

# Određivanje položaja objekta u prostoru na temelju sinergije višesenzorskih prostorno vremenskih značajki

---

Zubčić, Matej

Master's thesis / Diplomski rad

2017

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:200:613607>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-14**

*Repository / Repozitorij:*

[Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek](#)



**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I  
INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA**

**Sveučilišni studij računarstva, smjer procesno računarstvo**

**ODREĐIVANJE POLOŽAJA OBJEKTA U PROSTORU  
NA TEMELJU SINERGIJE VIŠESENZORSKIH  
PROSTORNO VREMENSKIH ZNAČAJKI**

**Diplomski rad**

**Matej Zubčić**

**Osijek, 2017. godina**

# Sadržaj

<b>1. UVOD .....</b>	<b>1</b>
1.1. SENZORSKA SINERGIJA .....	1
1.2. PREGLED RADA.....	3
<b>2. KOORDINATNI SUSTAVI.....</b>	<b>4</b>
2.1. TRANSFORMACIJE KOORDINATNIH SUSTAVA.....	6
2.1.1. Kvaternioni.....	7
2.1.2. Prikaz položaja putem Euler-ovih kutova izvedenih iz kvaterniona položaja.....	8
<b>3. ODREĐIVANJE POLOŽAJA OBJEKTA U PROSTORU.....</b>	<b>9</b>
3.1. SENZORI.....	10
3.1.1. Akcelerometar .....	10
3.1.2. Žiroskop.....	10
3.1.3. Magnetometar.....	10
3.2. KINEMATIČKI MODEL SUSTAVA .....	11
<b>4. KALMANOV FILTER.....</b>	<b>12</b>
4.1. STANDARDNI KALMANOV FILTER .....	12
4.2. PROŠIRENI KALMANOV FILTER .....	13
<b>5. KALMANOV FILTER ZA ODREĐIVANJE POLOŽAJA .....</b>	<b>16</b>
5.1. MULTIPLIKATIVNI PROŠIRENI KALMANOV FILTER.....	17
5.2.1. Propagacija nominalnog stanja:.....	18
5.2.2. Propagacija stanja pogrešaka u diskretnome obliku.....	18
5.2.3. Korekcija stanja pogrešaka u diskretnome obliku .....	20
5.2.4. Unapređenje estimiranog stanja .....	22
5.2.5. Određivanje početnog položaja tijela .....	23
<b>6. MJERENJA I REZULTATI.....</b>	<b>25</b>
6.1. STVARNI MJERENI SIGNALI .....	26
6.1.1. Senzorska mjerenja.....	26
6.1.2. Vicon referentna mjerenja .....	28
6.2. REZULTATI SENZORSKE FUZIJE .....	31
6.2.1. Analiza estimiranih parametara položaja .....	32
<b>7. ZAKLJUČAK.....</b>	<b>38</b>
<b>LITERATURA .....</b>	<b>39</b>
<b>SAŽETAK.....</b>	<b>41</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>42</b>
<b>ŽIVOTOPIS.....</b>	<b>43</b>
<b>PRILOZI.....</b>	<b>44</b>

# 1. Uvod

Određivanje položaja objekta jedan je od osnovnih pod zahtjeva u mnogim autonomnim ili polu autonomnim robotskim sustavima, gdje se informacija o položaju koristi kao međukorak između dinamike tijela (mjerene sensorima) i kontrolnog dijela sustava. Kod bespilotnih letjelica (engl. *Unmanned Aerial Vehicle*), informaciju o položaju možemo koristiti kao dio zatvorene upravljačke petlje prilikom stabilizacije iste. Zbog nesavršenosti korištenih senzora, ali i zbog dinamičkih kretanja sustava, potrebno je iskoristiti sinergiju senzora kako bi, po mogućnosti, ostvarili optimalnu estimaciju položaja. Cilj ovoga rada je realizacija sustava koji omogućava estimaciju položaja tijela u stvarnome vremenu putem senzorske fuzije te je potrebno i ispitati točnost takve realizacije u stvarnim uvjetima rada.

## 1.1. Senzorska sinergija

Temeljni motiv više-senzorske sinergije podataka je poboljšanje kvalitete informacijskog izlaza u procesu zvanom sinergija. Upotreba više od jednoga senzora može poboljšati sinergijski učinak na više načina: povećana prostorna i vremenska pokrivenost, povećana otpornost na pogreške u senzoru i algoritmu, bolja otpornost na šum te povećana točnost estimacije [1].

Neke od potencijalnih prednosti više-senzorske fuzije su [2]:

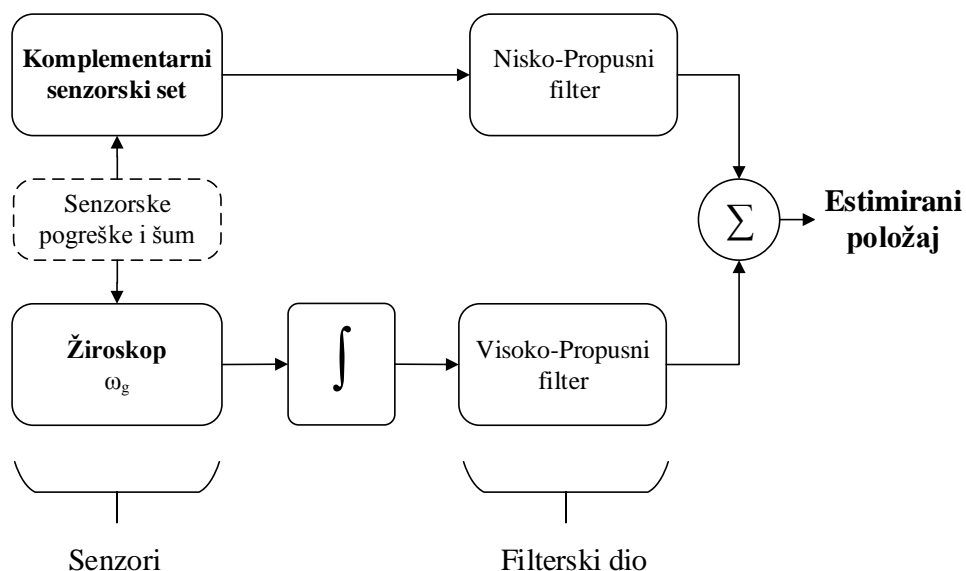
- Više senzora može pružiti redundanciju; koja može dati informaciju u slučaju djelomične pogreške, tj. povećava otpornost na kvarove funkcionalnu robusnost i operacijske performanse, npr. u slučaju gubitka podataka s jednog od senzora.
- Jedan od senzora može promatrati nešto što drugi ne mogu, to daje poboljšanu prostornu pokrivenost te komplementarne informacije postaju dostupne.
- Mjerenja jednog senzora potvrđena su mjerenjima s drugih senzora, poboljšana pouzdanost.
- Združivanje podataka dovodi to smanjenja mogućnosti pogrešnog zaključka, time i manje nepouzdanosti.
- Povećanje dimenzionalnosti mjerenoga prostora, npr. mjerenje željene veličine s optičkim i ultrazvučnim sensorima dovodi do otpornosti sustava na smetnje koje mogu utjecati na sustave pojedinačno, a time se osigurava i kontinuiran tok podataka.
- Fuzija više neovisnih mjerenja može povećati rezoluciju, povećana prostorna pokrivenost.
- Povećana vremenska pokrivenost, podatci su kontinuirano dostupni.

Povećana detekcija objekata jer se u sustavu nalazi manje nepouzdanosti zbog fuzijskoga procesa

### 1.1.1. Komplementarni pristup sinergiji senzora pri određivanju položaja

Komplementarni pristup traži i istražuje redundanciju senzora kako bi uspješno odbacio smetnje u mjerenjima, a da pri tome ne utječe na samu karakteristiku mjerenih signala. Položaj tijela u prostoru moguće je odrediti samo na temelju žiroskopa uz pomoć kinematičkog modela tijela, tj. kontinuiranom integracijom kinematičkog modela. Zbog nesavršenosti samoga senzora, proces je pod utjecajem pogreške koja neograničeno raste, uzrokovane integracijskim postupkom (engl. *integration drift error*). Kako bi kompenzirali pogrešku, tj. odstupanje od prave vrijednosti, možemo uključiti mjerenja akcelerometra i magnetometra kroz sinergiju kao što je prikazano slikom 1. U tom slučaju, točnost kompenzacije odstupanja ovisi o pouzdanosti mjerenja akcelerometra i magnetometra, gdje ta mjerenja mogu bit pod utjecajem linearne akceleracije ili magnetskih smetnji. Iz tog razloga, poželjno je ustanoviti ako su pomoćna mjerenja pod utjecajem smetnje, kratkotrajne ili stalne te ih zamijeniti s pouzdanijima, npr. mjerenja žiroskopa ovise samo o promijeni kutne brzine bez utjecaja mogućih linearnih gibanja ili magnetskih polja u senzorskom okruženju te se mogu podrazumijevati kao pouzdanija mjerenja u odnosu na mjerenja akcelerometra i magnetometra koji se mogu nalaziti pod utjecajem neke smetnje.

U ovome radu koristit ćemo metodu Kalmanovog filtera kako bi ostvarili senzorsku fuziju; gdje mjerenja žiroskopom kroz kinematički model koristimo kako bi dobili informaciju o položaju, a zatim podatke s akcelerometra i magnetometra koristimo za poboljšanje točnosti estimacije položaja.



Slika 1.1 Komplementarni pristup fuziji senzora.

## 1.2. Pregled rada

U nastavku ovog rada, dano je objašnjenje i predstavljeno jedno rješenje problema određivanja položaja objekta u prostoru na temelju jeftinih inercijskih i magnetskih senzora.

Poglavlje 2, daje pregled koordinatnih sustava u kojima možemo izraziti položaj čvrstog tijela, tu je ujedno dan i kratki pregled parametrizacija kojima možemo opisati položaj tijela unutar nekog referentnog sustava. Zbog prednosti navedenih u ovome poglavlju, u nastavku rada koristimo kvaternione za opis položaja i gibanja tijela u prostoru.

Poglavlje 3, daje opis problema određivanja položaja tijela, koji je poznat i kao Wahbin problem. S obzirom kako položaj određujemo na temelju senzorskim mjerenja, dan je kratki opis tih senzora. Dinamika gibanja čvrstog tijela opisana je kinematičkom jednadžbom na kraju ovog poglavlja.

Poglavlje 4, predstavlja teorijski pregled standardnog i proširenog Kalmanovog filtera. Prošireni Kalmanov filter izražen je u indirektnome obliku, tj. kao estimator stanja pogrešaka. Ovo poglavlje predstavlja uvod u poglavlje 5.

Poglavlje 5, objašnjava dva pristupa estimacije stanja sustava, točnije direktni i indirektni pristup. Tu su navedene prednosti indirektnog pristupa te se ostatak poglavlja fokusira na multiplikativni prošireni Kalmanov filter (MEKF) kao estimator položaja objekta. U ostatku ovog poglavlja dan je opis MEKF algoritma i njegov deterministički oblik.

Poglavlje 6, provodi analizu točnosti razvijenog MEKF estimatora na temelju estimiranih parametara sustava i referentnih mjerenja.

Poglavlje 7, kao zaključak daje analizu koraka i rezultanata ovoga rada.

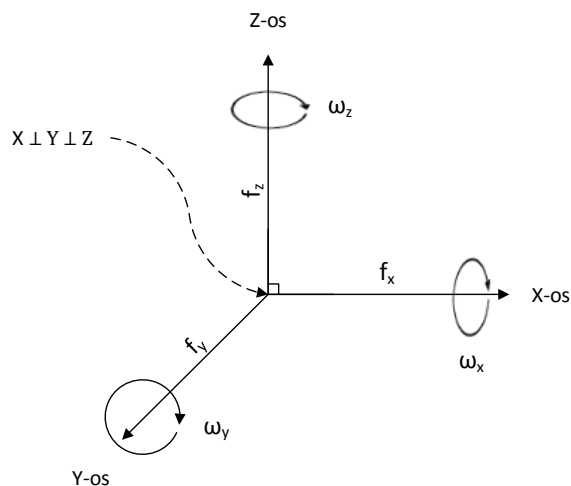
## 2. Koordinatni sustavi

Koordinatne sustave koristimo kako bi izrazili poziciju nekog objekta u odnosu na neku referencu. To nam govori kako su nam potrebna dva koordinatna sustava, tj. sustav objekta i referentni sustav. Sustav objekta opisuje tijelo čiju poziciju i položaj želimo odrediti. Referentni sustav opisuje poznato tijelo kao što je Zemlja te u odnosu na njega želimo odrediti položaj objekta.

Dio procesa estimacije položaja je i točno određivanje referentnih koordinatnih sustava. Svaki od tih sustava je okomit, desni koordinatni (*engl. right-handed*) sustav ili set osi [3].

Definiramo ih kao:

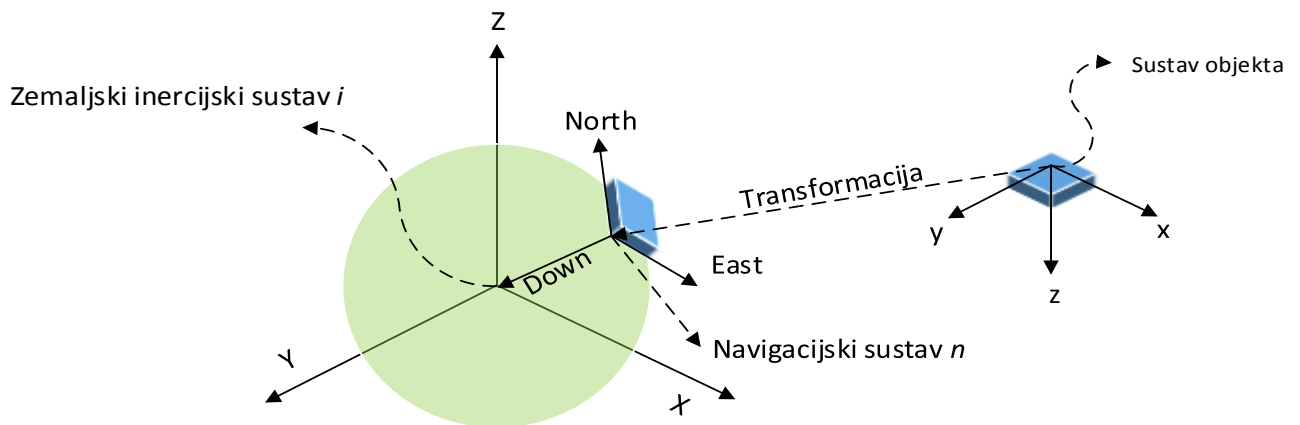
- Sustav senzora (*s-sustav*). Ovo je referentni sustav u kojemu se nalaze inercijski senzori, a čije središte se nalazi u centru instrumentacijskog skupa sa slobodno određenim smjerom ortogonalnih osi. Primjer ovakvoga sustava dan je slikom 2.1. Ovdje treba pristupiti pažljivo, jer sve neortogonalnosti između osi akcelerometra i žiroskopa unose pogrešku u sustav. U našem slučaju ćemo smatrati međudnos senzorskih osi ortogonalnim, jer tehnička izvedba samih senzora to dopušta.



**Slika 2.1** Senzorski sustav.

- Sustav tijela (*engl. body frame*) (*b-sustav*), referentni je sustav tijela čije kretanje promatramo. Odnos *b-sustava* i *s-sustava* opisan je kroz transformacije kretanja (translaciju i rotaciju), a kroz te transformacije možemo poravnati osi senzora sa osima tijela, ako se one razlikuju.

- Navigacijski sustav ( $n$ -sustav) je lokalni geografski sustav koji ima određište na mjestu gdje se nalazi navigacijski sustav, a osi su mu poravnate u smjeru sjevera (engl. *North*), istoka (engl. *East*) i vertikalno u smjeru prema dolje (engl. *Down*).
- Inercijski sustav ( $i$ -sustav). Sustav je fiksiran s ishodištem u centru Zemlje te ne vrši rotaciju u odnosu na zvijezde, a osi  $x$  i  $y$  leže na ekvatorskoj plohi dok je os  $z$  u smjeru Zemljinog sjevernog pola (polarna rotacijska os).
- Zemaljski sustav (engl. *Earth frame*) ( $e$ -sustav). Sustav je fiksiran s ishodištem u centru Zemlje gdje mu je  $x$ -os definirana u smjeru presjeka Greenwich meridijana i Zemljinog ekvatora,  $z$ -os je definirana jednako kao i kod inercijskog sustava dok je  $y$ -os određena desnim koordinatnim sustavom. Bitno je napomenuti kako  $e$ -sustav prati Zemljinu rotaciju koju možemo smatrati konstantnom.



**Slika 2.2** Prikaz referentnoga sustava (lijevo) i sustava objekta (desno).

U ovome radu proučavamo problem relativne lokalizacije, tj. određivanje položaja u odnosu na sustav Zemlje. Cilj nam je odrediti položaj objekta u lokalnome prostoru (npr. unutar zgrade), gdje kao referentni sustav uzimamo  $n$ -sustav. Ovaj sustav je pod utjecajem Zemljine rotacije te je u slučajevima potrebe za vrlo preciznom navigacijom potrebno to uzeti u obzir, ali u slučajevima kada je očekivana pogreška žiroskopa veća od utjecaja Zemljine rotacije, tu rotaciju možemo zanemariti, kao što ćemo učiniti u ovome radu. Odnos sustava promatranog objekta, navigacijskog sustava i inercijskog sustava prikazan je slikom 2.2.



## 2.1. Transformacije koordinatnih sustava

Kao što smo ustanovili u prethodnome podglavlju, kako bi bilo moguće praćenje položaja objekta, moramo izvršiti transformaciju iz sustava objekta kojega želimo pratiti u neki referentni sustav. Neke metode koje se koriste za te transformacije su, Euler-ovi kutovi, DCM prikaz (engl. *direction cosine matrix*), kvaternioni (engl. *quaternions*).

Slijedi kratki pregled transformacija dan u [4], a za detaljan matematički razvoj i objašnjenje pogledati [4], [5], [6], [7], [8]:

- Kosinusi smjera, tj. DCM je  $3 \times 3$  matrica, čiji stupci predstavljaju jedinične vektore definirane u objektu projicirane u referentni sustav.
- Euler-ovi kutovi. Transformacija iz jednoga koordinatnoga sustava je definirana kao tri slijedne rotacije oko različitih osi izvedene jedna za drugom. Euler-ov prikaz jedan je od jednostavnijih pristupa zbog svoje fizičke intuitivnosti. Tri kuta tih rotacija su kutovi mjereni između osi sustava tijela.
- Kvaternioni. Određivanje položaja putem kvaterniona omogućava transformaciju iz jednoga koordinatnoga sustava u drugi putem jedne rotacije oko vektora definiranoga u referentnome sustavu. Kvaternion je vektor s četiri elementa koji opisuje orijentaciju tog vektora i njegovu magnitudu.

Bitno je napomenuti kako kod izvršavanja rotacija izraženih putem Euler-ovih kutova nije svejedno kojim slijedom te rotacije izvršavamo. Za potrebe ovoga rada, Euler-ove kutove koristimo isključivo kao intuitivni opis rotacija. Međutim, potrebno je odrediti osi uz koje su te rotacije koordinatnog sustava tijela vezane. Ovdje ćemo ih definirati, rotacija oko:

- $y$ -osi, predstavlja nagib (pozitivan prema dolje, u smjeru kazaljke na satu)
- $x$ -osi, predstavlja rotaciju (pozitivna u desno, u smjeru kazaljke na satu)
- $z$ -osi, predstavlja zakret (pozitivan u desno, u smjeru kazaljke na satu)

U poglavlju 3 izrazit ćemo kinematički model položaja čvrstog tijela pomoću kvaterniona jer takav model ima linearni opis, nema singularnosti kao što je slučaj kod Euler-ovih kutova [6] te ima manje računalne zahtjeve jer za njegov izračun ne trebaju trigonometrijske operacije, a to je vrlo bitno s obzirom na moguće izvođenje računskih operacija u ugrađenome sustavu. Iz tog razloga u ostatku ovoga poglavlja razmatrat ćemo vezu između gore spomenutih transformacija u odnosu na kvaternione.

### 2.1.1. Kvaternioni

Proizvoljni položaj u 3D prostoru nekog sustava  $A$  u odnosu na sustav  $B$  može biti prikazan jediničnim kvaternionom  ${}^B_A\mathbf{q}$  koji je definiran kao:

$${}^B_A\mathbf{q} = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T = e^{\phi\mathbf{u}/2} = \left[ \cos\frac{\phi}{2} \quad u_x\sin\frac{\phi}{2} \quad u_y\sin\frac{\phi}{2} \quad u_z\sin\frac{\phi}{2} \right]^T \quad (2-1)$$

gdje je  $\phi$  kut rotacije, a  $\mathbf{u}$  je jedinični vektor koji predstavlja rotacijsku os. Nadalje u ostatku teksta, gornju jednadžbu koja daje prikaz rotacijskog vektora  $\mathbf{v} = \phi\mathbf{u}$  u kvaternionskome obliku zapisivat ćemo kao  $\mathbf{q} = \mathbf{q}\{\mathbf{v}\}$ .

Ako promatramo jedinični kvaternion  $\mathbf{q}$ , norma mu je jedan, njegova konjugacija  $\mathbf{q}^*$  jednaka je inverznom kvaternionu i opisuje inverznu rotaciju. Slijedi kako, konjugirani kvaternion može biti korišten za opis rotacije sustava  $B$  u odnosu na sustav  $A$ , a to je definirano prema:

$${}^B_A\mathbf{q}^* = {}^A_B\mathbf{q} = [q_0 \quad -q_1 \quad -q_2 \quad -q_3]^T \quad (2-2)$$

Kvaternion koji opisuje konačni položaj nakon niza rotacija možemo pronaći izračunom umnoška kvaterniona koji opisuju zatvoreni slijed rotacija između sustava, a pri tome pazimo da umnožak kvaterniona nije komutativan, tj. redoslijed kojim vršimo rotacije je bitan. Primjer je dan jednadžbom (2-3).

$${}^C_A\mathbf{q} = {}^C_B\mathbf{q} \otimes {}^B_A\mathbf{q} \quad (2-3)$$

Umnožak dva kvaterniona  $\mathbf{p}$  i  $\mathbf{q}$ , definiran je kao:

$$\mathbf{p} \otimes \mathbf{q} = \begin{bmatrix} p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3 \\ p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2 \\ p_0q_2 - p_1q_0 + p_2q_0 + p_3q_0 \\ p_0q_3 + p_1q_0 - p_2q_1 + p_3q_1 \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

Jediničnim kvaternionima možemo vršiti rotacije vektora u 3D prostoru, npr. vektor  ${}^A\mathbf{v}$ , izražen u sustavu  $A$  možemo izraziti u sustavu  $B$  slijedom operacija:

$${}^B\mathbf{v}_q = {}^B_A\mathbf{q} \otimes {}^A\mathbf{v}_q \otimes {}^B_A\mathbf{q}^* \quad (2-5)$$

gdje  ${}^A\mathbf{v}_q$  i  ${}^B\mathbf{v}_q$  predstavljaju opis vektora  $\mathbf{v}$  u sustavim  $A$  i  $B$ .

Vektor  $\mathbf{v}$  je izražen u čistom kvaternionskome obliku predstavljenom jednadžbom (2-6).

$$\mathbf{v}_q = [0 \quad \mathbf{v}]^T = [0 \quad v_x \quad v_y \quad v_z]^T \quad (2-6)$$

Inverzna rotacija koja opisuje vektor  ${}^B\mathbf{v}$  u odnosu na sustav  $A$  dana je jednadžbom (2-7). Jednadžba vrijedi ako je kvaternion jedinični pri čemu koristimo njegovu konjugaciju.

$${}^A\mathbf{v}_q = {}^B\mathbf{q}^* \otimes {}^B\mathbf{v}_q \otimes {}^B\mathbf{q} = {}^A\mathbf{q} \otimes {}^B\mathbf{v}_q \otimes {}^A\mathbf{q}^* \quad (2-7)$$

Rotaciju iz jednadžbe (2-5) možemo zapisati u matricnom obliku kao što je prikazano u jednadžbi (2-8).

$${}^B\mathbf{v}_q = \mathbf{R}({}^B\mathbf{q}) {}^A\mathbf{v} \quad (2-8)$$

Matrica  $\mathbf{R}({}^B\mathbf{q})$  spada u posebnu ortogonalnu grupu  $SO(3)$  (determinanta jednaka jedan) i izražena je DCM oblikom definiranim elementima kvaterniona  ${}^B\mathbf{q}$  kao:

$$\mathbf{R}({}^B\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

ili u obliku:

$$\mathbf{R}({}^B\mathbf{q}) = (q_w^2 - \mathbf{q}_v^T \mathbf{q}_v) \mathbf{I} + 2\mathbf{q}_v \mathbf{q}_v^T + 2q_w [\mathbf{q}_v]_{\times} \quad (2-10)$$

gdje  $q_w$  predstavlja skalarni dio, a  $\mathbf{q}_v$  vektorski dio kvaterniona.  $[\mathbf{q}_v]_{\times}$  predstavlja koso simetričnu matricu.

Prema svojstvima za elemente iz grupe  $SO(3)$ , inverzna rotacija je definirana kao:

$${}^A\mathbf{v} = \mathbf{R}({}^A\mathbf{q}) {}^B\mathbf{v} = \mathbf{R}^T({}^B\mathbf{q}) {}^B\mathbf{v} \quad (2-11)$$

### 2.1.2. Prikaz položaja putem Euler-ovih kutova izvedenih iz kvaterniona položaja

Glavni nedostatak kvaterniona proizlazi iz toga jer su definirani u  $\mathbb{R}^3$  skupu te se ne mogu direktno prikazati u 3D prostoru, čime je njihov opis i prikaz neintuitivan. Kako bi se ovo djelomično izbjeglo, u ovome radu koristit ćemo Euler-ove kutove dobivene iz kvaterniona koji daje opis svih obavljenih rotacija, tj. kvaternion položaja. Set jednadžbi (2-12), (2-13) i (2-14) daje opis položaja putem Euler-ovih kutova.

$$\phi(\text{roll}) = \arctan2[2q_2q_3 - 2q_0q_1, 1 - 2q_1^2 - 2q_2^2] \quad (2-12)$$

$$\theta(\text{pitch}) = \arcsin(-2q_1q_3 - 2q_0q_2) \quad (2-13)$$

$$\psi(\text{yaw}) = \arctan2[2q_1q_2 - 2q_0q_3, 1 - 2q_2^2 - 2q_3^2] \quad (2-14)$$

### 3. Određivanje položaja objekta u prostoru

Problem određivanje položaja objekta u prostoru svodi se na pronalaženje jedinstvene ortogonalne rotacijske matrice  $\mathbf{R}$  (3x3 matrica s determinantom jednakom 1) koja određuje orijentaciju koordinatnog sustava fiksiranog uz čvrsto tijelo u odnosu na neki referentni koordinatni sustav. Rotacija djeluje kao linearna transformacija skupa osi jednoga koordinatnoga sustava u set osi drugoga koordinatnoga sustava. Takva rotacijska matrica izražena je pomoću sljedeće jednadžbe:

$${}^n_i\mathbf{r} = {}^n_b\mathbf{R}_i^b \mathbf{b} \quad i = 1, \dots, m \quad (3-1)$$

gdje je  $\{{}^n_i\mathbf{r}, \dots, {}^n_m\mathbf{r}\}$  skup referentnih jediničnih vektora koji predstavljaju  $m$  poznatih smjerova u  $n$ -sustavu, npr. smjer zemljinog gravitacijskoga ili magnetskoga polja. Dok,  $\{{}^n_b\mathbf{b}, \dots, {}^n_m\mathbf{b}\}$  predstavlja skup opažanja tih referentnih smjerova mjerenih u koordinatnome sustavu tijela, tj.  $b$ -sustavu. Kako bi mogli riješiti ovaj problem, potrebna su minimalno dva referentna neparalelna opažanja. Najjednostavnije i prvotno rješenje ovoga problema dano je TRIAD metodom [9], međutim ova metoda ne daje optimalno rješenje jer stavlja veću vrijednost na jedan set referentnih vrijednosti u odnosu na drugi [10].

Wahba [11] je formulirala ovaj problem kao problem optimizacije kojom želimo dobiti optimalnu matricu  ${}^n_b\mathbf{R}$  koja minimizira funkciju cilja (engl. *objective function*) koja je izražena jednadžbom:

$$f({}^n_b\mathbf{R}) = \frac{1}{2} \sum a_i |{}^n_i\mathbf{r} - {}^n_b\mathbf{R}_i^b \mathbf{b}|^2 \quad (3-2)$$

gdje su  $a_i$  pozitivne težine povezane uz svako opažanje  ${}^b_i\mathbf{b}$  te vrijedi i da  $\sum a_i = 1$ . Prednost Wahbinog pristupa je taj jer omogućava više vektorskih opažanja, dok TRIAD metoda vrši analizu samo dva, ali i zbog toga jer daje optimalno rješenje. Među najpoznatijim rješenjima prethodno spomenutog problema su Davenportova  $q$ -metoda [12], Shusterov QUEST algoritam [13].

Prethodno spomenute metode spadaju u grupu determinističkih rješenja jer u model problema ne uzimaju i stohastičke pogreške, takve metode pružaju takozvani bez-memorijski pristup određivanju položaja krutog tijela. Metode koje uzimaju u obzir i stohastičke pogreške, nazivaju su stohastičkim filterima ili estimatorima. Ovakve metode pružaju takozvani memorijski pristup jer u najnovijem estimiranome položaju sadržan i dio informacije o prethodnim estimacijama položaja. Drugi skup metoda koriste jednadžbe stanja procesa kako bi estimirale parametre

takvoga procesa. Jedna od najzastupljenijih metoda korištenih u tu svrhu je Kalmanov filter. Kompletan pregled obaju vrsta metoda određivanja položaja dan je u [10, 14].

### 3.1. Senzori

Mjerne parametre opažanoga procesa određujemo pomoću mjerne jedinice koja se sastoji od inercijskih i magnetskih senzora MIMU (engl. *Magnetic Inertial Measurement Unit*). Sastavni senzori ovih jedinica su, žiroskopi, akcelerometri i magnetometri. Noviji razvoj u području MEMS (engl. *Micro Electro Mechanical Systems*) tehnologije omogućio je razvoj jeftinih, malih i laganih senzora. Međutim, jeftini senzori su pod utjecajem vremenski promjenjivih pogrešaka umanjujući njihovu točnost [15]. Senzori daju vektorska mjerenja nad kojima treba izvršiti filtriranje kako bi se ostvarila točnija estimacija položaja.

#### 3.1.1. Akcelerometar

Akcelerometar mjeri silu koja djeluje na objekt koja ga podržava. Ako imamo sustav od tri akcelerometra koji se nalaze na ortogonalnim osima ne nekom tijelu, a njihove se osjetljive osi podudaraju s osima u kojima mjerimo inercijsku silu koja djeluje na tijelo, onda izlaz 3-osnog akcelerometra u sustavu tijela možemo predstaviti jednadžbom:

$${}^G \mathbf{g} = \mathbf{R}({}^G_L \mathbf{q}) {}^L \mathbf{a} \quad (3-3)$$

gdje  ${}^G \mathbf{g}$  predstavlja akceleraciju izraženu u globalnome referentnome sustavu, a  ${}^L \mathbf{a}$  predstavlja akceleraciju izraženu u lokalnome referentnome sustavu:

$${}^L \mathbf{a} = [a_x \quad a_y \quad a_z]^T, \|\mathbf{a}\| = 1 \quad (3-4)$$

$${}^G \mathbf{g} = [0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (3-5)$$

#### 3.1.2. Žiroskop

Žiroskop je inercijski senzor koji mjeri kutnu brzinu sustava kojemu je pridijeljen, tj. u kojem se nalazi, u odnosu na apsolutni referentni (inercijski) sustav. Izlaz 3-osnog žiroskopa u sustavu tijela (lokalnome) dan je vektorom:

$${}^G \boldsymbol{\omega} = [\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T \quad (3-6)$$

#### 3.1.3. Magnetometar

Magnetometar je uređaj koji mjeri smjer i jakost magnetskog polja, sa svrhom mjerenja Zemljinog magnetskog polju. Izlaz 3-osnog magnetometra u lokalnome sustavu definiran je sljedećim vektorom:

$${}^G \mathbf{b} = \mathbf{R}({}^G_L \mathbf{q}) {}^L \mathbf{m} \quad (3-7)$$

gdje  ${}^G\mathbf{b}$  predstavlja stvarno magnetsko polje (na trenutnoj lokaciji Zemlje), a  ${}^L\mathbf{m}$  predstavlja lokalno magnetsko polje te su definirani vektorima prikazanima u jednažbama (3-8) i (3-9).

$${}^L\mathbf{m} = [m_x \quad m_y \quad m_z]^T, \|\mathbf{m}\| = 1 \quad (3-8)$$

$${}^G\mathbf{b} = [b_x \quad b_y \quad b_z]^T, \|\mathbf{h}\| = 1 \quad (3-9)$$

### 3.2. Kinematički model sustava

Kinetička jednažba koja u obliku jediničnog kvaterniona opisuje promijene položaja tijela u vremenu s obzirom na promjenu kutne brzine mjerene žiroskopom definirana je diferencijalnom jednažbom [13]:

$${}^G\dot{\mathbf{q}}_{\omega, t_k} = \frac{1}{2} {}^G\mathbf{q}_{t_{k-1}} \otimes {}^L\boldsymbol{\omega}_{q, t_k} \quad (3-10)$$

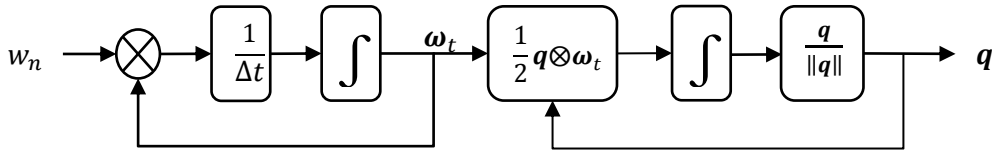
gdje je  ${}^L\boldsymbol{\omega}_{q, t_k} = [0 \quad \omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T$  vektor kutne brzine izražen kao čisti kvaternion u trenutku  $t_k$ , a  ${}^G\mathbf{q}_{t_{k-1}}$  predstavlja prethodnu estimaciju položaja.

Položaj tijela u lokalnom sustavu u odnosu na globalni možemo izračunati numeričkom integracijom kvaterniona izraženog jednažbom (3-10), a diskretni oblik tog postupka izražen je jednažbom (3-11) koja predstavlja integracijski postupak nultog reda kao što je pojašnjeno u [16].

$${}^G\mathbf{q}_{\omega, t_k} = {}^G\mathbf{q}_{t_{k-1}} \otimes \mathbf{q}\{\bar{\boldsymbol{\omega}}\Delta t\} \quad (3-11)$$

U jednažbi  $\Delta t$  predstavlja period uzorkovanja te ga računamo kao  $\Delta t = t_k - t_{k-1}$ . U daljnjoj implementaciji, pretpostavit ćemo kako je kutna brzina konstantna te je jednaka srednjoj vrijednosti između dva trenutka uzorkovanja, tj. koristimo sljedeću jednažbu:

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\boldsymbol{\omega}_{t_k} + \boldsymbol{\omega}_{t_{k-1}}}{2} \quad (3-12)$$



**Slika 3.1** Kinetički model koji opisuje položaj u kvaternioniskome obliku.

## 4. Kalmanov Filter

U ovome poglavlju dan je kratki teorijski pregled jednadžbi linearnog (standardnog) Kalmanovog filtera i nelinearnog (proširenog) Kalmanovog filtera. Više o teorijskog pozadini i derivaciji jednadžbi Kalmanovog filtera moguće je pronaći u [17, 4, 18].

### 4.1. Standardni Kalmanov filter

Kalmanov filter predstavlja Bayesovu vjerojatnost  $p(\mathbf{x}_t)$  kao Gaussovu distribuciju određenu srednjom vrijednošću  $\mathbf{x}_t$  i kovariancom  $\mathbf{P}_t$ . Pretpostavka je kako se proces koji određuje pravo stanju sustava  $\mathbf{x}$  može prikazati linearnom jednadžbom oblika:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{F}_t \mathbf{x}_{t-\delta t} + \mathbf{w}_t \quad (4-1)$$

gdje je  $\mathbf{w}_t$  šum procesa te pretpostavljamo kako ga možemo prikazati kao Gaussov bijeli šum raspodijeljen s kovariancom  $\mathbf{Q}_t$ :

$$\mathbf{w}_t = \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_t) \quad (4-2)$$

Mjerenja u sustav dolaze u diskretnim vremenskim trenucima te imaju linearan odnos prema sljedećoj jednadžbi:

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{H}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \quad (4-3)$$

gdje je  $\mathbf{v}_t$  je šum mjerenja te uz jednaku pretpostavku da ga možemo prikazati kao Gaussov bijeli šum:

$$\mathbf{v}_t = \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_t) \quad (4-4)$$

Ako su gore navedene pretpostavke zadovoljene, tada Kalmanov filter predstavlja optimalnu estimaciju stanja koja se provodi u dva koraka. Prvi korak je propagacija ili predikcija stanja određena srednjom vrijednošću  $\mathbf{x}_t$  i kovariancom  $\mathbf{P}_t$  pomoću sljedećih jednadžbi:

$$\hat{\mathbf{x}}_t^- = \mathbf{F}_t \hat{\mathbf{x}}_{t-\delta t} \quad (4-5)$$

$$\mathbf{P}_t^- = \mathbf{F}_t \mathbf{P}_{t-\delta t} \mathbf{F}_t^T + \mathbf{Q}_t \quad (4-6)$$

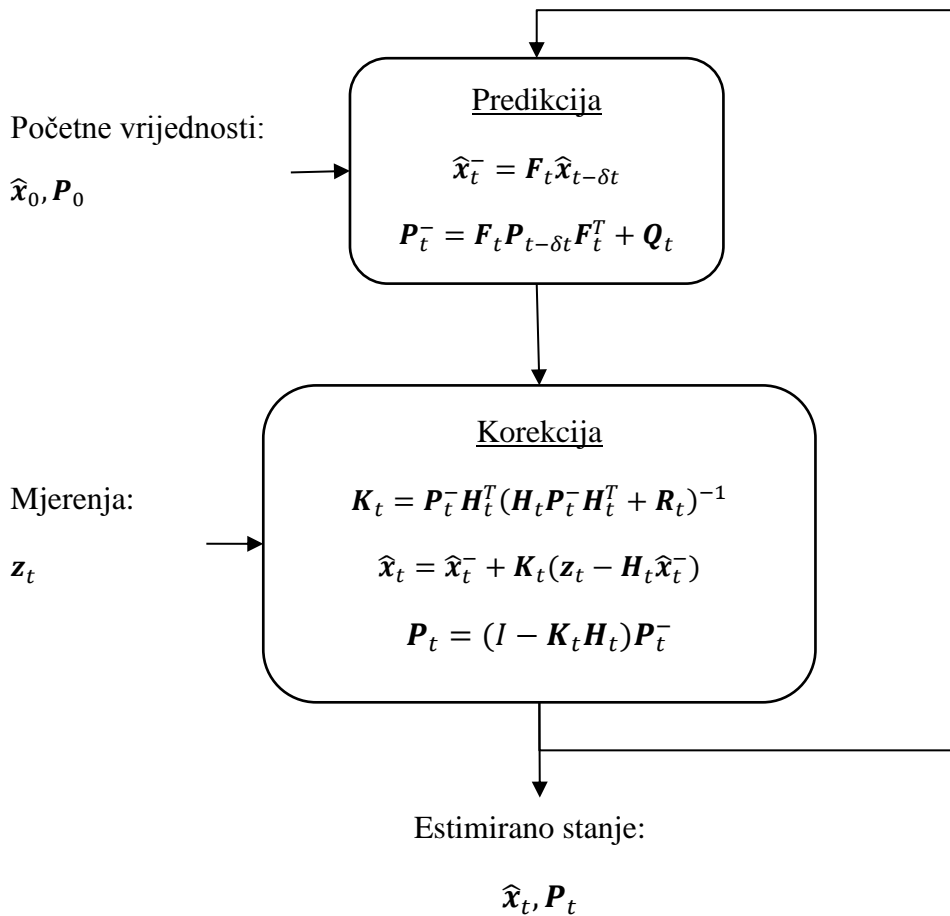
Drugi korak predstavlja korekciju estimiranoga stanje na temelju mjerenja pomoću sljedećih jednadžbi:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T (\mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1} \quad (4-7)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \hat{\mathbf{x}}_t^- + \mathbf{K}_t (\mathbf{z}_t - \mathbf{H}_t \hat{\mathbf{x}}_t^-) \quad (4-8)$$

$$\mathbf{P}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{H}_t) \mathbf{P}_t^- \quad (4-9)$$

Blokovski prikaz standardnog Kalmanovog filtera dan je slikom 4.1.



Slika 4.1 Prikaz standardnog Kalmanovog filtera.

## 4.2. Prošireni Kalmanov filter

Pretpostavka standardnog oblika Kalmanovoga filtera je o linearnosti jednadžbi kojima iskazujemo estimirano stanje i mjerenje. U stvarnome svijetu, u većini slučajeva proces i mjerenja nije moguće iskazati pomoću skupa linearnih jednadžbi. Trenutno razmatrani proces, koji uključuje mjerenja akcelerometra i magnetometra ne posjeduje linearni odnos mjerenja s obzirom na parametre sustava koje želimo estimirati. Prošireni Kalmanov filter (engl. *Extended Kalman Filter, EKF*) vrši linearizaciju u području posljednje estimacije stanja.

Prošireni Kalmanov filter uvodi općenitiji model kojim prikazujemo jednadžbe stanja i mjerenja, kao što je iskazano sljedećim jednadžbama:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{f}_t(\mathbf{x}_{t-\delta t}) + \mathbf{w}_t \quad (4-10)$$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{h}_t(\mathbf{x}_t) + \mathbf{v}_t \quad (4-11)$$



gdje funkcije  $f_t$  i  $h_t$  predstavljaju (moguće nelinearnu) transformacijsku i mjernu jednadžbu. Prethodni skup jednadžbi u proširenom Kalmanovom filteru lineariziran je u području trenutno najbolje estimacije stanja,  $\hat{x}_t$  (*a priori*).

Pravo stanje sustava može biti iskazano kao udio estimiranog stanja i pogreške:

$$\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_t + \delta \mathbf{x}_t \quad (4-12)$$

Slijedi kako jednadžbe (4-10) i (4-11) mogu biti zapisane u obliku:

$$\hat{\mathbf{x}}_t + \delta \mathbf{x}_t = \mathbf{f}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t-\delta t} + \delta \mathbf{x}_{t-\delta t}) + \mathbf{w}_t \quad (4-13)$$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{h}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t-\delta t} + \delta \mathbf{x}_{t-\delta t}) + \mathbf{v}_t \quad (4-14)$$

Uz pretpostavku kako su pogreške stanja znatno manje u odnosu na vrijednost estimiranog stanja, funkcije  $f_t$  i  $h_t$  možemo aproksimirati elementima prvog reda Taylor-ovog niza:

$$\hat{\mathbf{x}}_t + \delta \mathbf{x}_t \approx \mathbf{f}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t-\delta t}) + \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_t}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\hat{\mathbf{x}}_{t-\delta t}} \cdot \delta \mathbf{x}_{t-\delta t} + \mathbf{w}_t \quad (4-15)$$

$$\mathbf{z}_t \approx \mathbf{h}_t(\hat{\mathbf{x}}_t) + \left[ \frac{\partial \mathbf{h}_t}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\hat{\mathbf{x}}_t} \cdot \delta \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \quad (4-16)$$

Uz pretpostavku da je  $\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{f}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t-\delta t})$ , jednadžbe (4-15) i (4-16) možemo zapisati u linearnome obliku, kao što slijedi:

$$\delta \mathbf{x}_t = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_t}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\hat{\mathbf{x}}_{t-\delta t}} \cdot \delta \mathbf{x}_{t-\delta t} + \mathbf{w}_t \quad (4-17)$$

$$\mathbf{z}_t - \mathbf{h}_t(\hat{\mathbf{x}}_t) = \left[ \frac{\partial \mathbf{h}_t}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\hat{\mathbf{x}}_t} \cdot \delta \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \quad (4-18)$$

Iz ovoga vidimo kako linearizirane jednadžbe (4-17) i (4-18) odgovaraju linearnom obliku Kalmanovog filtera prikazanog jednadžbama (4-1) i (4-3), ali sada prošireni Kalmanov filter održava vjerojatnost o pogreškama u stanju, tj.  $\text{Bel}(\delta \mathbf{x}_t)$ . Estimirano stanje proširenog Kalmanovog filtera je prikazano srednjom vrijednošću  $\delta \mathbf{x}_t$  i matricom kovarijance  $\mathbf{P}_t$ .

Estimirani položaj propagiramo u vremenu pomoću jednadžbe:

$$\hat{\mathbf{x}}_t^- = \mathbf{f}_t(\hat{\mathbf{x}}_{t-\delta t}) \quad (4-19)$$

Nakon svakog koraka korekcije filtera, estimirano stanje pogreške  $\delta \mathbf{x}_t$  koristimo kako bi izvršili korekciju konačnog položaja, to možemo zapisati kao:

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \hat{\mathbf{x}}_t^- + \delta \hat{\mathbf{x}}_t \quad (4-20)$$

Bitno je napomenuti kako nakon svake korekcije estimiranu pogrešku postavljamo na nulu, time je estimirana pogreška jednaka je nuli na početku predikacijskog i korekcijskog koraka.

Transformacijska matrica pogrešaka stanja izražena je kao Jakobijeva matrica:

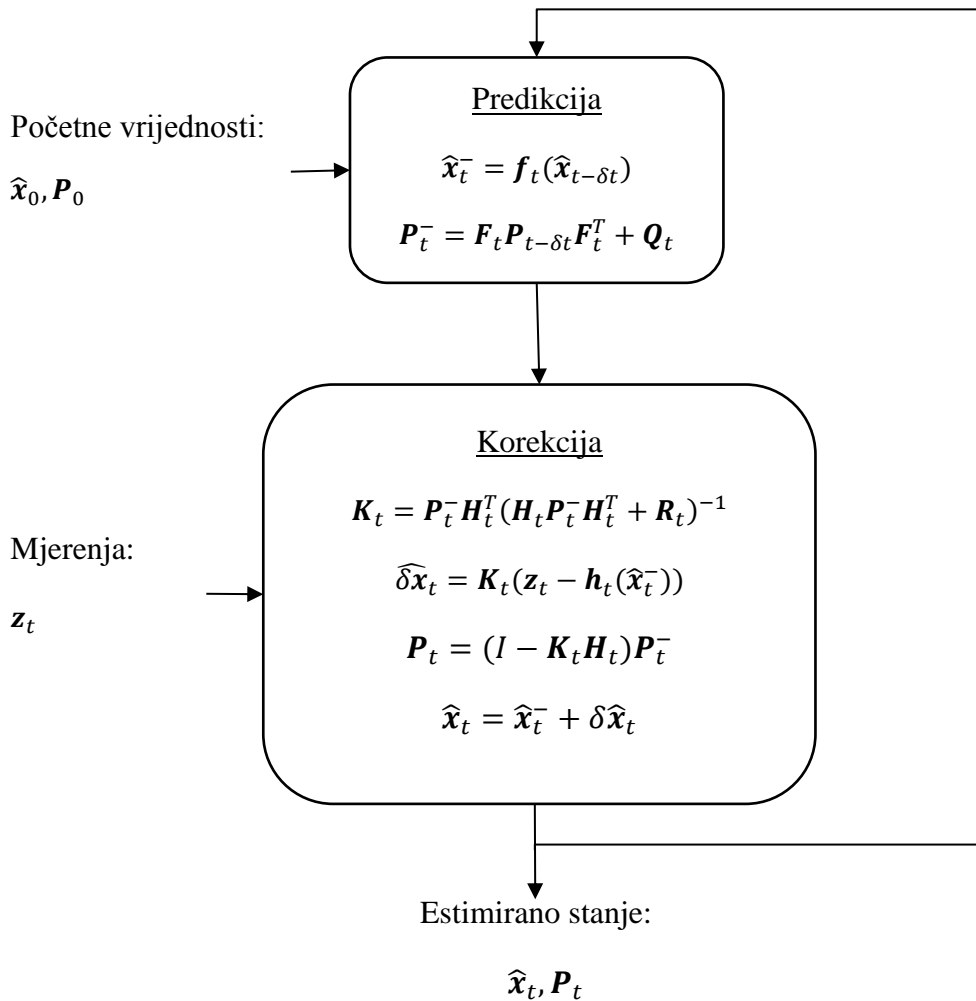
$$\mathbf{F}_t = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_t}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\hat{\mathbf{x}}_{t-\delta t}} \quad (4-21)$$

Iz jednačbe (4-3) i (4-18) možemo zaključiti da mjerenja stanja sustava možemo uključiti u opažanja sustava sljedećom jednačbom:

$$\delta \mathbf{x}_t \equiv \mathbf{y}_t = \mathbf{z}_t - \mathbf{h}_t(\hat{\mathbf{x}}_t) \quad (4-22)$$

gdje je  $\mathbf{h}_t(\hat{\mathbf{x}}_t)$  opservacijska matrica stanja sustava:

$$\mathbf{H}_t = \left[ \frac{\partial \mathbf{h}_t}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\hat{\mathbf{x}}_t} \quad (4-23)$$



Slika 4.2 Prikaz prošireni Kalmanov filter za estimaciju pogrešaka.

## 5. Kalmanov filter za određivanje položaja

Postoje dva osnovna pristupa modeliranju sustava (procesa) i parametara stanja koje koristimo za određivanja položaja objekta u prostoru. Pristupi se razlikuju s obzirom kako izvodimo opis dinamike sustava, tj. razlikujemo direktni i indirektni pristup [17]. Detaljna analiza prethodno spomenutih pristupa u svrhu estimacije položaja dana je u [19], u nastavku slijedi kratki pregled.

Direktni pristup, obuhvaća direktnu integraciju estimiranih parametara u model stanja sustava te u ovome slučaju mjerenja žiroskopa ulaze kao opažanja u sustav. U slučaju složenog opisa dinamike tijela, a time i povećanja broja estimiranih parametara, iteracijski korak Kalmanovog filtera postaje sporiji. Kod brzih promjena u dinamici tijela, postoji mogućnost sporog odziva Kalmanovog filtera što može dovesti do divergencije u estimiranim parametrima, a time i do divergencije samoga filtera. Ovo može imati ozbiljne posljedice ako je direktni Kalmanov filter dio kontrolnog dijela nekog procesa, gdje kratkotrajne pogreške u mjerenjima mogu narušiti stabilnost cijelog sustava. Ovdje možemo dati jednostavan primjer. U slučaju bespilotne letjelice, brze dinamičke kretnje mogu uvesti komponentu translacijske akceleracije koja izrazito narušava točnost mjerenja akcelerometra, tj. nije moguće ispravno odrediti smjer gravitacijske komponente. S obzirom kako su ta vanjska mjerenja sastavni dio estimacijskoga procesa, to može dovesti do nestabilnosti cijeloga sustava.

Indirektni pristup, za razliku od direktnog pristupa ne estimira parametre koji određuju ukupnu dinamiku sustava (engl. *full state estimation*). Ovaj pristup estimira pogreške parametara stanja (engl. *error-state*), tj. pogreške u položaju, na temelju modela pogrešaka izvedenih iz modela koji opisuje dinamiku položaja. Više o ovome bit će rečeno u sljedećem poglavlju. Indirektni Kalmanov filter ujedno održava i raspodjelu vjerojatnosti (engl. *probability distribution*) pogrešaka položaja u odnosu na položaj dobiven na temelju integracije kinematičkog modela rotacije na temelju mjerenja žiroskopa. Svaki put kada mjerenja s žiroskopa postanu dostupna, položaj tijela se propagira na temelju već spomenute kinetičke jednadžbe te se ujedno propagira i stanje pogrešaka sustava. Kada mjerenja s akcelerometra i magnetometra postanu dostupna, vrši se korak korekcije estimiranih pogrešaka stanja na temelju kojih se istome koraku vrši korekcija položaja. U slučaju utjecaja smetnji na mjerenja, sustav posjeduje robusnost. U nastavku rada, koristit ćemo razvoj indirektnog proširenog Kalmanovog filtera koji je dan u [16].

U nastavku ovog poglavlja koristimo algebru kvaterniona predstavljenu u poglavlju 3.2 kako bi opisali promjenu položaja tijela. S obzirom na kinematički model, predstaviti ćemo Kalmanov filter koji uzima u obzir prednost estimacije položaja na temelju preciznih kratkotrajnih mjerenja žiroskopa te dugotrajnu pouzdanost dobivenu iz akcelerometra i magnetometra.

## 5.1. Multiplikativni prošireni Kalmanov filter

U ovome poglavlju dan je kratak pregled metode multiplikativnog Kalmanovog filtera (engl. *Multiplicative Extended Kalman Filter*), nadalje MEKF. Detaljan razvoj i objašnjenje dano je u [20, 21]. U nastavku, dane su jednadžbe MEKF filtera za estimaciju položaja objekta u lokalnome prostoru.

Iz prethodnog poglavlja vidljivo je kako pravo stanje sustava možemo iskazati kao:

$$\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_t^- \oplus \delta \mathbf{x}_t \quad (5-1)$$

Iz jednadžbe (5-1) slijedi, kako bi mogli odrediti (estimirati) stvarno stanje sustava  $\hat{\mathbf{x}}_t$  potrebno je definirati jednadžbe kojima opisujemo nominalno stanje  $\hat{\mathbf{x}}_t^-$  i pogreške stanja  $\delta \mathbf{x}_t$  u svrhu određivanja položaja. Simbol  $\oplus$  u našem slučaju označava kompoziciju između dva stanja, pokazati ćemo u nastavku kako priroda dodavanja estimirane pogreške u „globalni“ kvaternion nije aditivne prirode, nego multiplikativne (s obzirom na kvaternion položaja).

Nominalno stanje definirano je „globalnim“ kvaternionom položaja te propagaciju nominalnog stanja vršimo integracijom kinematičke jednadžbe. Bitno je napomenuti kako u propagaciji nominalnog stanja, ne uključujemo senzorske pogreške. Ako je model stanja pogrešaka definiran za sustav, one postaju osmotrive kada vanjska referentna mjerenja (akcelerometra i magnetometra) postanu dostupna. Referentna mjerenja iskazana u globalnome sustavu transformiramo estimiranim kvaternionom položaja (dio nominalnog stanja) u lokalni senzorski sustav. U slučaju pogreški u referentnim mjerenjima, moguće je neovisno propagirati položaj isključivo na temelju žiroskopa, ali zbog internih senzorskih pogrešaka žiroskopa i integracijskog postupka u propagacijskome koraku brzo dolazi do znatnih pogrešaka u položaju. Iz ovog razloga, u ovome radu uz estimaciju pogrešaka položaja  $\delta \hat{\boldsymbol{\theta}}$  vršit ćemo i estimaciju pogrešaka, tj. odstupanja (engl. *bias*) žiroskopa  $\hat{\boldsymbol{\omega}}_b$ .

Iz prethodne diskusije, možemo zaključiti kako nije dovoljno propagirati samo nominalno stanje sustava, to bi bilo moguće jedino u slučaju kada bi žiroskop bio „savršen“ senzor.

S obzirom na prethodno obrazloženje, nominalno stanje možemo definirati kao:

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} \\ \hat{\boldsymbol{\omega}}_{b_t} \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

gdje  $\hat{\mathbf{q}}$  predstavlja nominalni položaj tijela na kojem ćemo vršiti korekciju kada mjerenja vanjskih senzora postanu dostupna, a  $\hat{\boldsymbol{\omega}}_{b_t}$  nominalno stanje odstupanja žiroskopa.

Stanje pogrešaka definiramo kao:

$$\delta \hat{\mathbf{x}}_t = \begin{bmatrix} \delta \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_{b_t} \end{bmatrix} \quad (5-3)$$

Ovaj opis tipičan je za MEKF, dodatno možemo aproksimirati pogrešku u položaju kao pogreške malih kutova. Ovo proizlazi iz pretpostavke kako su pogreške kontinuirano male u odnosu na „globalni“ položaj. Ovom pretpostavkom dolazi do mogućnosti opisa kvaterniona pogreške samo s tri parametra. S obzirom kako kvaternion pogreške predstavlja malu rotaciju, rotacijski vektor  $\mathbf{v}$  malu duljinu, time mu je skalarna komponenta približno 1 te ne mora biti estimirana.

## 5.2. Deterministički oblik Kalmanovoga filtera

U nastavku slijede jednačbe potrebne za implementaciju multiplikativnog proširenog Kalmanovog filtera u stvarnome vremenu. Diferencijalne jednačbe koje opisuju kinematiku tijela i stanja pogrešaka integrirane su jednostavnim metodama numeričke integracije, tj. raspisom u Taylorov niz u točki integracije te su uzeti samo elementi nultog i prvog reda, dok su viši odbačeni. Kontinuirani oblik i njihov deterministički oblik ovih jednačbi razvijen je u [16], zbog preglednosti ovdje nećemo navoditi ponovno izvode tih jednačbi.

### 5.2.1. Propagacija nominalnog stanja:

Nominalno stanje izraženo je bez šuma i smetnji.

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} \\ \hat{\boldsymbol{\omega}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}\{(\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b)\Delta t\} \\ \boldsymbol{\omega}_b \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

gdje je  $\mathbf{q}\{(\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b)\Delta t\}$  kvaternion rotacije iz jednačbe (2-1).

### 5.2.2. Propagacija stanja pogrešaka u diskretnome obliku

Kalmanov filter vrši propagaciju vjerojatnosti stanja pogreške svaki put kada nova senzorska mjerenja postanu. Standardni oblik propagacije pogreške dan je jednačbom (5-5).

$$\delta \hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{F}_x \delta \hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{i} \quad (5-5)$$

gdje je:

$$i \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}_i) \quad (5-6)$$

$$\delta \hat{\mathbf{x}}_t = \begin{bmatrix} \delta \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T \{(\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b) \Delta t\} \delta \hat{\boldsymbol{\theta}} - \delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_b \Delta t + \boldsymbol{\theta}_i \\ \delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_b + \boldsymbol{\omega}_i \end{bmatrix} \quad (5-7)$$

gdje su  $\boldsymbol{\theta}_i$ ,  $\boldsymbol{\omega}_i$  slučajni impulsi opisani kao Gaussov bijeli proces koji se dodaju na estimacije pogreške položaja i estimacije pogreške odstupanja žiroskopa te predstavljaju slučajne impulse procesa izražene matricom  $\mathbf{Q}_i$ . Njihova srednja vrijednost je nula, a kovarijanca se dobije integracijom vrijednosti varijanci (određenih mjerenjem ili iz dokumentacije korištenih senzora) šuma mjerenja žiroskopa  $\boldsymbol{\omega}_n$  i varijance nasumičnog hoda kuta (engl. *angular random walk, ARW*)  $\boldsymbol{\omega}_\omega$  tijekom vremenskog koraka  $\Delta t$ . Matrica kovarijanca šuma procesa dana je sljedećom jednačinom:

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_i & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Omega}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{\boldsymbol{\omega}_n}^2 \Delta t^2 \mathbf{I}_3 & 0 \\ 0 & \sigma_{\boldsymbol{\omega}_\omega}^2 \Delta t \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} rad^2 \\ (rad/s)^2 \end{bmatrix} \quad (5-8)$$

Napomenut ćemo kako je u svakom novom koraku propagacije vrijednost  $\delta \hat{\mathbf{x}}_t$  jednaka nuli, time je i rezultat jednačine (5-5) jednak nuli. Razlog zbog kojeg je  $\delta \hat{\mathbf{x}}_t = 0$  proizlazi iz toga što u koraku korekcije srednju vrijednost stanja pogreške dodajemo u nominalno stanje te nakon toga srednju vrijednost stanja pogreške postavimo na nulu.

S obzirom na prethodno objašnjenje, izvršavanje jednačine (5-5) u implementaciji koda zanemarujemo. Međutim, ono što vršimo u ovome koraku iteracije je propagacija kovarijanca stanja pogreške. To vršimo na temelju jednačine (5-9).

$$\mathbf{P}_t^- = \mathbf{F}_x \mathbf{P} \mathbf{F}_x^T + \mathbf{F}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{F}_i^T \quad (5-9)$$

gdje je  $\mathbf{F}_x$  transformacijska matrica iskazana jednačinom (5-10), a matrica  $\mathbf{Q}_i$  je prethodno objašnjena i dana jednačinom (5-8).

$$\mathbf{F}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\{(\boldsymbol{\omega}_m - \boldsymbol{\omega}_b) \Delta t\} & -I \Delta t \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (5-10)$$

Matrica  $\mathbf{F}_i$  predstavlja individualne impulse smetnji u odnosu na dio stanja zahvaćenog njima.

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (5-11)$$

### 5.2.3. Korekcija stanja pogrešaka u diskretnome obliku

Ako su vanjska referentna mjerenja dostupna u trenutku  $t$ , tada se vrši korekcija estimiranog stanja pogreški. Filter kao opažanje može iskoristiti bilo koje mjerenje  $\mathbf{z}_t$  koje možemo iskazati u odnosu na pravo stanje sustava  $\mathbf{x}_t$  prema sljedećoj jednadžbi:

$$\mathbf{z}_t = h(\mathbf{x}_t) + v_t \quad (5-12)$$

gdje  $h$  predstavlja diferencijalnu nelinearnu funkciju, a  $v_t$  predstavlja bijeli Gaussov šum mjerenja iskazan kao:

$$v \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}_i) \quad (5-13)$$

Matrica kovarijance  $\mathbf{R}_i$  predstavlja nesigurnost mjerenja i definirana je kao:

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \sigma_a^2_{x,y,z} & 0 \\ 0 & \sigma_m^2_{x,y,z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (m/s^2)^2 \\ (Gauss/s)^2 \end{bmatrix} \quad (5-14)$$

Vrijednosti  $\sigma_a^2_{x,y,z}$  i  $\sigma_m^2_{x,y,z}$  predstavljaju varijancu senzora akcelerometra i magnetometra, mogu biti određene mjerenjem ili preuzete iz specifikacija proizvođača.

Kako bi mogli koristiti mjerenja u filteru, jednadžbu (5-3) zapisati ćemo u obliku u kojim iskazuje pogrešku mjerenja  $\mathbf{y}_t$ , tj.

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{z}_t - h(\hat{\mathbf{x}}_t^-) \quad (5-15)$$

gdje je  $\hat{\mathbf{x}}_t^-$  trenutno nominalno stanje. Prethodna jednadžba daje pogrešku između mjerenja senzora u lokalnom referentnom sustavu (sustav tijela ili senzorski sustav) i referentnih mjerenja transformiranih iz globalnog sustava u lokalni sustav na temelju estimiranog nominalnog stanja.

S obzirom kako filter estimira pogreške stanja, pogrešku mjerenja koristimo kako bi izračunali *posteriori* vjerojatnost stanja ( $\delta\hat{\mathbf{x}}_t, \mathbf{P}_t$ ) koristeći sljedeće jednadžbe:

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T (\mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1} \quad (5-16)$$

$$\delta\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{K}_t (\mathbf{z}_t - \mathbf{h}_t(\hat{\mathbf{x}}_t^-)) \quad (5-17)$$

$$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_t^- - \mathbf{K}_t (\mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t) \mathbf{K}_t^T \quad (5-18)$$

gdje je Jacobijeva matrica  $\mathbf{H}$  definirana u odnosu na pogreške stanja  $\delta\mathbf{x}$ , tj. matrica parcijalnih derivacija funkcije  $h$  u odnosu na pogreške stanja u točki pravog stanja  $\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_t^- \oplus \delta\mathbf{x}_t$ . S obzirom kako je srednja vrijednost pogreške stanja  $\delta\mathbf{x}_t$  jednaka nuli, jer nije još uvijek izvršena korekcija, dovodi nas do  $\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_t^-$ .

$$\mathbf{H} = \left. \frac{\partial h}{\partial \delta \mathbf{x}} \right|_{x_t} \quad (5-19)$$

Koristimo lančano pravilo kako bi mogli izračunati prethodnu jednadžbu:

$$\mathbf{H} = \left. \frac{\partial h}{\partial \delta \mathbf{x}} \right|_x = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_t} \right|_x \left. \frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial \delta \mathbf{x}} \right|_x = \mathbf{H}_x \mathbf{X}_{\delta x} \quad (5-20)$$

gdje je  $\mathbf{H}_x = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_t} \right|_x$  Jacobijeva matrica funkcije  $h$  s obzirom varijablu stanja sustava (položaj). Ovaj dio ovisan je o mjerenjima, jer funkcija  $h$  predstavlja opservacijsku transformaciju mjerenja iz globalnog referentnog u lokalni referentni sustav. Dok je  $\mathbf{X}_{\delta x} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial \delta \hat{\mathbf{x}}_t} \right|_x$  Jacobijeva matrica stvarnog stanja u odnosu na pogreške stanja.

Opažanja gravitacijskog vektora i vektora magnetskog polja u globalnom referentnom sustavu transformiramo u lokalni pomoću jednadžbi:

$$h_g({}^L \hat{\mathbf{q}}_t, {}^G \mathbf{g}) = {}^L \hat{\mathbf{q}}_t^* \otimes {}^G \mathbf{a} \otimes {}^L \hat{\mathbf{q}}_t \quad (5-21)$$

$$h_b({}^L \hat{\mathbf{q}}_t, {}^G \mathbf{b}) = {}^L \hat{\mathbf{q}}_t^* \otimes {}^G \mathbf{b} \otimes {}^L \hat{\mathbf{q}}_t \quad (5-22)$$

gdje  ${}^L \hat{\mathbf{q}}_t$  predstavlja nominalnu estimaciju kvaterniona položaja. Vektor  ${}^G \mathbf{g} = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$  je globalni gravitacijski vektor zapisan u kvaternioniskome obliku, a  ${}^G \mathbf{b} = [0 \ b_x \ 0 \ b_z]^T$  definira vektor smjera koji pokazuje u smjeru magnetskog polja i lokalnog magnetskog otklona.

Rješenja opservacijskih jednadžbi:

$$h_g({}^L \hat{\mathbf{q}}_t, {}^G \mathbf{g}) = \begin{bmatrix} 2(q_x q_z - q_w q_y) \\ 2(q_w q_x + q_y q_z) \\ 2\left(\frac{1}{2} - q_x^2 - q_y^2\right) \end{bmatrix} \quad (5-23)$$

$$h_b({}^L \hat{\mathbf{q}}_t, {}^G \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 2b_x \left(\frac{1}{2} - q_y^2 - q_z^2\right) - 2b_z(q_w q_y + q_x q_z) \\ 2b_x(q_x q_y - q_w q_z) + 2b_z(q_w q_x + q_y q_z) \\ 2b_x(q_w q_y + q_x q_z) - 2b_z \left(\frac{1}{2} - q_x^2 - q_y^2\right) \end{bmatrix} \quad (5-24)$$

Slijede rješenja Jacobijevih jednadžbi za prethodne dvije jednadžbe.



$$\mathbf{H}_g = \frac{\partial h_g(\mathop{L}\limits_G \hat{\mathbf{q}}_t, \mathop{G}\limits_g \mathbf{g})}{\partial \hat{\mathbf{q}}_t} = \begin{bmatrix} 2b_x \left( \frac{1}{2} - q_y^2 - q_z^2 \right) - 2b_z (q_w q_y + q_x q_z) \\ 2b_x (q_x q_y - q_w q_z) + 2b_z (q_w q_x + q_y q_z) \\ 2b_x (q_w q_y + q_x q_z) - 2b_z \left( \frac{1}{2} - q_x^2 - q_y^2 \right) \end{bmatrix} \quad (5-25)$$

$$\mathbf{H}_b = \frac{\partial h_b(\mathop{L}\limits_G \hat{\mathbf{q}}_t, \mathop{G}\limits_b \mathbf{b})}{\partial \hat{\mathbf{q}}_t} = \begin{bmatrix} 2b_x \left( \frac{1}{2} - q_y^2 - q_z^2 \right) - 2b_z (q_w q_y + q_x q_z) \\ 2b_x (q_x q_y - q_w q_z) + 2b_z (q_w q_x + q_y q_z) \\ 2b_x (q_w q_y + q_x q_z) - 2b_z \left( \frac{1}{2} - q_x^2 - q_y^2 \right) \end{bmatrix} \quad (5-26)$$

Dakle, matricu  $\mathbf{H}_x$  možemo zapisati kao:

$$\mathbf{H}_x = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}_t} \right|_x = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_g \\ \mathbf{H}_b \end{bmatrix} \quad (5-27)$$

Izvod jednadžbe  $\mathbf{X}_{\delta x} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial \delta \hat{\mathbf{x}}_t} \right|_x$  dan je u [16], a rješenje glasi:

$$\mathbf{X}_{\delta x} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial \delta \hat{\mathbf{x}}_t} \right|_x = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\delta\theta} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (5-28)$$

gdje je

$$\mathbf{Q}_{\delta\theta} = \begin{bmatrix} -q_x & -q_y & -q_z \\ q_w & -q_z & q_y \\ q_z & q_w & -q_x \\ -q_y & q_x & q_w \end{bmatrix} \quad (5-29)$$

Na temelju prethodnih jednadžbi možemo estimirati pogreške stanja sustava  $\delta \hat{\mathbf{x}}_t$ .

#### 5.2.4. Unapređenje estimiranog stanja

Ponovit ćemo jednadžbu (5-1) koja izražava stvarno stanje na temelju nominalnog stanja sustava i estimiranih pogreški stanja:

$$\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_t^- \oplus \delta \mathbf{x}_t \quad (5-30)$$

sada možemo nominalna stanja unaprijediti estimiranom pogreškom iz osmatranja vanjskih mjerenja na način,

$$\mathbf{q} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{q}\{\delta \hat{\boldsymbol{\theta}}\} \quad (5-31)$$

$$\boldsymbol{\omega}_b = \boldsymbol{\omega}_b + \delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_b \quad (5-32)$$

### 5.2.5. Određivanje početnog položaja tijela

MEKF zahtjeva početni položaj i početnu kovarijancu koje predstavljaju početno nominalno stanje sustava. U ovome radu iskoristit ćemo jednostavnu TRIAD metodu koja generira rotacijsku matricu na temelju dva nekolinearna referentna opažanja. Metoda ima ograničenje u kojem može uzeti samo dva referentna vektora. U slučaju koji mi razmatramo primjenu te metode, ta pretpostavka je zadovoljena, tj. kao referentna mjerenja uzimamo gravitacijski vektor i lokalno magnetsko polje. Slijedi izvod TRIAD metode.

Definirati ćemo lokalni koordinatni sustav  $G$  u kojem se os  ${}^G z$  poklapa sa smjerom negativnog gravitacijskog vektora  ${}^G \mathbf{g}$ , os  ${}^G x$  s osi  ${}^G z$  stvara plohu koja sadrži vektor koji predstavlja magnetski sjever  ${}^G \mathbf{b}$ , dok os  ${}^G y$  svojim smjerom stvari uz vektore  ${}^G x$  i  ${}^G z$  desni koordinatni sustav. Dakle, gravitacijski i magnetski vektor u  $G$  koordinatnom sustavu dani su kao:

$${}^G \mathbf{g} = g[0 \ 0 \ -1]^T; \quad {}^G \mathbf{b} = [{}^G b_x \ 0 \ {}^G b_z]^T \quad (5-33)$$

gdje  $g$  predstavlja lokalnu gravitacijsku konstantu.

Mjerenja akcelerometra i magnetometra opažaju gravitacijski i jedinični vektor u smjeru sjevernog magnetskog polja u lokalnom koordinatnom sustavu  $L$ ,

$${}^L \mathbf{g} = [{}^L g_x \ {}^L g_y \ {}^L g_z]^T; \quad {}^L \mathbf{b} = [{}^L b_x \ {}^L b_y \ {}^L b_z]^T \quad (5-34)$$

Tada vektor  ${}^G \mathbf{z}$  u lokalnom sustavu možemo izraziti kao:

$${}^L \mathbf{z} = -\frac{{}^L \mathbf{g}}{\|{}^L \mathbf{g}\|} \quad (5-35)$$

Normalizirani vektorski produkt između  ${}^L \mathbf{z}$  i  ${}^L \mathbf{b}$  dati će os  ${}^L \mathbf{y}$  u lokalnom sustavu:

$${}^L \mathbf{y} = -\frac{{}^L \mathbf{z} \times {}^L \mathbf{b}}{\|{}^L \mathbf{z} \times {}^L \mathbf{b}\|} \quad (5-36)$$

Vektorski produkt između  ${}^L \mathbf{y}$  i  ${}^L \mathbf{z}$  dati će  ${}^L \mathbf{x}$  u lokalnom sustavu:

$${}^L \mathbf{x} = {}^L \mathbf{y} \times {}^L \mathbf{z} \quad (5-37)$$

Tada DCM matricu koja opisuje položaj globalnog sustava u odnosu na lokalni možemo izraziti kao:

$${}^L \mathbf{R} = [{}^L \mathbf{x} \ {}^L \mathbf{y} \ {}^L \mathbf{z}]^T \quad (5-37)$$

Jednadžbe MEFK, zbog preglednosti dane su u tablici 5.2

**Tablica 5.2** Pregled jednadžbi MEKF.

	$\mathbf{H}_t = \left[ \frac{\partial \mathbf{h}_t}{\partial \delta \mathbf{x}} \right]_{\hat{\mathbf{x}}_t^-}$
Kalmanovo pojačanje	$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T (\mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1}$
Unaprijedi estimirana stanja	$\delta \hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{K}_t (\mathbf{z}_t - \mathbf{h}_t(\hat{\mathbf{x}}_t^-))$
Unaprijedi kovarijancu	$\mathbf{P}_t = \mathbf{P}_{t-1} - \mathbf{K}_t (\mathbf{H}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{H}_t^T + \mathbf{R}_t) \mathbf{K}_t^T$
Unaprijedi pravo stanje sustava, a to uključuje:	$\mathbf{x}_t = \hat{\mathbf{x}}_t \oplus \delta \mathbf{x}_t$
- „globalni“ položaj	$\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_{t-1} \otimes \mathbf{q}(\delta \hat{\boldsymbol{\theta}})$
- odstupanje žiroskopa	$\boldsymbol{\omega}_{b_t} = \boldsymbol{\omega}_{b_{t-1}} + \delta \hat{\boldsymbol{\omega}}_b$
Poništi estimirano stanje pogrešaka	$\delta \hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{0}$
	$\mathbf{F}_x = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}_t}{\partial \delta \mathbf{x}} \right]_{\hat{\mathbf{x}}_{t-\delta t}}$
Predikcija pogreški stanja	$\delta \hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{F}_x \delta \hat{\mathbf{x}}_{t-1} + \mathbf{i}$
Predikcija kovarijance pogreški	$\mathbf{P}_t^- = \mathbf{F}_x \mathbf{P}_{t-1} \mathbf{F}_x^T + \mathbf{F}_i \mathbf{Q}_i \mathbf{F}_i^T$

## 6. Mjerenja i rezultati

Mjerenja su ostvarena pomoću AscTec™ Pelican<sup>1</sup> UAV platforme prikazane na slici 6.1, koja na sebi ima set MIMU senzora i kontrolnu jedinicu (AscTec™ Atomboard).



**Slika 6.1** AscTec™ Pelican UAV mjerna platforma [22].

Mjerenja s platforme prikupljena su na način kao što je objašnjeno u [23]. Senzorski skup podataka preuzet je s [24], u kojem su mjerenja MIMU senzora s platforme sinkronizirana s referentnim mjerenjima Vicon vizualnog sustava. Podatci sa senzora i referentnoga sustava, uzorkovani su jednakom frekvencijom od 200Hz.

Podatci o MIMU sensorima, tj. žiroskopu, akcelerometru i magnetometru dani su u tablici 6.1. Senzori kao dio platforme, dolaze kalibrirani.

---

<sup>1</sup> Ascending Technologies™, Krailling, Njemačka

**Tablica 6.1** AscTec™ Pelican senzori.

<b>Akcelerometar:</b>		
MEMSIC MXR9500MZ		
	Vrijednost (tipična)	Jedinica
Raspon mjerenja	$\pm 1.5$	g
Osjetljivost	0.5	mg/LSB
<b>Žiroskop:</b>		
Analog Devices ADXRS610		
	Vrijednost (tipična)	Jedinica
Raspon mjerenja	$\pm 300$	dps
Osjetljivost	6	mdps/digit
<b>Magnetometar:</b>		
Honeywell HMC5843		
	Vrijednost (tipična)	Jedinica
Raspon mjerenja	$\pm 4$	gauss
Osjetljivost	7	mgauss/LSB

## 6.1. Stvarni mjereni signali

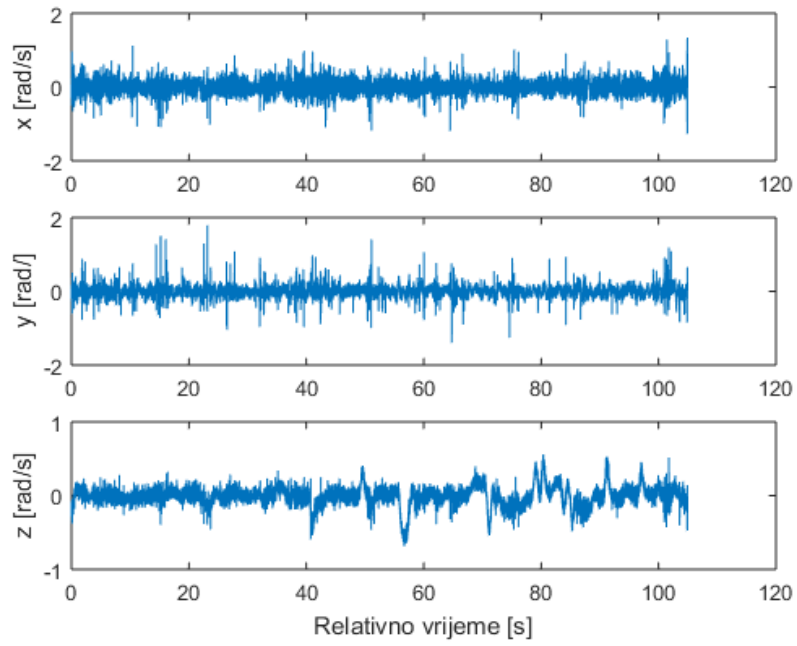
Podatci korišteni u ovome radu su dio skupa podataka prikupljenih za potrebe određivanja točnosti estimacijskih metoda u SLAM (engl *simultaneous localization and mapping*) analizi leta bespilotnih letjelica. Ovakav skup podataka s raznih senzora je izrazito bitan jer omogućava analizu rada različitih implementacijskih pristupa, ali u jednakim uvjetima rada.

### 6.1.1. Senzorska mjerenja

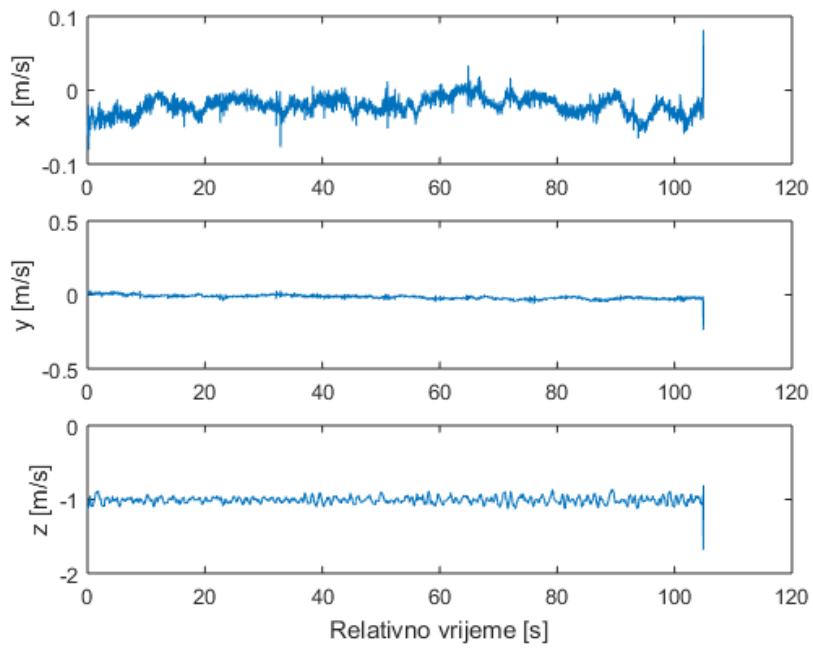
Dostupna senzorska mjerenja izvedena su kroz četiri opažanja dinamike tijela, koja uključuje sljedeće pokuse:

- kružni let s jednom, dvije i tri petlje te
- slobodno lebdjenje letjelice na jednome mjestu.

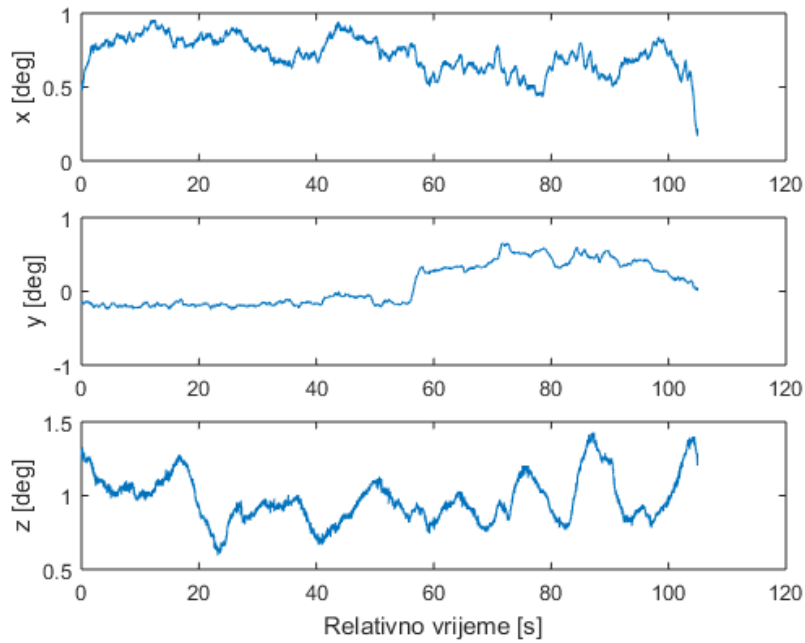
Slikama 5.2-5 prikazani su dostupni podatci četvrtog pokusa, tj. lebdjenje na jednome mjestu. Slike 5.2-4 prikazuju dio seta podataka koji uključuje mjerenja MIMU senzora s obzirom na dinamiku platforme. Slika 5.5 prikazuje estimiran položaj platforme, u tri osi, dobiven estimacijom na samoj platformi pomoću direktnog proširenog Kalmanovog filtera.



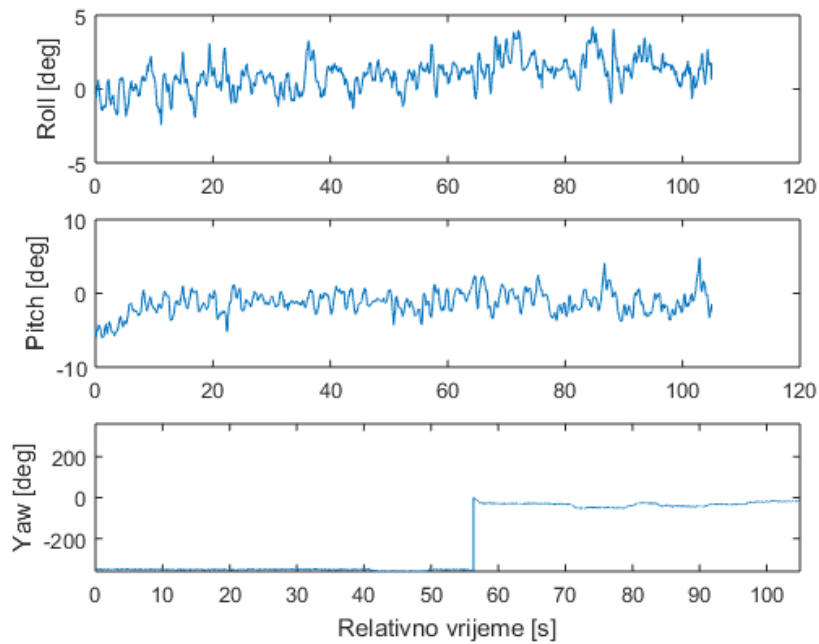
**Slika 6.2** Mjerenja žiroskopom u tri osi.



**Slika 6.3** - Mjerenja akcelerometrom u tri osi.



**Slika 6.4** Mjerenja magnetometrom u tri osi.



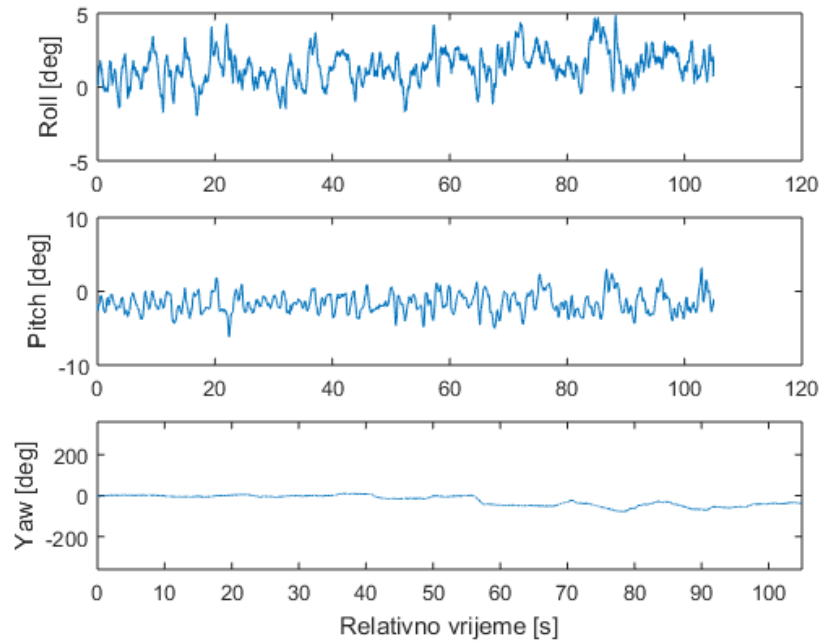
**Slika 6.5** AscTec™ estimirani položaj.

### 6.1.2. Vicon referentna mjerenja

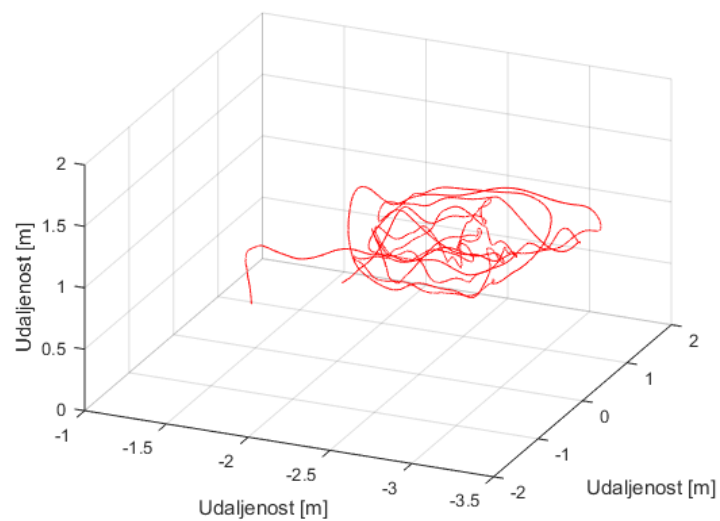
Vicon referentni sustav u pokusu se sastoji od osam kamera koje snimaju polje dimenzije 10x10x10 metara u kojem letjelica pod opažanjem vrši let. Na samoj letjelici pričvršćene su tri reflektirajuće točke koje Vicon sustav prati, kao što je prikazano na slici 5.6.



**Slika 6.6** AscTec™ Pelican s tri reflektirajuće točke [25].



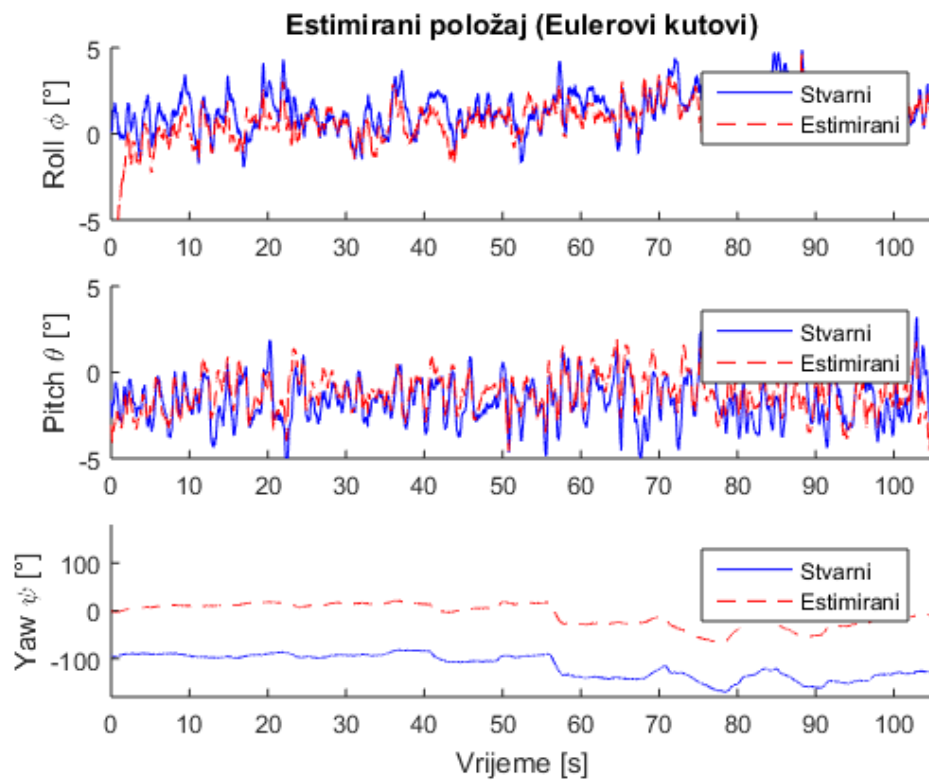
**Slika 6.7** Referentni položaj dobiven Vicon sustavom.



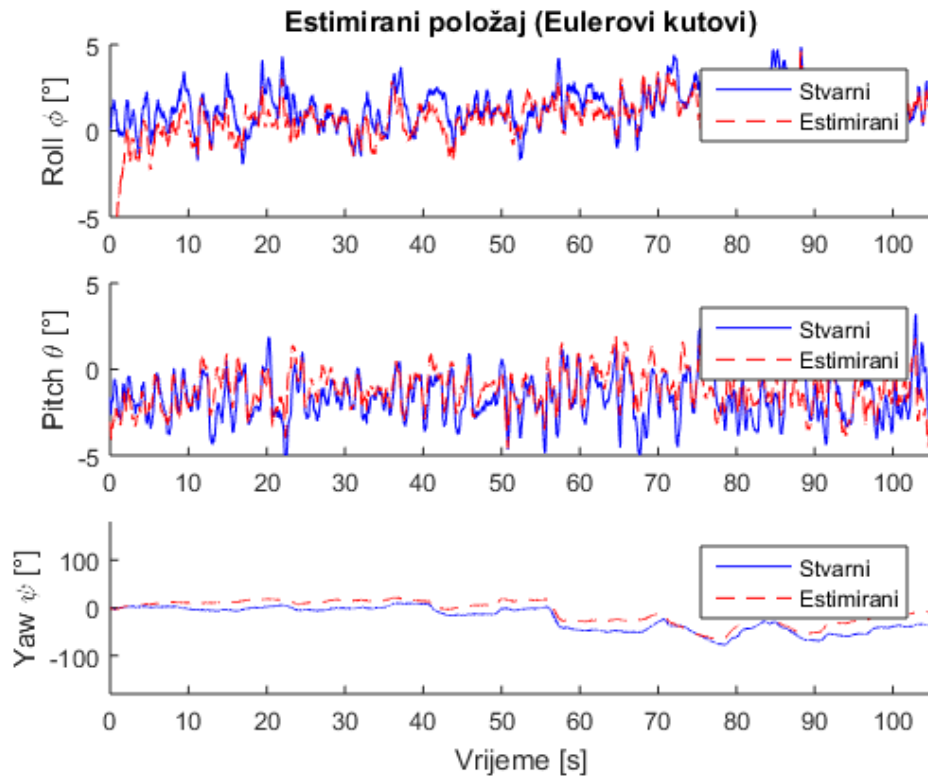
**Slika 6.8** Prikaz trajektorije letjelice snimljene Vicon sustavom.



Prilikom analize podataka sa senzora i Vicon referentnog sustava, uočen je problem u mjerenjima. Slika 5.9 prikazuje estimirane kutove na temelju senzorske fuzije. Vidljivo je kako prilikom samog početka pokusa letjelica nije poravnata s Vicon sustavom, tj. točnije možemo vidjeti iz kuta smjera (engl. *Yaw*) kako je letjelica poravnata s magnetskim sjeverom, ali Vicon sustav nije poravnat s letjelicom. Eksperimentalno je pokušana „ručna“ korekcija odstupanja u mjerenjima te je rezultat tog pokušaja prikazan slikom 5.10. Po rezultatu ovog eksperimenta mogli bi zaključiti kako je poravnanje u načelu uspješno, međutim korekcija poravnanja je ručni postupak te ne može pružiti dovoljnu preciznost kako bi se ocijenila točnost implementacije estimatora.



**Slika 6.9** Estimacija položaja i usporedba s referentnim položajem.



**Slika 6.10** „Ručna“ korekcija pogreške u poravnanju (kuta smjera).

Autor rada pokušao je pronaći odgovarajući set podataka koji bi zadovoljio tražene kriterije, ali prilikom same izrade rada odgovarajući set nije pronađen. Autor nije imao mogućnost repliciranja pokusa zbog nedostatka mjerne opreme potrebne za izvedbu pokusa.

S obzirom na prethodni problem, pristup je izmijenjen na način da su estimacije kuta zakreta zanemarene prilikom provjere točnosti estimiranih veličina na temelju implementacije filtera u ovome radu. Analizirana je točnost estimacije kutova okreta (engl. *Roll*) i nagiba (engl. *Pitch*).

## 6.2. Rezultati senzorske fuzije

Implementacija filtera provjerena je na četiri seta podataka, koji su mjereni kao dio pokusa spomenutih u poglavlju 6.1.1. Uzimajući u obzir problem iz prethodnog poglavlja, u tablici 6.2 prikazani su rezultati estimacije na temelju senzorskog filtera implementiranog u ovome radu.

Točnost estimacija položaja u odnosu na referentna mjerenja izraziti ćemo kao korijen srednju kvadratnu pogrešku (engl. *Root Mean Square*), nadalje RMS, koju možemo izračunati iz razlike estimiranih i referentnih veličina pomoću sljedeće jednadžbe (6-1).

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{x}_{est}(i) - x_{ref}(i))^2} \quad (6-1)$$

U jednadžbi (6-1)  $N$  određuje broj ukupni broj uzoraka u setu podataka, a  $\hat{x}_{est}$  i  $x_{ref}$  su estimirani i referentni položaj.

**Tablica 6.2** Rezultati pokusa dani kao RMS vrijednost pogreške.

Pokus	Položaj (RMS stupnjeva)	
	Okret (Roll)	Nagib (Pitch)
<b>Kružni let, 1 petlja</b>	1.8106	2.0013
<b>Kružni let, 2 petlje</b>	1.5915	1.7909
<b>Kružni let, 3 petlje</b>	1.5147	2.0858
<b>Lebdjenje letjelice</b>	1.0175	1.3007

Tijekom izvedbe gornjih mjerenja, uzeto je i srednje vrijeme iteracije izvršavanja računalne implementacije filtera te je dano u tablici 6.3. Program je izvršavan na osobnome računalu autora rada, računalo koristi Intel procesor treće generacija i5-3340M i 16GB radne memorije.

**Tablica 6.3** Srednje vrijeme izvršavanje iteracije implementiranog filtera u Matlab-u.

Algoritam	Srednje vrijeme izvršavanja ( $\mu$ s)	Standardno odstupanje ( $\mu$ s)
<b>MEKF</b>	718.06	0.132

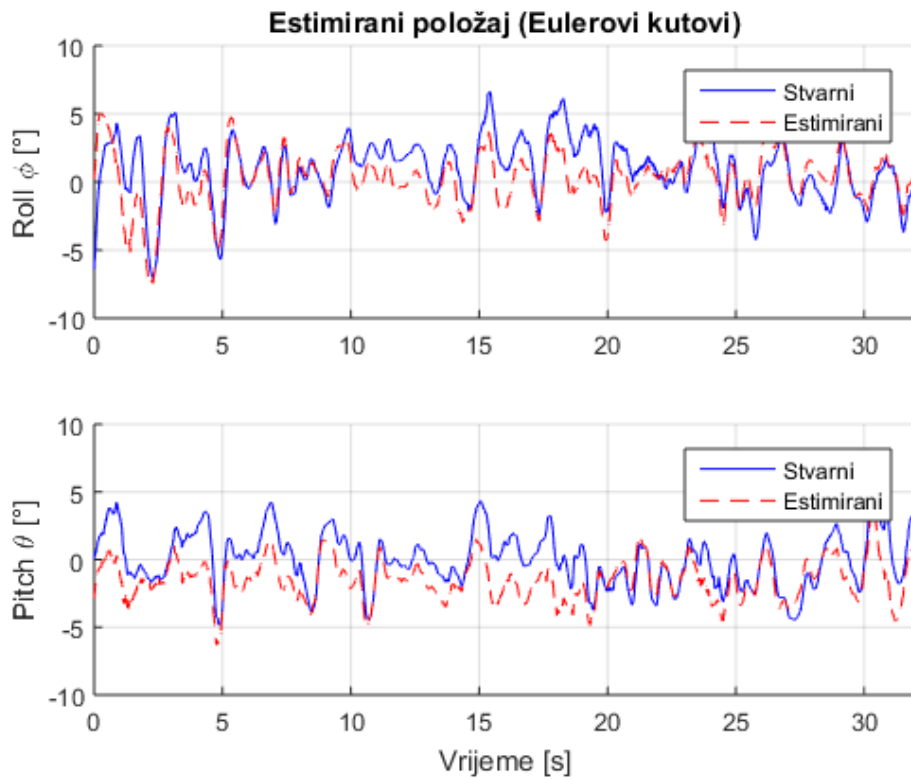
S obzirom na računalne mogućnosti ugrađenog sustava u bespilotnoj letjelici, možemo zaključiti kako je moguće izvršiti implementaciju danog filtera i u takvom ugradbenom sustavu, naravno uz prethodnu adaptaciju Matlab koda u C ili C++ programski kod.

### 6.2.1. Analiza estimiranih parametara položaja

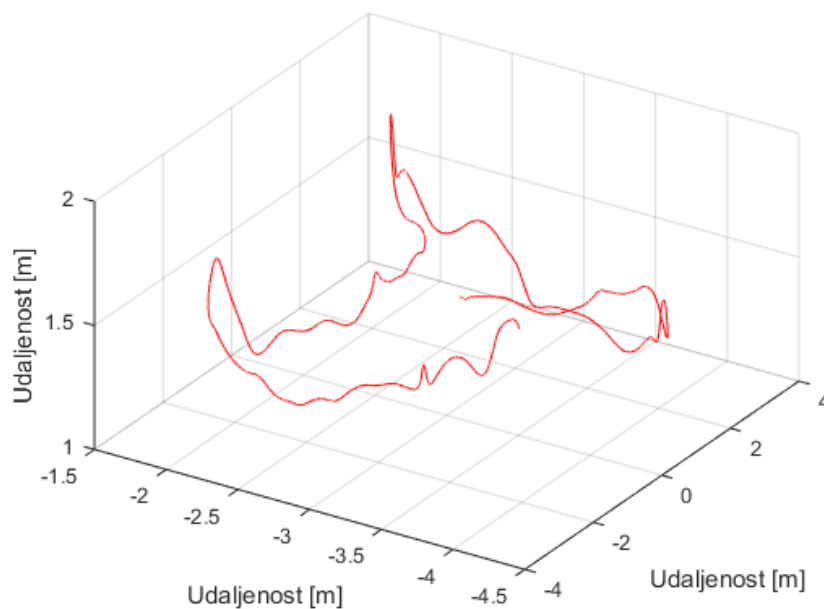
U nastavku slijede detaljniji prikazi rezultata estimacije položaja na temelju mjerenja prikupljenih kroz četiri pokusa:

- Pokus 1-3, jedan, dva i tri kružna leta
- Pokus 4, slobodno lebdjenje na mjestu

Rezultati estimiranih parametara daju približno jednake vrijednosti s obzirom na sve provedene pokuse, kao što je vidljivo iz tablice 6.2. Iz tog razloga, rezultati pokusa prikazani u grafičkome obliku (na Sl. 6.11-14) ovdje će biti kratko sumirani na kraju poglavlja.

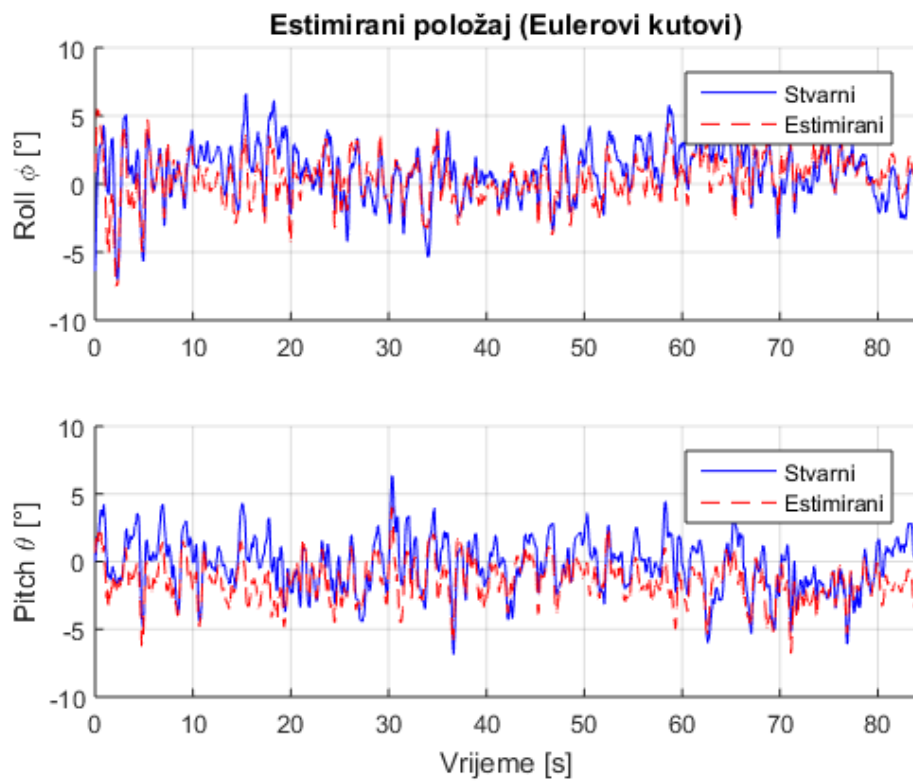


a)

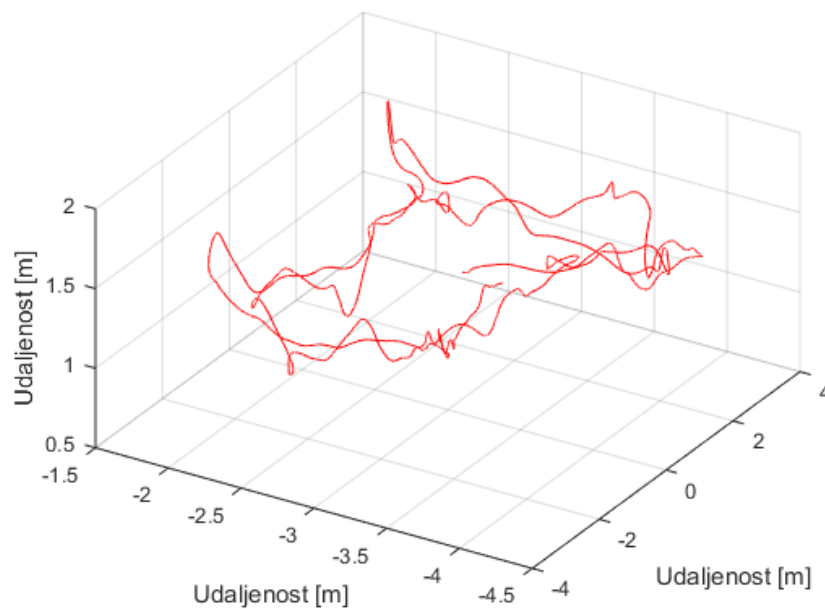


b)

**Slika 6.11** Pokus 1; a) estimirani kutovi, b) trajektorija tijela.

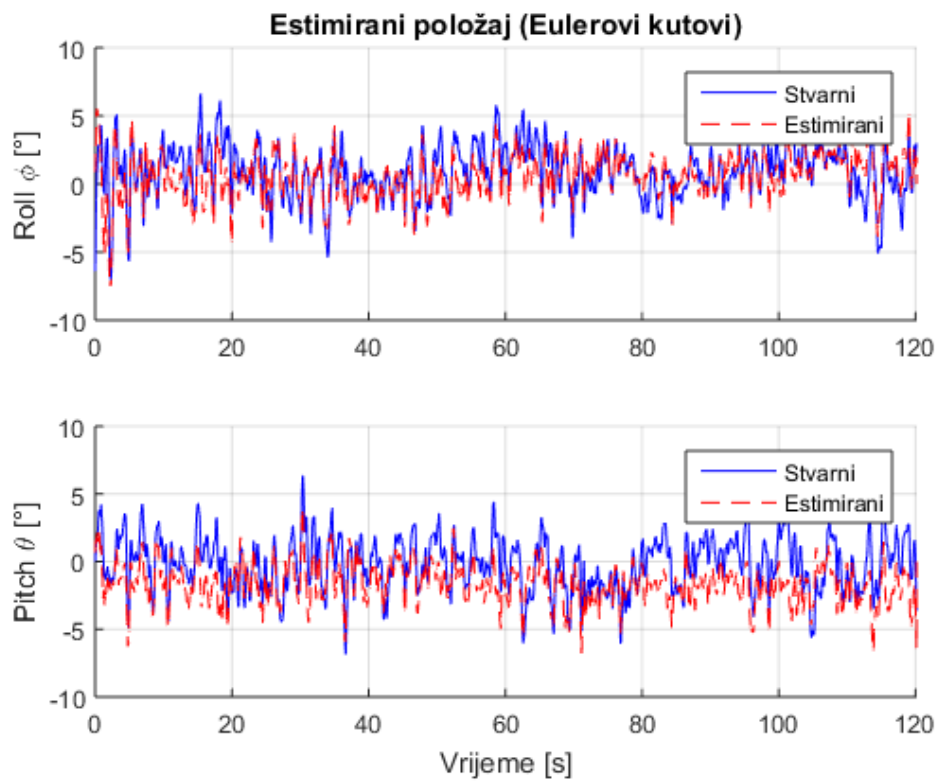


**a)**

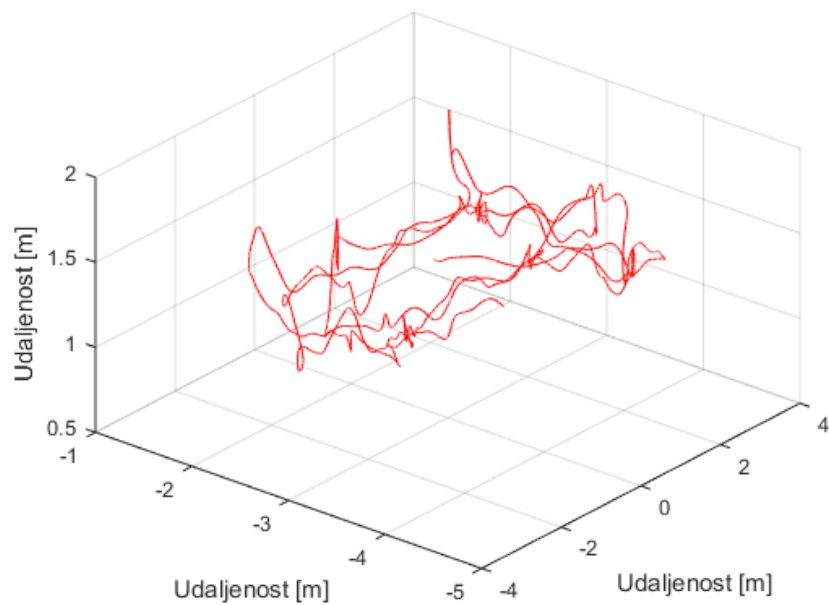


**b)**

**Slika 6.12** Pokus 2; **a)** estimirani kutovi, **b)** trajektorija tijela.

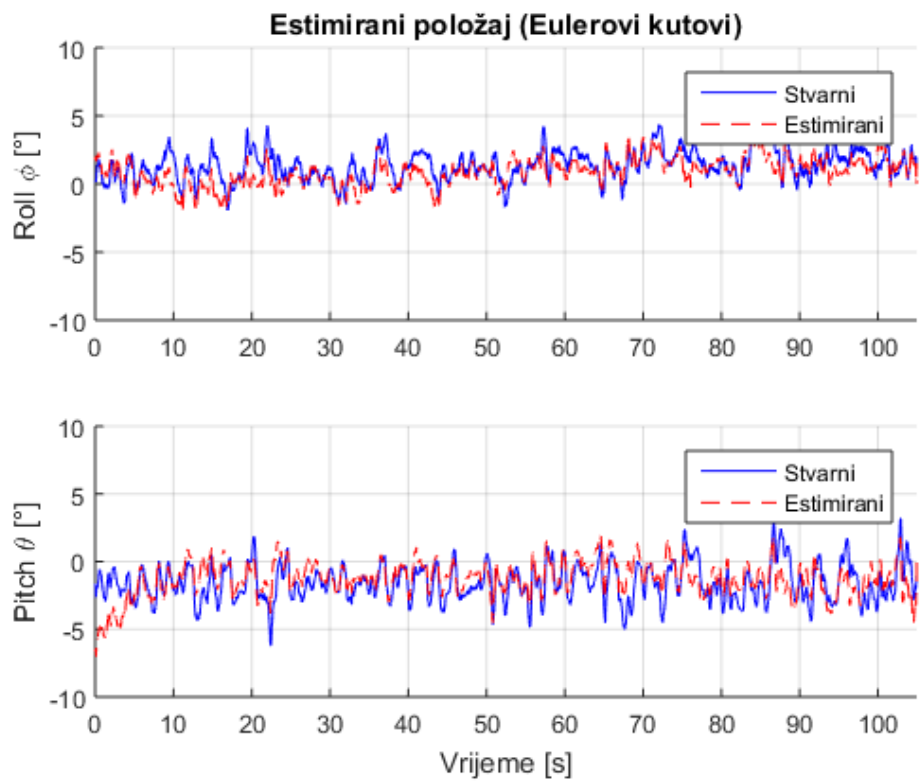


**a)**

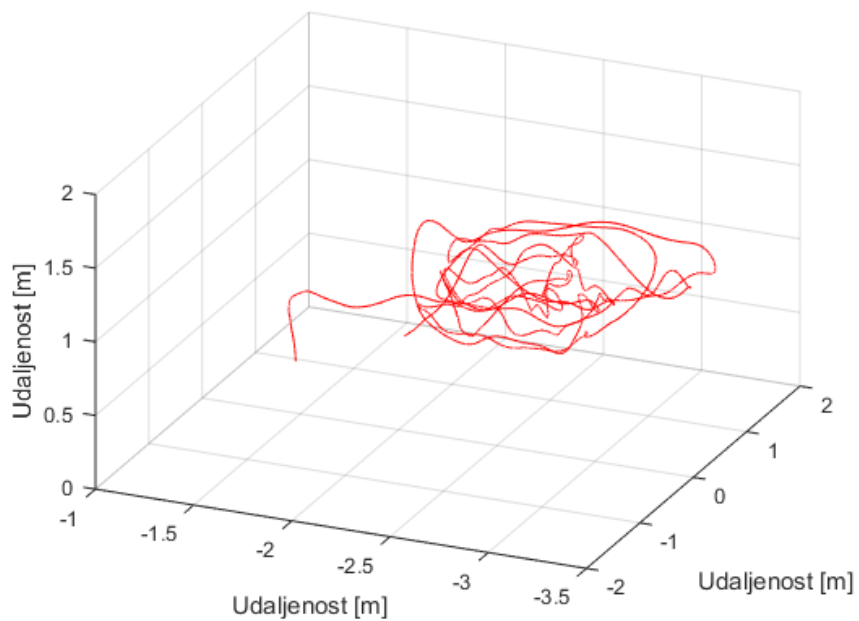


**b)**

**Slika 6.13** Pokus 3; **a)** estimirani kutovi, **b)** trajektorija tijela.



**a)**



**b)**

**Slika 6.14** Pokus 4; **a)** estimirani kutovi, **b)** trajektorija tijela.

U svim pokusima razmatrani su estimirani parametri kutova okreta (engl. *Roll*) i nagiba (engl. *Pitch*) uz dinamiku kretanja (trajektorija) mjerne platforme.

Iz priloženih grafova vidimo kako estimirani kutovi, nakon početne pogreške, brzo konvergiraju prema stvarnim (referentnim) vrijednostima kutova. Vidljivo je i kako estimirani parametri nemaju faktor kašnjenja, tj. ispravno prate dinamiku gibanja tijela. U trenucima veće dinamike gibanja, vidimo kako estimirane vrijednosti zadržavaju relativnu točnost. To nam govori kako u korekcijskome koraku, filter uspijeva smanjiti pouzdanost vanjskih mjerenja kada se njihove varijance povećaju, a to je i željeno ponašanje filtera.

Početna odstupanja estimiranih parametara efekt su početne estimacije položaja na temelju TRIAD metode koja uzima mjerenja akcelerometra i magnetometra kao mjerenja, gdje točnost ovog pristupa određivanja početnog položaja počiva na tri pretpostavke, a one su: tijelo je u statičkom položaju (ili je brzina gibanja konstantna), lokalne magnetske smetnje jednake su nuli te kalibriranost senzora.



## 7. Zaključak

U ovome radu razmatrali smo rješenje Wahbinog problema u obliku estimacijskog filtera koji vrši senzorsku fuziju vektorskih opažanja senzora. Kao estimacijski filter izabran je MEKF zbog svojih potvrđenih kvaliteta u industrijskoj primjeni. Za razliku od komplementarnih rješenja koja ne uzimaju u obzir prethodne estimacije, Kalmanov filter održava informaciju o pouzdanosti estimacije, a to daje memorijski učinak. Dodatna prednost koja proizlazi iz implementacije MEKF je estimacija pogrešaka u filteru, a ne estimacija stanja. Time je ostvarena otpornost rješenja na moguću divergenciju filtera, jer u slučaju pogreške u filteru moguće je nastaviti propagaciju položaja samo na temelju mjerenja žiroskopa.

Rad implementiranog estimacijskog filtera provjeren je na temelju javno dostupnih setova podataka mjerenih na bespilotnoj letjelici u zatvorenome prostoru. Ovakav skup mjerenja izabran je jer sadrži raznovrsnost dinamike gibanja čvrstog tijela na temelju koje je moguće razmatrati rad i točnost implementiranoga rješenja. Prilikom razmatranja izabranih mjerenja, uočen je problem koji je nastao u postupku prikupljanja referentnih mjerenja što je onemogućilo kvalitetnu analizu jednoga od estimiranih parametara položaja, točnije, kuta smjera. S obzirom na preostale parametre koje je bilo moguće analizirati, točnije kutove okreta i nagiba, zaključili smo kako implementirano rješenje daje dovoljno točne podatke ( $\sim 1-2^\circ$  pogreške) kako bi se moglo koristiti kao dio zatvorene kontrolne petlje na temelju koje bi bilo moguće vršiti stabilizaciju bespilotne letjelice, u razmatranju, prilikom raznih dinamika gibanja. Rješenje rada nije dalo kvalitetan uvid u estimirani kut smjera, zbog prethodno spomenutog problema u prikupljanju mjerenja. Ovo ostavlja prostor za nastavak razvoja i analize problema, točnije kroz izradu novih pokusa s ispravnom metodologijom prikupljanja podataka. Autor rada, zbog nedostatka potrebnih mjernih uređaja nije bio u mogućnosti ponoviti mjerenja.

Ovaj rad može poslužiti kao baza za rješavanje drugih problema, kao što je kontrolni sustav za stabilizaciju bespilotne letjelice ili drugih platformi u kojima možemo iskoristiti informaciju o položaju kao dio zatvorene petlje za stabilizaciju.

## Literatura

- [1] H. B. Mitchell, *Data Fusion: Concepts and Ideas*, Berlin: Springer-Verlag, 2012.
- [2] J. R. Raol, *Multi-Sensor Data Fusion with MATLAB*, Boca Raton: CRC Press, 2010.
- [3] K. B. Britting, *Inertial Navigation Systems Analysis*, New York: Wiley-Interscience, 1971.
- [4] D. H. Titterton i J. L. Weston, *Strapdown Inertial Navigation Technology*, Stevenage: The Institution of Electrical Engineers, 2004.
- [5] E. Bekir, *Introduction to Modern Navigation Systems*, Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007.
- [6] P. D. Groves, *Principles of GNSS, Inertial, and Multisensor Integrated Navigation Systems*, London: Artech House, 2008.
- [7] C. Jekeli, *Inertial Navigation Systems with Geodetic Applications*, Berlin: Walter de Gruyter GmbH & Co., 2000.
- [8] J. B. Kuipers, *Quaternions and Rotation Sequences*, New Jersey: Princeton University Press, 1999.
- [9] H. D. Black, »A Passive System for Determining the Attitude of a Satellite,« *AIAA Journal*, svez. 2, br. 7, pp. 1350-1351, 1964.
- [10] F. L. Markley i J. L. Crassidis, *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control*, New York: Springer, 2014.
- [11] G. Wahba, »A Least Squares Estimate of Satellite Attitude,« *SIAM Review*, svez. 7, br. 3, p. 409, 1965.
- [12] P. Davenport, »A vector approach to the algebra of rotations with applications,« NASA, 1965.
- [13] M. D. Shuster, »A Survey of Attitude Representations,« *The Journal of the Astronautical Sciences*, svez. 41, br. 4, pp. 493-517, 1993.
- [14] J. L. Crassidis, F. L. Markley i Y. Cheng, »Survey of Nonlinear Attitude Estimation Methods,« *Journal of Guidance Control and Dynamics*, svez. 10, br. 1, pp. 12-28, 2007.
- [15] P. Aggarwal, Z. Syed, A. Noureldin and N. El-Sheimy, *MEMS-Based Integrated Navigation*, Norwood, MA: Artech House, 2010.
- [16] J. Sola, »Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter,« 2017.
- [17] P. S. Maybeck, *Stochastic Models, Estimation and Control*, svez. 1, Academic Press, 1979.
- [18] Y. Bar-Shalom, X. R. Li i T. Kirubarajan, *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001.

- [19] V. K. Madyastha, V. C. Ravindra, S. Mallikarjunan i A. Goyal, »Extended Kalman filter vs. error state Kalman filter for aircraft attitude estimation,« u *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Portland, 2011.
- [20] E. Lefferts, F. Markley i M. Shuster, »Kalman Filtering for Spacecraft Attitude Estimation,« *Guidance, Control, and Dynamics*, svez. 5, br. 5, pp. 417-429, 1982.
- [21] F. L. Markley, »Attitude Error Representations for Kalman Filtering,« *Guidance, Control, and Dynamics*, svez. 26, br. 2, pp. 311-317, 2003.
- [22] AscTec, »Slika AscTec Pelican UAV,« [Mrežno]. Available:  
<http://wiki.asctec.de/display/AR/AscTec+Pelican?preview=/4816987/5046296/Pelican.jpg>.  
[Pokušaj pristupa 17 Rujan 2017].
- [23] G. H. Lee, M. Achtelik, F. h. Fraundorfer, M. Pollefeys i R. Siegwart, »A benchmarking tool for MAV visual pose estimation,« *IEEE, svez. Control Automation Robotics & Vision (ICARCV)*, br. 2010 11th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, p. 1541–1546, 2010.
- [24] G. H. Lee, »MAV DataSet,« [Mrežno]. Available:  
<https://sites.google.com/site/gimheele/home/mavdataset>. [Pokušaj pristupa 4 Rujan 2017].
- [25] G. H. Lee, »MAV Dataset (AscTec Pelican slika),« [Mrežno]. Available:  
[https://sites.google.com/site/gimheele/\\_/rsrc/1450233239667/home/mavdataset/quadrotor.png](https://sites.google.com/site/gimheele/_/rsrc/1450233239667/home/mavdataset/quadrotor.png).  
[Pokušaj pristupa 17 Rujan 2017].

## Sažetak

U ovom radu objašnjen je problem određivanja položaja na temelju vektorskih mjerenja senzora. S obzirom na problematiku korištenih senzora pri određivanju položaja, kao estimator položaja izabran je multiplikativni prošireni Kalmanov filter zbog svojih prednosti. Prednosti ovog filtera su računaska jednostavnost s obzirom kako su jednadžbe filtera razvijene na temelju kvaternionske parametrizacije položaja. Dodatna prednost ovog filtera je i ta, da filter ne estimira dinamiku stanja tijela, nego samo stanje pogrešaka položaja koje se dodaju na nominalno stanje sustava, a to dodatno ubrzava iteraciju algoritma.

Rezultat ovog rada je uspješna implementacija MEKF algoritma u Matlabu, što je i potvrđeno kroz pokuse i mjerenja s obzirom na referentne skupove mjerenja. Rad daje i objašnjenje problema prilikom korištenja izabranog referentnog skupa mjerenja.

**Ključne riječi:** položaj, estimacija, senzori, senzorska fuzija, multiplikativni prošireni Kalmanov filter

## **Abstract**

### **“Sensor fusion for Attitude estimation based on multi-domain sensor signals”**

This thesis explains attitude determination problem based on sensor measurements in vector space. It gives a short overview of deterministic methods used to solve this problem and then progresses with the state space stochastic methods, mainly using the Multiplicative Extended Kalman Filter. The MEKF was chosen due to its advantages, which include, lower computational requirements since state equations are developed using quaternion parametrization of attitude, hence there is no trigonometric operations used in the state transition equation. One additional advantage of this filter is its complementary or indirect nature, i.e. we are not estimating the full-state of the system, just the error-states which brings additional simplifications and robustness when using MEKF for attitude estimation.

The result of this work is a successful implementation of the MEKF algorithm in a discrete form, using Matlab, this form is suitable for calculation on digital computers or embedded systems. Implementation is evaluated through comparison of attitude estimates with highly accurate reference measurements. Unfortunately, due to a mistake in the experiments when the reference measurements were gathered, it wasn't possible to correctly evaluate accuracy of the estimated yaw angle.

**Keywords:** attitude, estimation, sensors, sensor fusion, multiplicative extended Kalman filter

## Životopis

Matej Zubčić rođen je 6. studenog 1987. godine u Slavonskome Brodu, gdje je ujedno pohađao osnovnu i srednju školu. Zbog ranog zanimanja za elektroniku i računala, završio je srednju Tehničku školu, smjer Tehničar za elektroniku. U srednjoj školi je proširio zanimanje i za računalno programiranje, što ga je dovelo i na županijsko natjecanje iz Informatike i programiranja. Po završetku srednje škole, upisuje Elektrotehnički fakultet u Osijeku, gdje postaje prvostupnik inženjer elektrotehnike, smjer Informatika te nakon toga i prvostupnik inženjer računarstva. Tijekom studija, zanimanje širi i na ugradbene sustave gdje i trenutno posvećuje većinu svog vremena. Praktična znanja proširuje i radom za Hrvatski Telekom i Siemens CVC, u kojima je radio tehničku podršku i razvoj programskih rješenja u području telekomunikacija.

---

Matej Zubčić

## Prilozi

Prilozi vezani uz ovaj rad dostavljeni su na CD mediju. Sadržaj priloga naveden je u sljedećoj tablici.

<b>Prilog</b>	<b>Datoteka</b>	<b>Opis</b>
1.	DiplomskiRad-ZubčićD275.docx	Elektronički primjerak diplomskog rada (Microsoft Office 365 Word)
2.	DiplomskiRad-ZubčićD275.pdf	Elektronički primjerak diplomskog rada (PDF)
3.	DiplomskiRad-ZubčićD275_Matlab.zip	Programski kod (u Matlabu)