželjna prisutnost ekstremnih gibanja u tim akordima, što je produžilo trajanje tih akorda bile su zanemarene. Iznad svega, uloge Venere i Zemlje, "planeta koji mijenjaju vrstu harmonije" nisu više cijenjene. Cjelokupni dizajn nije imao smisla ako su te uloge zanemarene, jer su neke od stvarnih promatranih proporcija bile strašno neugodne. Kepler je objasnio takve intervale pokazujući kako su proizašli iz potrebe za izražavanjem harmonija svih mogućih tipova na nebesima. Keplerovo oživljavanje drevne teorije nebeskog sklada došlo je upravo u vrijeme kada se preciznije znanje o planetarnim udaljenostima i kretanjima činilo gotovo nemogućim za održavanje stare teorije. *Harmonices Mundi* bio je

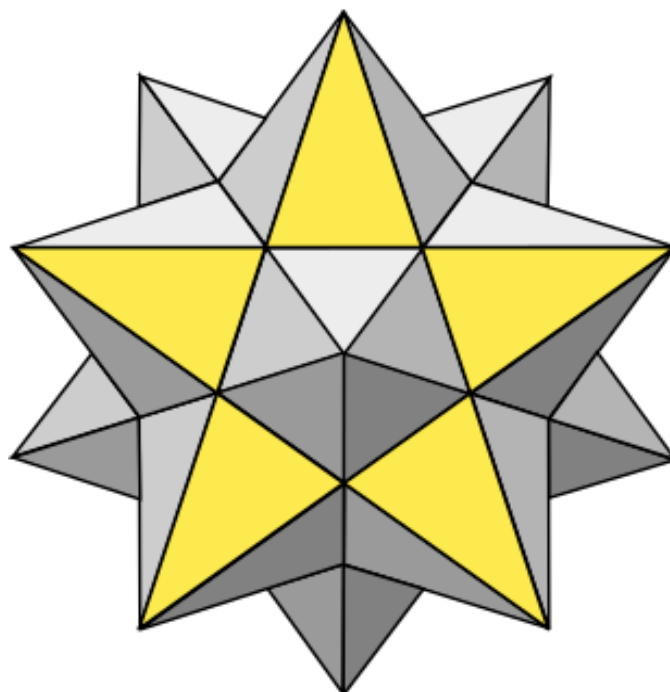
posljednji procvat te teorije, fantastično detaljan pokušaj da se izvorna ideja proširi kako bi se prilagodila Nova astronomija koju je sam Kepler stvorio[8].

## ***5.2. Pravilni poliedri***

Svaki planet mijenja svoju udaljenost od Sunca, a među najvećim, najmanjim i možda srednjim udaljenostima od planeta ima mnogo više proporcija nego što poliedarska hipoteza objašnjava. U vrijeme kada piše *Harmonices Mundi*, Kepler samouvjereno vjeruje da geometrijske harmonije - harmonijski omjeri koji dovode do glazbenih harmonija - daju temeljnu teoriju, omjer, za sve te proporcije. Pet pravilnih poliedara određuje 6 planetarnih sfera. Kepler vjeruje da pravilni poliedri objašnjavaju broj i približne veličine planetarnih orbita. Stoga otvara knjigu 5 sa sažimanjima o relevantnim karakteristikama pravilnih poliedara. On klasificira pravilne poliedre na primarne i sekundarne figure. Primarne figure su one s čvrstim kutovima formiranim od tri linije, a to su kocka, tetraedar i dodekaedar. Kocka je došla između Saturna i Jupitera, tetraedar između Jupitera i Marsa, a dodekaedar između Marsa i Zemlje. Sekundarne figure su one koje imaju čvrste kutove formirane od više od tri linije, a to su oktaedar i ikozaedar[8].

### 5.3. Harmonijske proporcije

U drugom poglavlju knjige 5, Kepler nabraja sve proporcije koje se mogu sustavno formirati iz pravilnih poliedara. Svaka figura dobro je opremljena omjerima: omjerima između brojeva bridova, lica, ravnih kutova i čvrstih kutova; omjeri između broja rubova po licu i po čvrstom kutu, omjeri između duljine ruba i polumjera sfere koju opisuje. Najvažniji od ovih omjera je "udio kugli", omjer između polumjera upisane kugle i polumjera opisane kugle. Zatim Kepler odlučuje, na apstraktnim osnovama, koji od pravilnih poliedra najviše odgovara svakom od harmonijskih proporcija. On se koncentrira na proporcije sfera, dodjeljujući svaku od važnih harmonijskih proporcija poliedarskom braku čiji je udio sfera najbliži tom harmonijskom omjeru. Svrha knjige 5 je pokazati da u poznatim činjenicama astronomije postoji harmonijska logika. Kepler ne predlaže dizajn za nepoznati planetarni sustav, već radije pronalazi dizajn onog u kojem živi. Uz pet pravilnih poliedara, Kepler uvodi šesti, za koji se općenito pripisuje zasluga za njegovo otkriće. On je čvrsta zvjezdana figura ili "jež", prikazana na slici 7., koja je formirana proširenjem dvanaest peterokutnih strana dodekaedra u petokrake zvijezde.[8]



Slika 7. Čvrsta zvjezdana figura, izvor: [9]



#### **5.4. Astronomska teorija**

U trećem poglavlju knjige 5 Kepler daje "sažetak astronomske teorije potrebne za promišljanje nebeskih harmonija". Potrebni astronomski rezultati navedeni su u trinaest tvrdnji. One su bitne za razumijevanje harmonijskih istraživanja koja su uslijedila[8]:

1. Svi planeti se kreću oko Sunca, osim Mjeseca, koji se kreće oko Zemlje.
2. Orbite su ekscentrične u odnosu na Sunce, tako da svaki planet ima najveću udaljenost i najmanju udaljenost, te prolazi kroz sve međuprostorne udaljenosti.
3. Broj planeta, šest, određen je s pet pravilnih poliedra, kao što je Kepler prvi pokazao u svom djelu *Mysterium Cosmographicum*.
4. Proporcije orbita približno su određene interpolacijom poliedara između njih.
5. Nejednaka kašnjenja planeta u jednakim dijelovima ekscentra slijede omjer njegovih udaljenosti od Sunca, izvora gibanja.
6. Među jednakim istinskim kretanjima, ono što je najudaljenije od središta svijeta, činilo bi se najmanjim ako se gleda iz tog središta (Sunca).
7. Pokreti viđeni sa Zemlje, a ne sa Sunca, ne igraju nikakvu ulogu u nebeskim harmonijama. Oni ne mogu, jer Zemlja nije izvor kretanja planeta.
8. Najizvjesnije je i najpreciznije da omjer između vremena perioda bilo kojih dvaju planeta je jednak jednom i pol udjelu srednjih udaljenosti samih orbita, pri čemu treba voditi računa da aritmetička sredina između dva promjera eliptične orbite mora biti malo manja od duljeg promjera.
9. Da bismo izmjerili pravo dnevno kretanje planeta, trebali bismo pomnožiti njegov pravi dnevni luk s njegovom srednjom udaljenosti od Sunca.
10. Prividna dnevna kretanja proporcionalna su stvarnim dnevnim gibanjima podijeljenim s odgovarajućim udaljenostima od Sunca.
11. Apsidalna udaljenost planeta jednaka je njegovoj srednjoj udaljenosti pomnoženoj s omjerom srednjeg prividnog gibanja planeta i srednjeg proporcionalnog između tog srednjeg gibanja i apsidalnog gibanja.

Ako koristimo  $M$  i  $R$  za predstavljanje prividnog kretanja i udaljenosti planeta u bilo kojoj apsidi, a  $\bar{M}$  i  $\bar{R}$  za predstavljanje njegovog srednjeg prividnog kretanja i srednje udaljenosti, onda se ovaj prijedlog može zapisati prema jednadžbi (6):

$$\frac{R}{\bar{R}} = \frac{\bar{M}}{\sqrt{M * \bar{M}}}$$

$$\text{iz čega se dobije } \frac{R^2}{\bar{R}^2} = \frac{\bar{M}}{M} \quad (6)$$

što jednostavno znači da su prividna gibanja na apsidama inverzna kvadratu udaljenosti od Sunca.

12. Srednje prividno gibanje planeta manje je od geometrijske sredine dvaju ekstremnih prividnih gibanja planeta, upola manje koliko je ta geometrijska sredina manja od aritmetičke sredine dvaju ekstremnih gibanja.

13. Omjer prividnog perihelijskog gibanja gornjeg planeta u odnosu na prividno afelijsko gibanje inferiornog planeta manji je od inverzne i snage udjela odgovarajućih udaljenosti. Štoviše, sve dok je kombinacija omjera ekstremne udaljenosti i srednje udaljenosti za dva planeta manja od kvadratnog korijena njihovog omjera srednjih udaljenosti, udio njihovih ekstremnih gibanja veći je od udjela njihovih ekstremnih udaljenosti[8].

### ***5.5. Pravi i ekstremni harmonici***

Kepler započinje svoju raspravu o harmonijama u gibanju planeta objašnjavajući kako je shvatio gdje takve harmonije treba tražiti. Nekoliko brojeva je prihvatljivo: udaljenost planeta od Sunca, njegovo periodično vrijeme, njegovi dnevni ekscentrični lukovi, njegova dnevna kašnjenja (*morae*) u ekscentričnim lukovima, njegov prividni dnevni luk, ili kutno gibanje, što ga vidi kao promatrač na Suncu i njegov pravi dnevni put, mjereno duž puta, a ne lukom kružnice. Kepler pretpostavlja da se harmonije trebaju opažati vizualno. Proračuni potrebni za određivanje dnevnih duljina puta planeta – odnosno njihovih brzina – su predugački da bi ih izvršila bilo kakva vrsta prirodnog nagona za koje bi se moglo misliti da opažaju gibanje planeta. Kepler je zaključio da nebeske harmonije treba tražiti u prividnim lukovima gibanja planeta, kako bi se vidjeli sa Sunca, koje je jedino istaknuto mjesto u Sunčevom sustavu i izvor

kretanja planeta. On konstruirao tablicu prividnih gibanja koja će poslužiti kao osnova za ostatak *Harmonices Mundi*.

Tablica 1. Prividna ekstremna gibanja planeta prema Kepleru, izvor:[8]

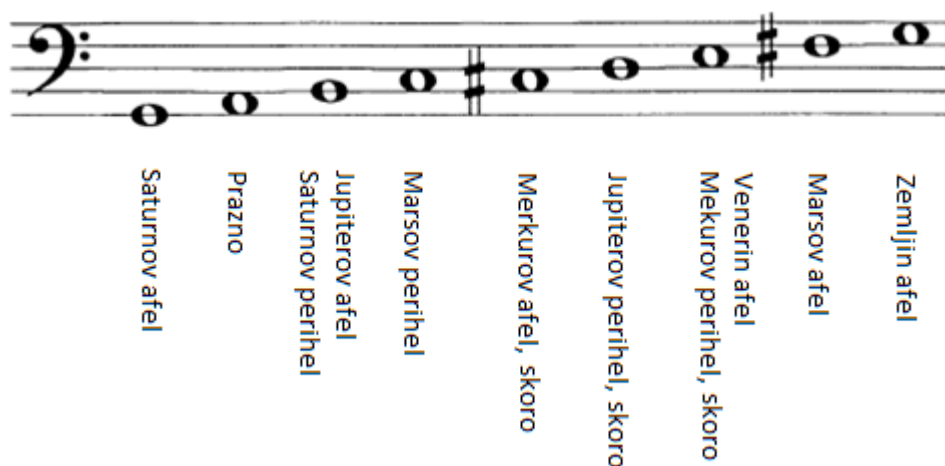
1 Harmonici uparenih planeta		3 Prividna dnevna gibanja		5 Najbliži pravi harmonici pojedinih planeta		
Razdvojeni	Spojani	Planet, apsida	Minute, sekunde	Minute, sekunde		
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	Saturn A	1'46"	1'48"	$\frac{1}{8}$	Dur terca
		Saturn B	2'15"	2'15"		
$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{24}$	Jupiter A	4'30"	4'35"	$\frac{5}{8}$	Mol terca
		Jupiter B	5'30"	5'30"		
$\frac{5}{12}$	$\frac{2}{3}$	Mars A	26'14"	25'21"	$\frac{2}{3}$	Kvinta
		Mars P	38' 1"	38' 1"		
$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	Zemlja A	57' 3"	57'28"	$\frac{15}{16}$	Poluton
		Zemlja P	61'18"	61'18"		
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	Venera A	94'50"	94'50"	$\frac{24}{25}$	Kvarta
		Venera P	97'37"	98'47"		
		Merkur A	164' 0"	164' 0"	$\frac{5}{12}$	Oktava+ mol terca
		Merkur P	384' 0"	394' 0"		

U tablici 1. prividna dnevna gibanja u stupcu 4 su opažena. Kako bi dobio harmonijska gibanja Kepler je podesio jedno od ekstremnih gibanja za svaki planet, perihel za gibanja inferiornih planeta, afelijsko gibanje za Zemlju i superiorne planete, tako da je pravi omjer za planet točno jednak danom intervalu . On prikazuje ove prilagođene kretnje u stupcu 5 kako bi pokazao koliko su stvarne pravilne proporcije gotovo harmonične. Kepler se okreće ekstremnim harmonijama uočenim među parovima susjednih planeta, onima koje daju spojene i razdvojene proporcije njihovih prividnih gibanja. Grubi rezultati se pojavljuju u krajnjim lijevim stupcima tablice 1. te naglašavaju nesavršenost s kojom se promatraju te harmonije. Kepler ističe četvero na koje se obraća pozornost:

1. Najmanje točna od ekstremnih harmonija događa se tamo gdje je poliedralna hipoteza najtočnija, u razdvajajući intervalu između Jupitera i Marsa.
2. Mali pravi udio Venere pojavljuje se na nekoliko mjesta, iz nekog razloga, kao pogreška u promatranim ekstremnim proporcijama.
3. Najbolje harmonije među superiornim planetima su između spajajućih gibanja, dok se čini da su najbolje harmonije među inferiornim planetima između onih u istoj kvarti.
4. Afelijalna gibanja Saturna i Zemlje čine gotovo točno pet oktava[8].

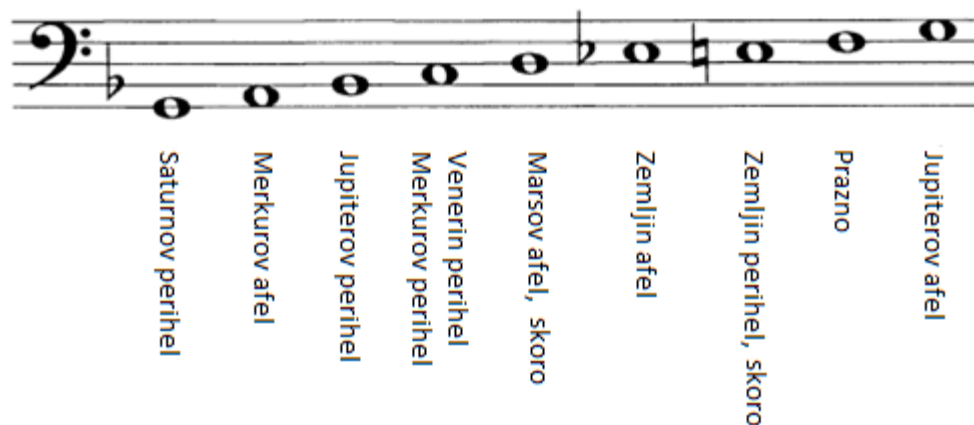
## 5.6. Glazba planetarnih gibanja

Harmonija u kretanju jednog planeta - harmonijski omjer između njegovog afela i perihela gibanja - ne mogu se uočiti ni u jednom trenutku, jednostavno zato što planet ne može istovremeno biti i u afelu i u perihelu. Harmonije između različitih planeta, s druge strane, mogu se uočiti u onim (rijetkim) trenucima kada je jedan planet u afelu, dok je njegov vanjski susjed u perihelu. Harmonija u kretanju jednog planeta je kao pjesma za jedan glas, dok je harmonija među različitim planetima polifona. Kepler se prvo okreće sekvencijalnim, ili melodijskim, harmonijama. On zna da note koje sviraju ekstremni pokreti pojedinih planeta zvuče ugodno zajedno u parovima. Nesretne kombinacije suglasničkih intervala proizvode disonanciju, ako sve note nisu usklađene u jednu ljestvicu. Kepler se u 5. poglavlju okreće slaganju između prividnih gibanja planeta i nota razmjera. Kako bi usporedio tragove različitih planeta, od kojih su se neki kretali mnogo brže od drugih, on dijeli njihova ekstremna gibanja s dva onoliko puta koliko je potrebno da ih učini usporedivim. Glazbeno, on pomiče visoke note prema dolje za oktave sve dok ne budu unutar oktave najniže note. Postavljajući sve ekstremne kretnje što bolje može, prikazuje note kao na slici 8.



Slika 8. Ekstremne kretnje planeta kao note, izvor: [8]

Riječ skoro, mijenja stvarne kretnje, a ne tonove, budući da Kepler tako koristi riječ na slikama 8. i 9.



Slika 9. Ekstremne kretnje planeta kao note, drugo naštimavanje, izvor: [8]

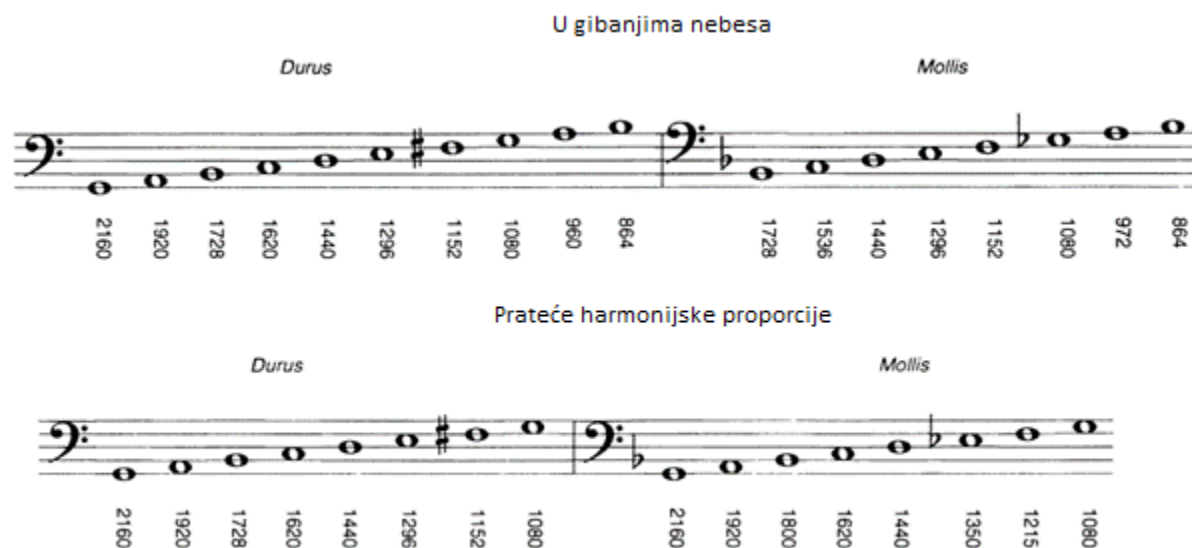
Planetarno kretanje nakon oba naštimavanja vide se u tablici 2.

Tablica 2. Kretanje planeta u oba naštimavanja, izvor: [8]

1	2	3	4	5	6
Ekstremna gibanja		Saturnovo afelijsko gibanje = G		Saturnovo perihelijsko gibanje = G	
4'30"	Jupiterov afel	(B u nižoj oktavi)		G	4'30"
3'49"–	Zemljin perihel	—		skoro E	3'45"
3'34"–	Zemljin afel	<b>G</b>	<b>3'34"</b>	D#	3'36"
3'17"–	Marsov afel	F#	3'21"	skoro D	3'23"
3' 3"+	Venerin perihel	—		C	3' 0"
3' 0"	Merkurov perihel	skoro E	2'58"	C	3' 0"
2'58"	Venerin afel	E	2'58"	—	
2'45"	Jupiterov perihel	skoro D	2'41"	Bb	2'42"
2'34"–	Merkurov afel	skoro C#	2'30"	A	2'32"
2'23"–	Marsov perihel	C	2'23"	—	
2'15"	Jupiterov afel	B	2'14"	(G u višoj oktavi)	
2'15"	Saturnov perihel	B	2'14"	<b>G</b>	<b>2'15"</b>
1'46"	Saturnov afel	<b>G</b>	<b>1'46"</b>	—	

Kepler ne prikazuje bilješke neselektivno u svojim stupcima. On više ne tvrdi da među gibanjima planeta postoje samo harmonijske proporcije, on izlaže ljestvice iz svakog roda harmonije. Čak i kada se zna da Kepler pokušava pokazati koliko se bilješke na slikama 8. i 9.

uklapaju u ljestvice, ova brojka nije sasvim jasna. Stoga uvodi promjene koje se vide na slici 10.



Slika 10. Rodovi glazbe u nebesima, izvor: [8]

Gornja polovica na slici 10. prikazuje *durus* i *mollis* ljestvicu onako kako su te ljestvice izražene u gibanjima nebesa te sadrži većinu nota sa slika 8. i 9., izostavljajući one koje se ne uklapaju dobro u ljestvicu. Brojevi ispod svake note pokazuju relativnu duljinu žice koja bi zazvučala kao ta nota. Na donjoj polovici slike 10. imamo prateće harmonijske proporcije, koje imaju jednake duljine žica za *durus*, no ne i za *mollis* skalu, što sugerira da su duljine žica za *mollis* skalu nebeskog gibanja određene gibanjem a ne notama.

U Tablici 3. objedinjeni su zamršeni odnosi na kojima se nalaze Keplerovi stupci otisnuti u 5. poglavlju knjige 5. Svaka crta i razmak u gornjem stupcu na slici 9.6 odgovaraju jednoj količini prividnog kretanja; na žicu određene duljine, koja se možda malo razlikuje između *durus* i *mollis* strana. Njegova je glavna poanta u tome da ekstremna planetarna gibanja daju većinu proporcija među notama *durus* ljestvice i također većinu proporcija među notama *mollis* ljestvice. Kepler u petom poglavlju izrijeком tvrdi da prividna planetarna kretanja utjelovljuju obje vrste glazbene ljestvice[8].

Tablica 3. Skale u Pokretima Nebesa, izvor: [8]

1	2		3	4	5
Pozicija na notnoj liniji	Gibanje		Duljina žice	Durus nota	Mollis nota
Prostor iznad gornje notne linije Gornja linija	isto kao druga linija		864	B	G
	Ništa		972	nije u skali	F
	Ništa		960	A	nije u skali
Gornji prostor	Zemlja A	3'34"	1,080	G	E♭
Četvrta linija od dna	Mars A	3'17"	1,152	F♯	D
Treći prostor	Venera A	2'58"	1,296	E	nije korišten
	Merkur P	3'00"		E	C
	Venera P	3'03"		nije korišten	C
Srednja linija	Jupiter P	2'45"	1,440	D	B♭
Drugi prostor	Mars P	2'23"	1,620	C	nije u skali
	Merkur A	2'34"	1,536	nije u skali	A
Druga linija od dna	Saturn P	2'15"	1,728	B	G
	Jupiter A	2'15"		B	G
Donji prostor	Ništa		1,920	A	
Donja linija	Saturn A	1'46"	2,160	G	

### 5.7. Univerzalni harmonici

U 7. poglavlju Kepler konačno razmatra kako polifoni sklad može proizaći iz prividnih gibanja planeta. Polifona harmonija, u kojoj se istovremeno čuje više glasova, je po Keplerovom mišljenju kruna "moderne" glazbe. Stvarajući polifoniju, glazbenici analogno izražavaju najskrivenije tajne Kreacije. Istodobna pojava prividnih gibanja u harmonijskom razmjeru može se dogoditi u bilo kojem trenutku. Kakvo god bilo prividno gibanje planeta, ono drugog planeta moglo bi se na trenutak uskladiti s njim. Takve harmonije su previše brojne i previše prolazne da bi imale bilo kakav veliki značaj. Najneobičniji trenuci harmonije su oni koji uključuju ekstremna kretanja: rijetki događaji kada su dva ili više planeta istovremeno u svojim apsidama i kreću se u harmonijskom omjeru jedan prema drugom. Koliko su ti događaji izvanredni ovisi, naravno, o tome koliko usko su definirani trenutci afela i perihela. Kepler iznosi da se istovremene pojave čak i gotovo ekstremnih gibanja događaju u dugim vremenskim intervalima, posebno za superiozne planete. Harmonične proporcije izvan apside su mnogo brojnije, stoga manje rijetke. Kepler pronalazi četiri "kostura" ili okvira (scelela) za akorde od šest nota, dva *durusa* i dva *mollisa*, koji uključuju barem jedno moguće gibanje sa svakog od planeta. Karakteristike ovih kostura su da se sve note međusobno usklađuju u

polifonom akordu i da se svaka nota nalazi unutar raspona prividnog kretanja nekog planeta. Tako jedan kostur predstavlja klasu mogućih akorda, od kojih se samo jedan može pojaviti u bilo kojem trenutku. Kostur je također karakteriziran njegovim rasponom mogućeg podešavanja. Budući da se prividna brzina svakog planeta kontinuirano mijenja, bilo koji pojedinačni akord može se svirati u različitim visinama. Sve dok sve note u akordu ostaju unutar granica mogućih gibanja svojih planeta, cijeli akord se može podići ili spustiti u visini i još uvijek biti dostižan. Proporcionalno povećanje ili smanjenje dodijeljenih brzina svakom planetu ne utječe na omjere tih brzina i stoga ostavlja akord netaknut. Širina napetosti akorda je ukupni raspon unutar kojeg se to može učiniti. Donji kraj raspona je ugađanje pri kojem nota dodijeljena bilo kojem planetu doseže afelijsko gibanje planeta, jer ako se ugađanje akorda spusti iznad te točke, planet nužno utihne i akord više nije univerzalan. Gornji kraj raspona je slično ugađanje pri kojem nota nekog planeta doseže perihelijsku granicu svog gibanja, jer ako je akord ugođen više, taj se planet više neće pridružiti. Postoji gornja granica na širinu napetosti koja kaže da se nijedan akord ne može ugoditi u rasponu većem od odgovarajućeg omjera Venerinih gibanja bez gubitka sudjelovanja tog planeta. Kepler u 7. poglavlju utvrđuje koja se moguća gibanja drugih planeta uklapaju u akord s durskom ili molskom sekstom između Venere i Zemlje.

Tako da se b slaže

Tako da se c slaže

Slika 11. Univerzalni harmonici *durus* tipa, izvor: [8]



Kepler daje još dva kostura koja pokazuju moguće *mollis* akorde koji uključuju svih šest planeta što se može vidjeti na slici 12.

	Tako da se b slaže	Tako da se c slaže
Merkur	<div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 5px;"> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">d<sup>♯</sup>vii</span></div> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">b<sup>b</sup>vii</span></div> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">g<sup>v</sup>i</span></div> </div>	<div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 5px;"> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">d<sup>♯</sup>vii</span></div> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">c<sup>vii</sup></span></div> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">g<sup>v</sup>i</span></div> </div>
Venera	<div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 5px;"> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">d<sup>♯</sup>vi</span></div> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">d<sup>♯</sup>v</span></div> </div>	<div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 5px;"> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">d<sup>♯</sup>vi</span></div> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">c<sup>vi</sup></span></div> </div>
Zemlja	<div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 5px;"> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">g<sup>iii</sup></span></div> </div>	<div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 5px;"> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">g<sup>iii</sup></span></div> </div>
Mars	<div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 5px;"> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">b<sup>b</sup>iii</span></div> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">g<sup>iii</sup></span></div> </div>	<div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 5px;"> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">g<sup>iii</sup></span></div> </div>
Jupiter	<div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 5px;"> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">b<sup>b</sup>i</span></div> </div>	<div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 5px;"> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">c<sup>i</sup></span></div> </div>
Saturn	<div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 5px;"> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">b<sup>b</sup></span></div> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">G</span></div> </div>	<div style="display: flex; flex-direction: column; gap: 5px;"> <div style="display: flex; align-items: center;"><span style="margin-right: 10px;">G</span></div> </div>

Slika 12. Univerzalni harmonici *mollis* tipa, izvor: [8]

Ovo ima, kao prepreku, odnos između Zemlje i Venere - dva planeta koja razlikuju vrste harmonije na *durus* (tvrdu) i *mollis* (meku) - ili je Zemlja u njezinom afelu, s Venerom u njezinom perihelu, ili je Zemlja uronila u svoj perihel, jer tada je harmonija meka. Te stoga radi novi kostur, ali bez ta 2 planeta. To se vidi na slici 13. gdje Kepler daje kretnje za samo jednu razinu podešavanja u kosturu *mollisa* i izostavlja ih u potpunosti u kosturu *durusa*. Kepler je pronašao mjesto za svih dvanaest ekstremnih gibanja u osam velikih kostura akorda, ali ih je sve pronašao odjednom[8].

	Tako da se b slaže	Tako da se a slaže
Merkur	d vi b vi f# vi d vi	d vi a vi f# vi d vi
Mars	b iii f# iii	a iii f# iii
Jupiter	d i	d i
Saturn	b	A

Slika 13. Harmonije 4 planeta, bez Zemlje i Venere, izvor: [8]

### 5.8. Četiri glasa Nebeske Harmonije

U ovom kratkom poglavlju Kepler predlaže da je podjela ljudskog zbora na sopran, alt, tenor i bas također predočena na nebesima. On priznaje da nebeske harmonije ne uključuju glasove ili zvukove i da nema razloga na nebesima zašto bi se koristila četiri dijela, a ne neki drugi broj. U 3. knjizi okarakterizirao je četiri glasa. Glas basa je dubok i spor, skače preko harmonijskih intervala. Tenor i alt, međuglasovi, imaju ograničen domet, osobito alt. Soprano glas je visok i brz, kreće se brzo malim koracima. U knjizi 5 on ističe da Saturn i Jupiter pokazuju svojstva basa, Mars tenora, Zemlja i Venera alta i Merkur soprana. On navodi pet razloga koji podržavaju ovu analogiju. Prvo, u pjesmi je basovski glas postavljen protiv alta, a u njegovoj analogiji samo su ti glasovi povezani s po dva planeta. Drugo, alt glas je gotovo najviši i ograničen je unutar uskog raspona - obje osobine upućuju na Veneru i Zemlju. Treće, tenor je "slobodan, ali se odvija skromno", što Keplera podsjeća na Mars, čiji pravi interval od kvinte premašuje samo Merkur. Četvrto, bas se kreće harmonijskim skokovima poput onih među raznim ekstremnim kretanjima Saturna i Jupitera. Sopran glas ima najveći raspon i najbrže se kreće, u očitijoj analogiji s Merkurom.

### 5.9. Uzroci ekscentričnosti

U 9. poglavlju knjige 5 Kepler dovršava svoju davno zavjetovanu namjeru da pokaže Stvoriteljev detaljni nacrt za nebesa. U svom konačnom obliku sastoji se od četrdeset osam numeriranih odjeljaka, označenih ili kao aksiomi ili kao propozicije, s dokazima – koji se uvelike razlikuju po karakteru – za većinu tvrdnji. Četrdeset i deveti odjeljak, označen kao Epifonema, ili sažetak, potvrđuje koliko je dobro da su različite vrste razloga navedene u prvih četrdeset i osam odjeljaka trebale imati prednost u redosljedju kojim je utvrđeno da imaju prednost. Kepler dijeli četrdeset i devet odjeljaka 9. poglavlja na dva nejednaka dijela, *rationes priores* prvih sedamnaest odjeljaka i *posteriores rationes* koji čine posljednja trideset dva. Teme *rationes priores* uključuju široko načelo raznolikosti u svemiru; uloga pravilnih poliedara u uspostavljanju osnovne strukture; i relativna položaja planeta i poliedara. Da bi se objasnile posljednje i najdisonantnije nebeske proporcije, one koje uključuju Veneru i Zemlju, Kepler započinje novi početak s *posteriores rationes*. Najvažnije propozicije detaljnog nacrtu za nebesa su[8]:

3. Propozicija. Intervali između Zemlje i Marsa, te između Zemlje i Venere, morali su biti najmanji proporcionalno njihovim sferama, i približno jednaki jedan drugom. Oni između Saturna i Jupitera, te između Venere i Merkura, morali su biti srednji, i opet približno jednaki. Oni između Jupitera i Marsa moralo je biti najveće.
5. Propozicija. Svakom paru susjednih planeta trebalo je dodijeliti dvije različite harmonije.
7. Propozicija. Harmonični udio kvarta ne može se pojaviti između spajajućih gibanja dvaju planeta, osim ako za njih kombinirani pravi omjeri ekstremnih gibanja nisu veći od kvinte.
8. Propozicija. Saturnu i Jupiteru pripadale su harmonije 1:2 i 1:3, odnosno oktava i oktava-plus-kvinta.
9. Propozicija. Kombinirane pravilne proporcije ekstremnih gibanja Saturna i Jupitera morale su biti oko 2:3, kvinta.
11. Propozicija. Omjer gibanja afela prema perihela Saturna morao je biti 4:5, dur terca. Omjer gibanja Jupitera morao je biti 5:6, mol terca.
12. Propozicija. Veneri i Merkuru je zaslužan veći sklad 1:4, dvostruka oktava. Kako su Saturn i Jupiter najudaljeniji par, tako su i najunutarnji par Venera i Merkur.

13. Propozicija. Za ekstremna gibanja Jupitera i Marsa su zaslužne ove harmonije: veći sklad od otprilike 1:8, tri oktave, i manji od 5:24, dvije oktave plus mol terca.

14. Propozicija. Odgovarajući omjer ekstremnih gibanja Marsa morao je biti veći od kvarte, 3:4, i otprilike jednak 18:25.

15. Propozicija. Harmonije 2:3 (kvinta), 5:8 (mol seksta) i 3:5 (dur seksta) morale su se rasporediti, datim redoslijedom, između spajajućih kretanja Marsa i Zemlje, Zemlje i Venere, te Venere i Merkura.

16. Propozicija. Kombinirani pravilni omjeri gibanja Venere i Merkura morali su biti jednaki oko 5:12.

17. Propozicija. Harmonija razdvajajućih kretanja Marsa i Zemlje ne može biti manja od 5:12.

Kako bi objasnio posljednje i najteže nebeske razmjere, one koje uključuju Veneru i Zemlju, Kepler u ovoj točki poglavlja započinje novi početak koje je nazvao *posteriores rationes*.

Kranji dio poglavlja otvaraju četiri aksioma koji su primjetno specifičniji od onih koji su bili ranije:

22. Propozicija. Ekstremna kretanja planeta morala su ukazivati na položaje, odnosno žice, sustava oktava, ili note glazbene ljestvice.

23. Propozicija. Bilo je potrebno da postoji jedan par planeta između čijih gibanja ne može biti harmonije osim dvije sekste, durske 3:5 i molske 5:8.

24. Propozicija. Dva planeta koja mijenjaju vrstu harmonije moraju stvoriti razliku u pravilnim proporcijama između svojih ekstremnih gibanja.

25. Propozicija. Superiorni planet koji je mijenjao vrstu harmonije morao je imati za interval svojih ekstremnih gibanja oko 12:13 ili 15:16.

27. Propozicija. Veći udio gibanja Zemlje i Venere morao je biti dur seksta, između afelijalnog gibanja.

28. Propozicija. Za Zemlju se primjenjuje odgovarajući omjer gibanja od oko 14:15; do Venere, oko 35:36.

29. Propozicija. Veći sklad gibanja Marsa i Zemlje, onaj razdvajajućih gibanja, nije mogao biti među onim harmonicima većim od 5:12[8]

30. Propozicija. Odgovarajući omjer gibanja Merkura morao je biti veći od svih ostalih pravilnih proporcija.
31. Propozicija. Afelijalno gibanje Zemlje treba se složiti s afelom Saturna kroz nekoliko oktava.
32. Propozicija. U univerzalnim harmonijama planeta tipa *mollis*, precizno afelijsko gibanje Saturna ne može se točno slagati s drugim planetima.
33. Propozicija. *Durus* tip harmonija i glazbene ljestvice usko su povezane s afeijskim pokretima.
34. Propozicija. *Durus* tip je usko povezan sa superiornim planetom u usporedbi njih dvoje.
35. Propozicija. Saturnu i Zemlji je blizak tip *durus*, dok je Jupiteru i Veneri bliži tip *mollis*.
36. Propozicija. Perihelijsko gibanje Jupitera mora se slagati s perihelijskim gibanjem Venere u istoj glazbenoj ljestvici, ali ne i u istom harmonijskom intervalu.
37. Propozicija. Zbroj pravih harmonika Saturna i Jupitera je 2:3, a u većoj zajedničkoj harmoniji jest 1:3.
39. Propozicija. U univerzalnim harmonici planeta *durus* tipa, Saturn se nije mogao točno složiti sa svojim perihelijskim gibanjem, niti Jupiter sa svojom afelijskim pokretom.
40. Propozicija. Bilo je potrebno dodati Platonov poluton trooktavnom (1:8) skladu razdvajajući gibanja Jupitera i Marsa.
41. Propozicija. Odgovarajući omjer gibanja Marsa nužno je bio dvostruko veći od harmonijskog omjera 5:6, odnosno 25:36.
42. Propozicija. Veći ili razdvajajući zajednički omjer Marsa i Zemlje nužno je bio 54:125, manji od sklada 5:12 uspostavljenog prethodnim razlozima.
43. Propozicija. Afelijsko kretanje Marsa ne bi se moglo složiti ni sa kakvom univerzalnom harmonijom, ali se na neki način morao uskladiti s ljestvicom vrste *mollis*. [8]
44. Posljedica. Stoga je očito - iz ove propozicije 43, u vezi s Jupiterom i Marsom, i iz propozicije 39, u vezi sa Saturnom i Jupiterom, i iz propozicije 36, u vezi s Jupiterom i Zemljom, i iz propozicije 32, u vezi sa Saturnom zašto se ekstremna kretanja planeta ne mogu se savršeno prilagoditi bilo kojem prirodnom sustavu ili glazbenoj ljestvici; niti onima koji su bili prilagođeni sustavu istog ugađanja. Utvrđeno je da su svi oni podijelili note prirodnim

razlogom tog ili da su formirali čisto prirodan niz ugodnih intervala. Kepler tvrdi da je postizanje bilo kojeg jedinstvenog univerzalnog sustava harmonije blokirano zbog prioriteta među različitim vrstama harmonije. Harmonije pojedinačnih planeta, univerzalne harmonije koje spajaju različite planete i ostvarenje dvije različite vrste harmonije važnije su općenito od spajanja svih harmonija u jedinstveni sustav[8].

45. Propozicija. Većem zajedničkom intervalu Venere i Merkura, dvostrukoj oktavi, kao i odgovarajućem intervalu Merkura, kako je utvrđeno u propozicijama 12 i 16, morao se dodati interval jednak intervalu Venere. Tako je pravi interval Merkura postao točno 5:12, a oba su se gibanja Merkura slagala s perihelijskim gibanjem Venere.

47. Propozicija. Ako je upis likova između planeta slobodan, tetraedar bi morao svojim kutovima točno dodirivati perihelijsku sferu Jupitera iznad, a središtem svojih strana točno dodirivati afelijsku sferu Marsa ispod.

48. Propozicija. Upisivanje pravilnih čvrstih likova između planetarnih sfera nije bilo slobodno; jer su ga u pojedinostima ometale harmonije uspostavljene među ekstremnim kretnjama.

Kepler četrdeset deveti i posljednji odjeljak 9. poglavlja ne naziva propozicijom, već epifonemom ili sažetkom.

49. Sažetak. Bilo je ispravno da su u nastanku razmaka među planetima čvrste figure popuštale harmonijskim razlozima, a veće harmonije dvaju planeta popuštale su univerzalnim harmonijama svih, u mjeri u kojoj je to bilo potrebno.

Drugi dio sažetka koji čini odjeljak 49 tvrdio je da su univerzalne harmonije svih planeta imale prednost nad harmonijama dvaju planeta - posebno nad durskim harmonijama dvaju planeta, što će reći harmonijama njihovih razdvajajućih momenata. Među harmonijama dvaju planeta, harmonije razdvajajućih gibanja ustupaju harmonijama spajajućih gibanja jer razdvajajuća gibanja "gledaju" druge planete, dok spajajuća gibanja gledaju jedno u drugo[8].

### 5.10. Obrazloženje trećeg Keplerovog zakona

Sva opažanja zabilježena u njegovoj knjizi *Harmonices Mundi* dovela su Keplera do novog otkića Harmonijskog zakona danas poznatog kao Treći Keplerov zakon. Keplerov treći zakon kaže da su kvadrati ophodnih vremena jednaki kubovima srednjih udaljenosti planeta od Sunca. Jednadžba (7) pokazuje period kružne orbite polumjera  $r$  oko Zemlje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM_E}} \quad (7)$$

Za elipsu je velika poluos je jednaka jednoj polovici zbroja perihela i afela. Za kružnu orbitu, velika poluos je ista kao polumjer za orbitu. Jednadžba (8) prikazuje treći Keplerov zakon ako jednostavno kvadriramo obje strane gdje je  $T$  ophodno vrijeme,  $G$  gravitacijska konstanta,  $M$  masa zvijezde, a  $r$  polumjer elipse[4].

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \quad (8)$$

Prva teorija gravitacije započinje 1687., kada je Isaac Newton objavio svoje glavno djelo Matematička načela prirodne filozofije. Newton temelji svoja razmatranja na temelju Keplerovih zakona. Newton je zamišljao da bi se Zemljina sila gravitacije morala protezati do Mjeseca. Upravo sljedeći Treći Keplerov zakon otkrio je da je privlačna sila obrnuto proporcionalna kvadrata udaljenosti od Zemljine težine. Prenoseći taj rezultat na sva nebeska tijela, Newton postavlja svoj Newtonov zakon gravitacije. Pri tome se masa nebeskog tijela zamišlja koncentrirana u točki. Newton dokazuje da tijelo sa sferno simetričnim raspodjelom mase djeluje kao da je sva njegova masa koncentrirana u njegovom središtu[10].

$$\frac{a_1^3}{a_2^3} = \frac{T_1^2(M+m_1)}{T_2^2(M+m_2)} \quad (9)$$

U jednadžbi (9)  $a_1$  i  $a_2$  su velike osi putanja planeta,  $T_1$  i  $T_2$  su ophodna vremena planeta,  $m_1$  i  $m_2$  su mase planeta, a  $M$  je masa Sunca odnosno zvijezde.

Iz Newtonovog zakona gravitacije dobiveni su matematički izrazi za Keplerove zakone, pa tako Treći Keplerov zakon za dva planeta poprima oblik, koji je istovjetan obliku u kojemu ga je i Kepler otkrio:

$$\frac{a^3}{T^2} = k \quad (10)$$

## 6. ZAKLJUČAK

U ovom završnom radu dan je kratak pregled života astronoma i matematičara Johannesa Keplera. Potom su opisana su još i Keplerova otkrića prikazana u njegovoj raspravi *Mysterium Cosmographicum*, u kojoj naznačuje da smatra Kopernikovu heliocentričnu teoriju ispravnom, kao i filozofsku ideju da su položaji planeta povezani s muzičkom harmonijom. Prikazano je i otkriće Prvog i Drugog Keplerovog zakona u djelu *Astronomia Nova* te su Keplerovi zakoni preformulirani i u jezik moderne fizike.

Središnji dio ovog završnog rada čini opis otkrića Keplerovog trećeg zakona, slijedeći korake u razmišljanju iz njegove astronomske rasprave *Harmonices Mundi*. Detaljno je prikazano pet knjiga ove rasprave, u kojima je Kepler kroz nizove propozicija pokušao pronaći vezu između omjera stranica i dijagonala međusobno upisanih i opisanih Platonova tijela, muzičkih intervala u polifoniji te omjera perihela i afela planeta Sunčeva sustava.

Otkrivši da je omjer kvadrata orbitalnih perioda planeta i kubova velike poluosi eliptične orbite jednak za sve planete Sunčevog sustava, povezo je u tzv. harmonijski zakon i udaljenost planeta od Sunca s njihovom periodom ophodnje Sunca. Keplerova otkrića poslužila su kao dobro polazište Isaacu Newtonu pri matematičkom formuliranju teorije gravitacije te tako postavila temelj novovjekoj znanosti.



## **LITERATURA**

- [1] D.K.Love, „Kepler and the Universe: How One Man Revolutionized Astronomy“, 2015. (pristupljeno 10.srp.2022).
- [2] Briceno V., Gabriela, „*Johannes Kepler*“, 2019. [Na internetu]. Dostupno na: <https://www.euston96.com/en/johannes-kepler-en/> (pristupljeno 10.srp.2022).
- [3] „Orbits and Kepler's Laws“, 26.lip.2008. [Na internetu]. Dostupno na: <https://solarsystem.nasa.gov/resources/310/orbits-and-keplers-laws/> (pristupljeno 10.srp.2022).
- [4] „Kepler's Laws of Planetary Motion“, 19.ruj.2016. [Na internetu]. Dostupno na: [https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/13-5-keplers-laws-of-planetary-motion#CNX\\_UPhysics\\_13\\_05\\_Ellipse](https://openstax.org/books/university-physics-volume-1/pages/13-5-keplers-laws-of-planetary-motion#CNX_UPhysics_13_05_Ellipse) (pristupljeno 10.srp.2022).
- [5] Vladis Vujnović, „Astronomija“, Školska knjiga, 1989.
- [6] „Equant“, [Na internetu]. Dostupno na: <https://www.britannica.com/science/equant> (pristupljeno 10.srp.2022).
- [7] A.Kremenko, „How Kepler discovered his laws“, 17.pros.2016. [Na internetu]. Dostupno na: <https://www.math.purdue.edu/~eremenko/dvi/kepler.pdf> (pristupljeno 10.srp.2022).
- [8] B.Stephenson, „The Music of the Heavens - Kepler's harmonic astronomy“, 1994. (pristupljeno 10.srp.2022).
- [9] „Kepler Poinot polyhedron“, [Na internetu]. Dostupno na: [https://www.wikiwand.com/en/Kepler%E2%80%93Poinot\\_polyhedron](https://www.wikiwand.com/en/Kepler%E2%80%93Poinot_polyhedron) (pristupljeno 10.srp.2022).
- [10] „The Science: Orbital Mechanics“, 7.srp.2009. [Na internetu]. Dostupno na: <https://earthobservatory.nasa.gov/features/OrbitsHistory/page2.php> (pristupljeno 10.srp.2022).

## **SAŽETAK**

Primjene Keplerovih zakona su sveprisutne: od razumijevanja kretanja nebeskih tijela do određivanja putanja svemirskih letjelica. Ovaj završni rad prikazuje samo otkriće Trećeg Keplerovog zakona kako ga je on izveo u znanstvenoj raspravi *Harmonices Mundi*, Harmonije Svijeta. Diskutiran je i povijesni značaj ovog epohalnog otkrića koje je bilo ujedno i temeljem početaka moderne znanosti. Ocrta je i kratka povijest drugih velikih Keplerovih znanstvenih otkrića koja su se temeljila na njegovim filozofskim preduvjerenjima te na najtočnijim astronomskim opažanjima onog vremena koja je proveo Tycho Brahe.

**Ključne riječi:** Keplerovi zakoni planetarnog gibanja, harmonijski zakon, *Harmonices Mundi*, astronomija, sateliti.

## ***ABSTRACT***

Applications of Kepler's laws are ubiquitous: from understanding motion of a range of astronomical phenomena to determining motion of man made spacecrafts. This final paper presents the very discovery of the Kepler's Third Law as presented in his treatise *Harmonices Mundi, Harmonies of the World*. Legacy of this consequential discovery, which laid foundation of the modern science, is discussed. Brief history of other Kepler's scientific discoveries based on his philosophical ideas and the most accurate astronomical observations of his time obtained by Tycho Brahe is outlined.

**Key words:** Kepler's laws of motion, harmonic law, *Harmonices Mundi*, astronomy, satellites

## ***ŽIVOTOPIS***

Antonio Šifner je rođen 9.2.1999. godine u Đakovu. U Đakovu pohađa Osnovnu školu Josipa Antuna Čolnića. 2013. godine upisuje se u prvi razred Gimnazije Antuna Gustava Matoša u Đakovu u kojoj pohađa opći smjer. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja aktivno sudjeluje u školskim projektima i 2017.godine uspješno završava srednju školu. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja, upisuje se na preddiplomski sveučilišni studij Računarstvo na Fakultetu elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija u Osijeku. Poseban interes su mu Računalno inženjerstvo, te Automobilsko računarstvo.

---

Potpis autora