Vektorska funkcija i primjeri iz fizike

Knežević, Tomislav

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA

Sveučilišni studij

VEKTORSKA FUNKCIJA I PRIMJERI IZ FIZIKE

Završni rad

Tomislav Knežević

Osijek, 2016./2017.

Sadržaj

1. UVOD

Vektorska analiza je grana matematike koja se bavi diferencijalnim i integralnim računom nad vektorskim poljima. Najveću primjenu ima u diferencijalnoj geometriji i parcijalnim diferencijalnim jednadžbama, a od ostalih znanosti se najviše koristi u fizici, osobito u elektrodinamici, mehanici fluida i gravitaciji.

U ovom radu je definirana i opisana vektorska funkcija (vektorsko polje), derivacija, integral, divergencija i rotacija vektorskog polja. Naveden je Stokesov i Gaussov teorem te su opisani i drugi koordinatni sustavi.

Također su i navedeni primjeri vektorskih polja u fizici te riješeni zadaci.

1.1 Zadatak završnog rada

Zadatak završnog rada je definirati vektorske funkcije, derivaciju i integral vektorske funkcije te divergenciju i rotaciju vektorske funkcije. Također opisati vektorsko polje i navesti primjere vektorskih funkcija koje se koriste u fizici.

2. VEKTORSKE FUNKCIJE

Ako svakoj točki u nekom dijelu prostora pridružimo vektor zadali smo jednu vektorsku funkciju ili vektorsko polje.

Neka je V_0 skup svih radijus-vektora u pravokutnom koordinatnom sustavu (O, i, j, k)

$$V_0 = \{\overrightarrow{OM} \mid M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} .$$

Vektorska funkcija (vektorska funkcija skalarne varijable) je svaka funkcija

$$w : D \to V_0, \qquad D \subseteq \mathbb{R}^3.$$

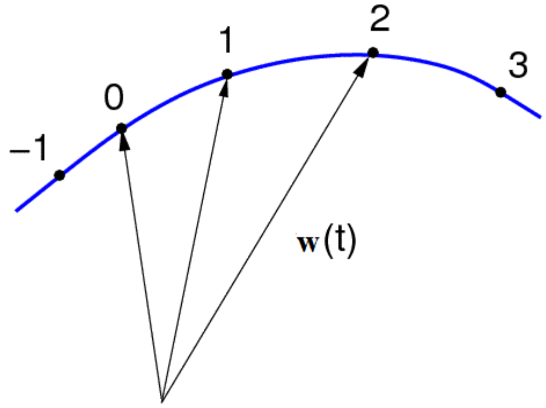
Za svaku točku $t \in D$ je $w(t)$ radijus-vektor pa ga možemo razložiti po komponentama:

$$w(t) = w_x(t)\vec{i} + w_y(t)\vec{j} + w_z(t)\vec{k} .$$

Komponente vektorske funkcije su prema tome tri funkcije n varijabli,

$$w_x, w_y, w_z : D \to \mathbb{R}.$$

Vektorske funkcije nemaju graf u klasičnom smislu za razliku od funkcija jedne ili više varijabli. Umjesto toga se definira hodograf ili trag vektorske funkcije w kao skup svih točaka koje opisuju vrhovi radijus-vektora $w(t)$ kada t poprima vrijednosti iz domene D.



Slika 2.1 Hodograf vektora

Vektor a je limes vektorske funkcije $w: D \to V_0$ u točki t_0

$$a = \lim_{t \to t_0} w(t)$$

pri čemu je $t \in (t_1, t_2)$, ako ($\forall\ \varepsilon > 0$) ($\exists\ \delta > 0$) tako da $|t - t_0| < \delta$.

$|w(t) - a|$ označava duljinu vektora $w(t) - a$ odnosno udaljenost vektora $w(t)$ i a.

Ako je $w(t) = w_x(t)\vec{i} + w_y(t)\vec{j} + w_z(t)\vec{k}$ i $a = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, onda je

$$|w(t) - a| = \sqrt{(w_x(t) - a_x)^2 + (w_y(t) - a_y)^2 + (w_z(t) - a_z)^2}$$

Također iz definicije limesa vektorske funkcije slijedi

$$a = \lim_{t \to t_0} w(t) \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = \lim_{t \to t_0} w_x(t) \\ a_y = \lim_{t \to t_0} w_y(t) \\ a_z = \lim_{t \to t_0} w_z(t) \end{cases}.$$

Po definiciji skalarnog i vektorskog produkta slijede standardne tvrdnje o limesu zbroja i produkta: ako svi limesi postoje, onda vrijedi:

1. $\lim_{t \to t_0} (w + u)(t) = \lim_{t \to t_0} w(t) + \lim_{t \to t_0} u(t)$,
2. $\lim_{t \to t_0} (w \cdot u)(t) = \lim_{t \to t_0} w(t) \cdot \lim_{t \to t_0} u(t)$,
3. $\lim_{t \to t_0} (w \times u)(t) = \lim_{t \to t_0} w(t) \times \lim_{t \to t_0} u(t)$.

Funkcija $w: D \to V_0$ je neprekidna u točki $t_0 \in D$ ako i samo ako je

$$\lim_{t \to t_0} w(t) = w(t_0).$$

Iz definicije neprekidnosti slijedi da je vektorska funkcija neprekidna ako i samo ako su njene komponente w_x, w_y i w_z neprekidne funkcije.

2.1. Derivacija vektorske funkcije

Derivacija vektorske funkcije $w: D \to V_0$ u točki t je limes

$$w'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{w(t) - w(t_0)}{t - t_0},$$

ako taj limes postoji. Na ovaj način smo definirali novu funkciju $w'(t)$ koju nazivamo derivacija funkcije w. Funkcija w je derivabilna ako ima derivaciju u svakoj točki $t \in D$.

Ako bi gledali po komponentama onda izgleda

$$w'(t) = w_x'(t)\vec{i} + w_y'(t)\vec{j} + w_z'(t)\vec{k}\ .$$

Odnosno, funkcija ima derivaciju u točki t ako i samo ako sve njene komponente imaju derivaciju u točki t.

Derivaciju vektorske funkcije također možemo definirati pomoću izraza

$$w'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{w(t + \Delta t) - w(t)}{\Delta t}\ .$$

<u>Pravila deriviranja</u>

Neka su $u, w: D \to V_0$ derivabilne vektorske funkcije i neka je derivabilna skalarna funkcija. Tada vrijedi:

1. $(\lambda w + \mu u)' = \lambda w' + \mu u'$, $\qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. $(fw)' = f'w + fw'$.
3. $\left(\dfrac{w}{f}\right)' = \dfrac{fw' - f'w}{f^2}$, $\qquad f \neq 0$.
4. $(w \cdot u)' = w' \cdot u + w \cdot u'$.
5. $(w \times u)' = w' \times u + w \times u'$.

Derivacija složene funkcije

Neka je $w: D \to V_0$ i $\varphi: D_1 \to \mathbb{R}$ pri čemu je $\varphi\left[D_1\right] \subseteq D$. Ako su funkcije w i φ derivabilne, onda je:

$$\frac{d(w(\varphi(t)))}{dt} = \frac{dw}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = w^{'}(\varphi) \cdot \varphi^{'}(t).$$

2.2. Integral vektorske funkcije

Derivabilna vektorska funkcija $u: D \to V_0$ je primitivna funkcija vektorske funkcije w na skupu $D \subseteq \mathbb{R}$ ako je

$$u^{'}(t) = w(t), \quad \forall t \in D.$$

Integral vektorske funkcije w na segmentu $[a,b] \subseteq D$ je vektor

$$\int_a^b w(t)dt = u(b) - u(a).$$

Kažemo da je w integrabilna na segmentu $[a,b] \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$. Kada bi gledali po komponentama onda je

$$\int_a^b w(t)dt = \vec{i}\int_a^b w_x(t)dt + \vec{j}\int_a^b w_y(t)dt + \vec{k}\int_a^b w_z(t)dt.$$

Primitivne funkcije se međusobno razlikuju za konstantni vektor. Svaku sličnu primitivnu funkciju možemo dobiti pomoću

$$u(t) = \int_{t_0}^t w(x)dx.$$

za neki t_0.

Svojstva integrala vektorske funkcije

Neka su funkcije w, v, φ integrabilne na segmentu $[a,b] \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$. Tada vrijede

1. Svojstvo linearnosti

$$\int_a^b \left(\lambda w(t) + \mu v(t)\right) dt = \lambda\int_a^b w(t)dt + \mu\int_a^b v(t)dt.$$

2. Formule za parcijalnu integraciju

$$\int_a^b w(t) \cdot v^{'}(t)dt = w(b) \cdot v(b) - w(a) \cdot v(a) - \int_a^b w^{'}(t) \cdot v(t)dt,$$

$$\int_a^b \varphi(t)w'(t)dt = \varphi(b)w(b) - \varphi(a)w(a) - \int_a^b \varphi'(t)w(t)dt\,.$$

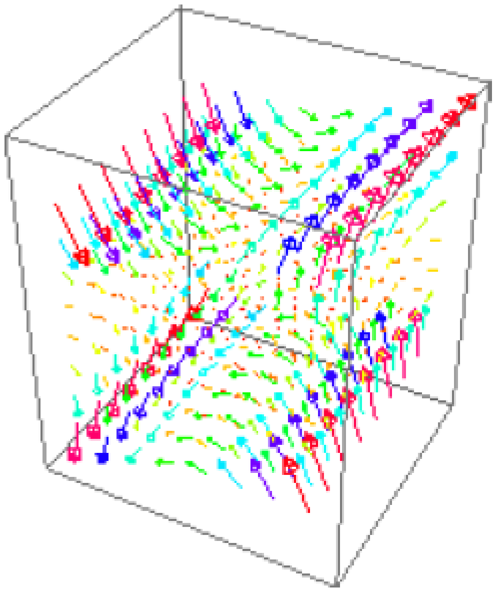
3. VEKTORSKA POLJA

Kao što je već u radu navedeno, vektorska polja su prostorne funkcije koje svakoj točki prostora pridružuje vektor.

Vektorsko polje prikazujemo u prostoru pomoću silnica. Silnice su prostorne krivulje sa svojstvom da tangenta na krivulju u svakoj točki ima smjer vektora u toj točki, a iznos vektora je jednak graničnoj vrijednosti gustoće silnica u toj točki.

Primjer vektorskog polja :

$$\vec{W} = (2xy + z^3)\vec{i} + (x^2 + 2y)\vec{j} + (2xz^2 - 2)\vec{k}\,.$$



Slika 3.1 Prikaz vektorskog polja u prostoru

Ako promijenimo koordinatni sustav polje se ne mijenja, ali se mijenja funkcija f s kojim je polje opisano. Osnovna svojstva polja, što su neprekidnost i diferencijabilnost, ne ovise o izboru koordinatnog sustava.

Vektorsko polje w je neprekidno ako su takve sve njegove komponente $w_x, w_y, w_z : D_s \to \mathbb{R}$. Također, vektorsko polje w je diferencijabilno ako su takve njegove komponente $w_x, w_y, w_z : D_s \to \mathbb{R}$.

Funkcije tri varijable imaju parcijalne derivacije i za njih pojam derivacije nije definiran. Stoga za analizu polja se uvode tri operatora koji svaki u svom području primjene, imaju ulogu sličnu onoj koja ima derivacija funkcije jedne varijable. To su gradijent vektorskog polja, divergencija vektorskog polja i rotacija vektorskog polja.

Stokesov teorem

Neka je $w : D \to V_0$ neprekidno diferencijabilno vektorsko polje, pri čemu je $D \subseteq \mathbb{R}^3$ otvoren skup. Neka je $\vec{S}$ po dijelovima glatka ploha orijentirana poljem jediničnih vektora normale n_0. Tada vrijedi

$$\iint_{\vec{S}} rotW d\vec{S} = \oint_{\partial\vec{S}} w \cdot dr = \oint_{\partial S} w \cdot t_0 \cdot ds .$$

Gaussov teorem

Gaussov teorem ili teorem o divergenciji omogućava da vektorsko polje w umjesto po zatvorenoj plohi ∂V integriramo po volumenu V i obratno.

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{w} dV = \oiint_{\partial V} w \cdot d\vec{P} .$$

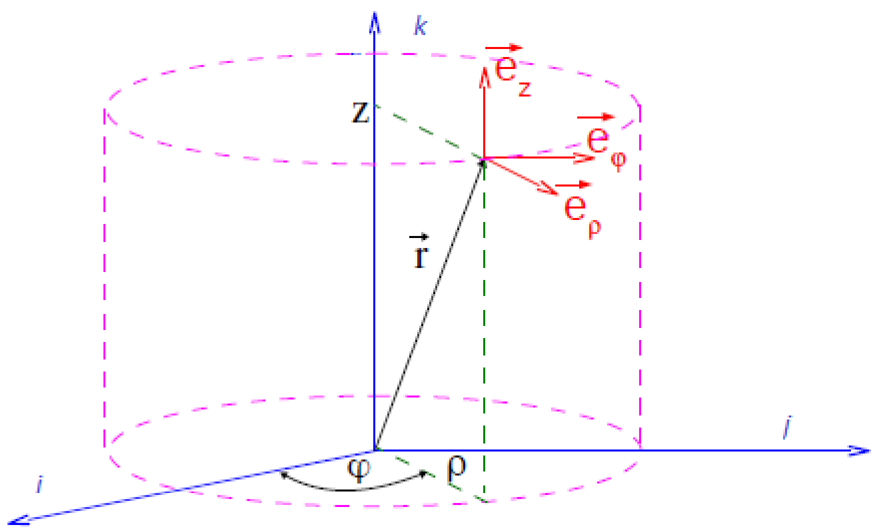
3.1. Koordinatni sustavi

Osim pravokutnog koordinatnog sustava postoje još i drugi koordinatni sustavi. Odabir određenog koordinatnog sustava ovisi o simetriji problema koji se rješava.

Cilindrični koordinatni sustav

U situacijama kada je problem simetričan na okret oko nepomične osi, preporučeno je koristiti cilindrični koordinatni sustav. Određen je vrijednosti triju koordinata : ρ, φ i z, gdje je z jedna od koordinata pravokutnog koordinatnog sustava. Svakoj točki prostora je jednoznačno pridružena trojka brojeva (ρ, φ i z), pri čemu ρ, φ i z mogu poprimati vrijednosti iz slijedećih intervala

$\rho \in (0,\infty)$, $\varphi \in (0,2\pi)$ i $z \in (-\infty,+\infty)$.



Slika 3.1.1 Cilindrični koordinatni sustav

Veze pravokutnih i cilindričnih koordinata se dobivaju elementarnom trigonometrijom

$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $\qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,

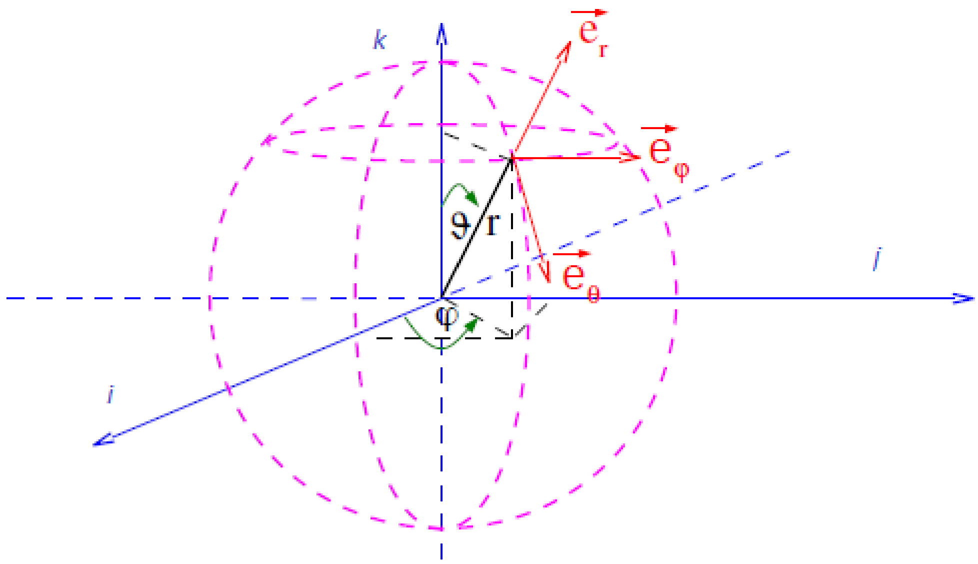
$y = \rho\sin\varphi$, $\qquad \varphi = \arctan\dfrac{y}{x}$,

$z = z$.

Sferni koordinatni sustav

Pored pravokutnog i cilindričnog koordinatnog sustava se često koristi i sferni koordinatni sustav. Svakoj točki prostora je jednoznačno pridružena trojka : r, θ i φ. Koordinata r ima vrijednost radijalne udaljenosti promatrane točke od ishodišta. Koordinata θ je kut koji radij vektor zatvara s pozitivnim smjerom osi z, a φ je kut koji projekcija radij vektora na ravninu (x, y). r, θ i φ mogu poprimiti slijedeće vrijednosti

$r \in (0,\infty)$, $\theta \in (0,\pi)$ i $\varphi \in (0,2\pi)$.



Slika 3.1.2 Sferni koordinatni sustav

Veze pravokutnih i sfernih koordinata se dobivaju elementarnom trigonometrijom

$$y = r\sin\theta\sin\varphi\,, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,,$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi\,, \qquad \theta = \arctan\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{z}}\,,$$

$$z = r\cos\theta\,, \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x}\,.$$

3.2. Gradijent vektorskog polja

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^3$ otvoren skup i $w: D \to V_0$ vektorsko polje pri čemu V_T identificiramo s V_0 za $\forall T \in D$.

Divergencija vektorskog polja w je skalarno polje

$$\text{grad } f : D \to V_0 ,$$

definirano s

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} .$$

Iz definicije gradijenta slijedi da nužan uvjet ekstrema funkcije f možemo pisati kao

$$\text{grad } f = 0.$$

Za razliku od divergencije i rotacije koja imaju smisla samo u slučaju vektorskih polja s tri varijable, gradijent je dobro definiran i za prostorne proizvoljne dimenzije n.

Svojstva gradijenta

Neka su f i g diferencijabilna skalarna polja i λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Tada vrijede svojstva:

1. grad c=0, c=const.
2. $\text{grad}\left(\lambda f + \mu g\right) = \lambda \,\text{grad } f + \mu \,\text{grad } g.$
3. $\text{grad}\left(fg\right) = g\,\text{grad } f + f \text{ grad } g.$
4. $\text{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\, grad\ f - f \text{ grad g}}{g2}, \quad g \neq 0.$
5. $\text{grad }(\varphi \circ f) = \frac{d\varphi}{df} \text{ grad } f$, gdje je $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija.

3.3. Rotacija vektorskog polja

Rotacija vektorskog polja w je vektorsko polje

$$\text{rot } w : D \to V_0$$

definirano s

$$\text{rot } w = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right)\vec{i} + \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right)\vec{j} + \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right)\vec{k} \,.$$

Svojstva rotacije

Neka su f, g, u i w diferencijabilna polja, a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada vrijede svojstva:

1. rot c=0 za svako konstantno vektorsko polje c.
2. Rot $(\lambda\, w + \mu\, u) = \lambda \,\text{rot } w + \mu \,\text{rot } u$.
3. rot $(w \times u)$ $= (\text{div } u)\, w - (\text{div } w)\, u + (u\, \nabla)\, w - (w\, \nabla) u$.
4. rot $(f\, w) = (\text{grad } f) \times w + f \text{ rot } w$.
5. rot (grad f) = 0.
6. rot (f grad g) = grad f $\times$grad g.
7. rot (rot w) = grad div w - $\Delta\, w$, pri čemu se Δ primjenjuje na svaku komponentu w_x, w_y i w_z.

3.4. Divergencija vektorskog polja

Divergencija vektorskog polja w je skalarno polje

$$\text{div } w : D \to V_0$$

definirano s

$$\text{div } w = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}.$$

Fizičko značenje divergencije je omjer toka polja kroz zatvorenu plohu i volumena definiranog tom plohom u granici kada se ploha neizmjerno smanjuje.

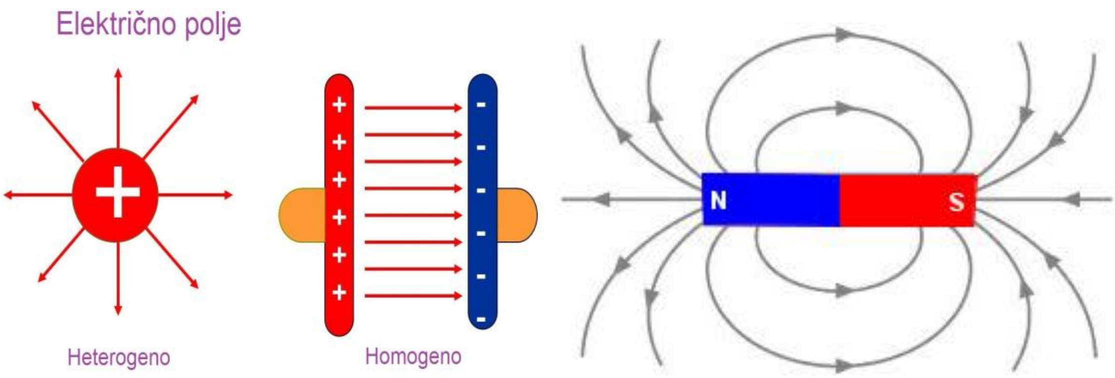
Svojstva divergencije

Neka su f, g, u i w diferencijabilna polja, a $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tada vrijede svojstva:

1. div c = 0 za svako konstanto vektorsko polje c.
2. div $(\lambda\, w + \mu\, u) = \lambda$ div w + μ div u.
3. div$(w \times u)$ = (rot w) $\cdot$ u – w $\cdot$rot u.
4. div (f w) = grad f $\cdot$ w + f div w.
5. div (f grad g) = grad f $\cdot$grad g + f Δg.
6. div (rot w) = 0.

4. PRIMJENA VEKTORSKIH FUNKCIJA U FIZICI

Vektorska polja se znatno primjenjuju u fizici. Mogu opisivati brzinu vjetra, odrediti brzinu protjecanja fluida kroz cijev, opisivati magnetsko djelovanje, opisivati električno djelovanje te odrediti gravitacijsko polje. Vektorska polja u fizici su električna polja, magnetska polja, elektromagnetska polja...



Slike 4.1 Električno polje (lijevo), magnetsko polje (desno)

4.1. Maxwellove jednadžbe

James Clerk Maxwell (1831. – 1879.) je škotski fizičar koji je razvio teoriju elektromagnetizma. 1864. godine je postavio teoriju elektromagnetizma koja je povezala električne i magnetske pojave te predvidio postojanje elektromagnetskih valova koji se gibaju brzinom svjetlosti. Maxwellove jednadžbe su temeljni zakoni kojima se podvrgavaju sve električne i magnetske pojave.

Maxwellove jednadžbe se mogu prikazati u diferencijabilnom i integralnom obliku. Zasnivaju se na Stokesovom i Gaussovom teoremu

<u>**Diferencijalni oblik**</u>	<u>**Integralni oblik**</u>	
$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\oint_{\partial V} E \cdot dA = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV$,	povezuje ih Gaussov teorem
$\nabla \cdot B = 0$	$\oint_{\partial V} B \cdot dA = 0$,	povezuje ih Gaussov teorem
$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\oint_{\partial A} E \cdot ds = -\frac{d}{dt} \int_A B \cdot dA$,	povezuje ih Stokesov teorem

$\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \quad \Leftrightarrow \quad \oint_{\partial A} B \cdot ds = \int_A \mu_0 J \cdot dA + \frac{d}{dt} \int_a \mu_0 \varepsilon_0 E \cdot dA,$ povezuje ih Stokesov teorem.

Prva jednadžba kaže da tok električnog polja kroz bilo koju zatvorenu površinu S jednak je algebarskom zbroju naboja koji se nalaze unutar te površine.

Druga jednadžba opisuje činjenicu da ne postoje magnetski monopoli zbog činjenice da su magnetske silnice zatvorene krivulje.

Treća jednadžba kaže da struja ili promjenjivo električno polje uzrokuju magnetno polje.

Četvrta jednadžba govori da oko vodiča kojim teče struja inducira se magnetsko polje, ali i svako promjenjivo električno polje inducirati će magnetsko polje.

4.2. Riješeni zadaci

1. Elektron ima brzinu s komponentama $\vec{v} = 2\cdot 10^{-6}\vec{i} - 3\cdot 10^{-6}\vec{j}$ m/s ulijeće u magnetsko polje indukcije $B = 4\cdot 10^{-3}$ kT. Kolika je Lorentzova sila koja djeluje na elektron i odredite njezin smjer?

$$F_L = q(\vec{v}\times\vec{B}) = 1.602\cdot 10^{-19}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2\cdot 10^{-6} & -3\cdot 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 4\cdot 10^{-3} \end{vmatrix} =$$

$$= 1.602\cdot 10^{-19}\left[\vec{i}(-3\cdot 10^{-6}\cdot 4\cdot 10^{-3}) - \vec{j}(2\cdot 10^{-6}\cdot 4\cdot 10^{-3}) + \vec{k}(0)\right] =$$

$$= -1.92\cdot 10^{-15}\vec{i} - 1.28\cdot 10^{-15}\vec{j}\,.$$

2. Zadana je jednadžba gibanja materijalne točke $s(t) = \cos\pi\vec{i} + \sin\pi\vec{j} + 2t\vec{k}$, $t \geq 0$. Izračunajte brzinu $v(t)$ i akceleraciju $a(t)$ u trenutku $t = 2$.

Brzinu $v(t)$ dobijemo tako da deriviramo put $s(t)$.

$$v(t) = s'(t) = -\pi\sin\pi\vec{i} + \pi\cos\pi t\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$= -\pi\sin 2\pi\vec{i} + \pi\cos 2\pi\vec{j} + 2\vec{k}$$

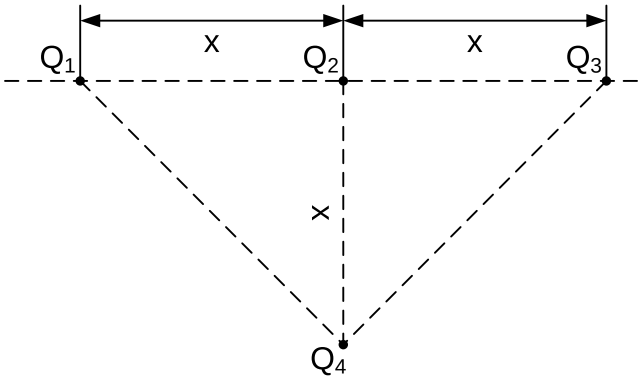
Ubrzanje $a(t)$ dobijemo tako da drugi put deriviramo $s(t)$ ili deriviramo $v(t)$.

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = -\pi^2\cos\pi t\vec{i} - \pi^2\sin\pi t\vec{j}$$

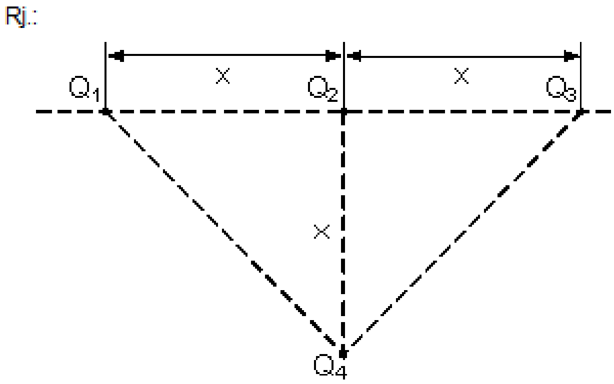
$$= -\pi^2\cos 2\pi\vec{i} - \pi^2\sin 2\pi\vec{j}$$

Vidimo iz zadatka da komponenta k ima ubrzanje jednako nuli jer komponenta u smjeru gibanja k je linearna pa nema promjene brzine.

3. Odredite silu na naboj Q_4 = 10^{-6} C za slučaj prikazana na slici, ako je zadano $Q_1 = Q_3$ =2*10^{-6} C, Q_2 =-2*10^{-6} C i $x = 7$ cm. Okolni prostor je vakuum. $\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$.



Odredimo vektore udaljenosti naboja Q_1, Q_2 i Q_3 od naboja Q_4. Kako je neki vektor jednak umnošku njegove duljine i pripadnog mu jediničnog vektora može se Coluombov zakon napisati i u slijedećem obliku.



$\phi = B \cdot S = 4 \cdot 10^{-4}$

$r_{14} = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.07 \\ -0.07 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $r_{24} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.07 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $r_{34} = \begin{pmatrix} -x \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.07 \\ -0.07 \end{pmatrix}$

Iznosi (duljine, moduli) vektora udaljenosti su:

$r_{14}m = \sqrt{\left(r_{14_0}\right)^2 + \left(r_{14_1}\right)^2} = 0.099$,

$r_{24}m = \sqrt{\left(r_{24_0}\right)^2 + \left(r_{24_1}\right)^2} = 0.07$,

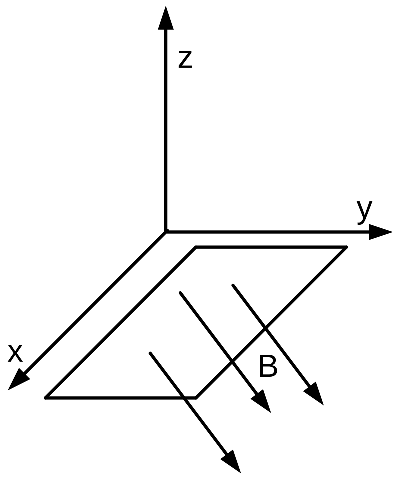
$$r_{34}m = \sqrt{\left(r_{34_0}\right)^2 + \left(r_{34_1}\right)^2} = 0.099.$$

Ukupna elektrostatska sila na naboj Q4 jednaka je vektorskom zbroju sila koje stvaraju naboji Q1, Q2 i Q3.

$$F_4 = \frac{Q_1 Q_4}{4\pi\varepsilon \cdot r_{14}m^3} \cdot r_{14} + \frac{Q_2 Q_4}{4\pi\varepsilon \cdot r_{24}m^3} \cdot r_{24} + \frac{Q_3 Q_4}{4\pi\varepsilon \cdot r_{34}m^3} \cdot r_{34} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.074 \end{pmatrix}$$

Rješenje je $F_4 = 1.074\,j$ N. Dakle ukupna elektrostatska sila na naboj Q4 ima samo vertikalnu j komponentu.

4. Odredite magnetski tok kroz zavoj na slici koji se nalazi u homogenom magnetskom polju iznosa $B = 0.5\vec{i} + 1\vec{k} - 0.5\vec{k}$ T. Zavoj se nalazi u $x-y$ ravnini. Dimenzije zavoja su a=2 cm i b= 4 cm.



Ulazni podaci su:

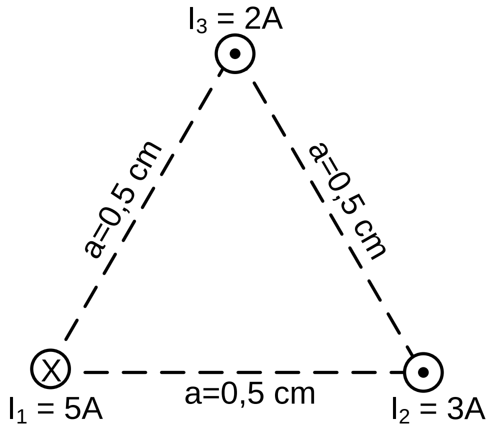
$$B = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}, \qquad a = 0.02, \qquad b = 0.04.$$

Magnetski tok kroz zavoj jednak je skalarnom umnošku vektora magnetske indukcije i vektora površine zavoja. Vektor površine zavoja odabire se tako da je kut između njega i vektora indukcije između -90 i +90 stupnjeva. Tada će magnetski tok biti uvijek pozitivan.

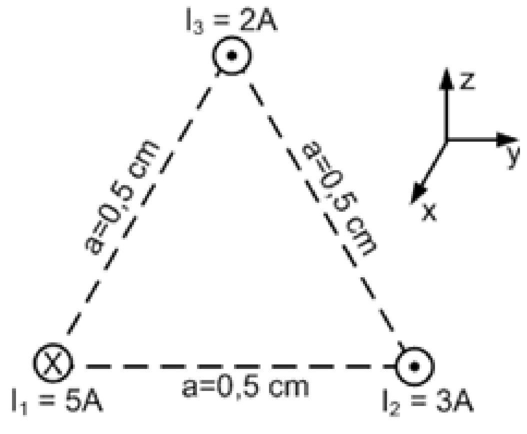
$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a \cdot b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

$$\phi = B \cdot S = 4 \cdot 10^{-4}\,\text{Wb}.$$

5. Zadana su tri paralela vodiča, protjecana strujama kao na slici. Odredite silu po metru duljine na gornji vodič.



Ulazni podaci su:



$I_1 = 5A,\qquad I_2 = 3A,\qquad I_3 = 2A,\qquad a = 0.005,\qquad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$

Kako su vodiči smješteni u vrhovima istostranog trokuta svi kutovi u trokutu su 60 stupnjeva. Za odabrani koordinatni sustav napisati ćemo vektore magnetskih indukcija od vodiča 1 i 2 na mjestu vodiča 3. Indukcija od vodiča 1 i od vodiča 2 na mjestu vodiča 3 imati će y i z komponente.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2\pi a} \cos\left(30 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \\ -\left(\mu_0 \cdot \frac{I_1}{2\pi a} \sin\left(30 \cdot \frac{\pi}{180}\right)\right) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.732051 \cdot 10^{-4} \\ -1 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mu_0 \cdot \frac{I_2}{2\pi a} \cos\left(30 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \\ -\left(\mu_0 \cdot \frac{I_2}{2\pi a} \sin\left(30 \cdot \frac{\pi}{180}\right)\right) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.03923 \cdot 10^{-4} \\ -6 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix},$$

$$B_{uk} = B_1 + B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6.928203 \cdot 10^{-5} \\ -1.6 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

Jedinični vektor duljine vodiča sa strujom I_3 jednak je i jer struja I_3 protječe u pozitivnom smjeru osi x. Sila po metru duljine na vodič sa strujom I_3 je:

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$F_3 = I_3 \cdot (i \times B_{uk}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6.928230 \cdot 10^{-5} \\ -1.6 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix}.$$

Iznos sile na vodič sa strujom I_3 je:

$$F_3 m = \sqrt{\left(F_{3_0}\right)^2 + \left(F_{3_1}\right)^2 + \left(F_{3_2}\right)^2} = 3.487119 \cdot 10^{-4}$$

ZAKLJUČAK

U ovom radu su definirane vektorske funkcije (vektorska polja) te navedeni primjeri u fizici.

U prvom dijelu su objašnjene vektorske funkcije, hodograf vektorske funkcije, limes vektorske funkcije i svojstva neprekidnosti. U nastavku su definirane derivacije, i integrali vektorskih funkcija. Nadalje je prikazan cilindrični i sferni koordinatni sustav uz priložene slike u radu. Objašnjen je Gaussov i Stokeov teorem . Uvedeni su pojmovi gradijent vektorskog polja, rotacija i divergencija vektorskog polja. U radu su navedeni i primjeri vektorskih polja u fizici kao što su magnetska polja, električna polja i elektromagnetska polja. Objašnjene su i Maxwellove jednadžbe. Riješeni su i primjeri zadataka iz danog područja.

ŽIVOTOPIS

Tomislav Knežević rođen je 2.prosinca 1994 godine u gradu Nova Gradiška, Hrvatska. U Novoj Gradiški je pohađao Osnovnu školu Ljudevita Gaja, nakon koje je upisao Gimnaziju Nova Gradiška, općeg smjera. 2013. godine upisuje se na Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija kao redovan student.

Potpis:_________________

LITERATURA

[1] https://www.fsb.unizg.hr/mat-4/

[2] http://master.grad.hr/nastava/matematika/mat2/node15.html

[3] https://hr.wikipedia.org/wiki/Vektorsko_polje

[4] Prof. Dr. Ing. Boris Apsen, Repetitorij više matematike treći dio, tehnička knjiga, Zagreb 1968.

[5] Krešimir Horvatić, Linearna algebra 1. dio, Prirodoslovno – matematički fakultet, Zagreb

[6] htpp//lavica.fesb.unist.hr

SAŽETAK

Cilj ovog rada je objasniti što je vektorska funkcija te je definirati i uvesti pojmove koji su bitni i vezani za to područje. Prvo je definirana vektorska funkcija uz pojmove limes vektorske funkcije, hodograf vektorske funkcije i svojstva neprekidnosti. Objašnjene su derivacije i integrali vektorskih funkcija. Nakon toga, uvedeni su i ostali koordinatni sustavi te je spomenut Gaussov i Stokeov teorem. Definirani su operatori vektorskog polja, a to su gradijent, rotacija i divergencija vektorskog polja. Na kraju se spominju primjene vektorskih polja u fizici, Maxwellove jednadžbe te riješeni primjeri zadataka.

Ključne riječi : vektorska analiza, vektorska funkcija, vektorsko polje, derivacija, integral, divergencija, rotacija, koordinatni sustav, Maxwell, Gauss, Stokes

SUMMARY

The main goal of this paper is to explain what is vector function and to define and introduce concepts that are relevant and related to that area. Firstly, vector function is defined by the terms of limit of the vector function, the graph of vector function and continuous function properties. Also, derives and integral of vector functions are explained. Furthermore, other coordinate systems were introduced and Gaussian and Stokes theorem were mentioned. Vector field operators are defined which are gradient, curl and divergence of the vector field. In the end is pointed out the use of vector fields in physics. Maxwell's equations and solved examples of tasks are mentioned.

Key words: vector calculus, vector function, vector field, derivate, integral, divergence, curl, coordinate system, Maxwell, Stokes