RAČUNALNI PRIKAZ RASTA URBANE POPULACIJE

Dubinjak, Mateo

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA

PREDDIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ RAČUNARSTVO

RAČUNALNI PRIKAZ RASTA URBANE POPULACIJE

Završni rad

Mateo Dubinjak

Osijek, 2019.

SADRŽAJ

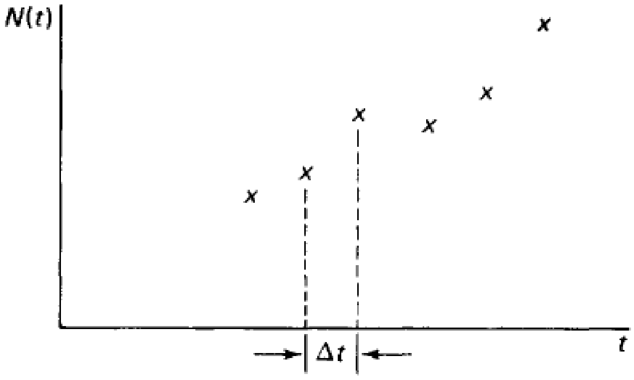
1. UVOD

Evolucijski proces rasta urbane sredine i njene populacije poprilično je nepredvidljiv mehanizam. Taj proces nikad nije linearan i često modeli za projekciju populacije grada ne budu točni. Natalitet, mortalitet, emigracija i imigracija su glavni čimbenici koji uzrokuju rast ili pad populacije neke urbane sredine. Kulturološke norme, zdravstveno stanje, dostupnost hrane i vode samo su neki od brojnih čimbenika koji uzrokuju promjene kod nataliteta, mortaliteta i migracije. Stoga se postavlja pitanje je li moguće prikazati rast i ekspanziju neke urbane sredine s velikom preciznošću. Odgovor je negativan, međutim, matematički modeli i algoritmi za projekciju populacije okvirno govore o tome koliko će se populacija neke urbane sredine promijeniti nakon određenog perioda godina. Zadatak matematičkih modela je unaprijed otkriti reakciju grada na određene promjene poput inicijativa urbanog razvoja, izgradnje novih cesta te industrijskih i naseljivih zona. U poglavlju 2 opisan je diskretni model rasta urbane populacije te je opisana njegova simulacija, a u poglavljima 3, 4, 5 i 6 napredniji modeli, te je za svaki od njih objašnjena i simulacija rada na računalu.

Zadatak završnog rada je istražiti i opisati različite modele rasta urbane populacije te u programskom jeziku C# izraditi program za te modele.

2. DISKRETNI MODEL

Diskretni model je vrlo jednostavan model rasta populacije koji za projekciju koristi osnovne računske operacije. Model koristi podatke o trenutnoj populaciji i stopi rasta za prognozu buduće populacije grada. Korisnik modela bira vremenski interval za koji će se računati stopa rasta s obzirom na raspoloživost prijašnjih popisa stanovništva. Biranje intervala je prikazano slikom 2.1.



Slika 2.1. Interval koji korisnik bira s obzirom na raspoloživost podataka o populaciji

Stopa rasta, prema [1, str. 123], je mjera koja pokazuje za koliko se populacija povećava u godini dana. Računa se na sljedeći način:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}. \qquad (2\text{-}1)$$

ΔN predstavlja razliku populacije u godini $t + \Delta t$ te populacije u godini t. ΔN se zatim dijeli s vremenskim intervalom Δt da se dobije stopa rasta populacije kroz godinu dana. Model koristi stopu rasta po stanovniku $R(t)$ koja u umnošku s početnom populacijom N_0 daje iznos za koji će se populacija povećati. $R(t)$ se dobije količnikom izraza (2-1) i početne populacije N_0:

$$R(t) = \frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t \cdot N(t)}. \qquad (2\text{-}2)$$

Korisnik odabire novi vremenski interval ΔT koji se zbraja s trenutnom godinom T. Time se dobije godina za koju će model prognozirati populaciju $(T + \Delta T)$. Zbroj početne populacije $N(T)$ s umnoškom stope rasta $R(T)$ i početne populacije $N(T)$ daje prognozu populacije grada za ΔT godina:

$$N(T + \Delta T) = N(T) + \Delta T \cdot R(t) \cdot N(T). \tag{2-3}$$

U uvodnom dijelu rada se govorilo o tome kako postoje četiri glavna čimbenika koji utječu na stopu rasta populacije. Stoga dodavanje stopa rađanja, smrtnosti, imigracije i emigracije povećava točnost modela:

$$N(T + \Delta T) = N(T) + \Delta T \cdot \big(R_a(t) - S(t) + I(t) - E(t)\big) \cdot N(T). \tag{2-4}$$

Komponenta $(R_a(t) - S(t) + I(t) - E(t))$ predstavlja stopu rasta $R(t)$ kod koje se za svaki čimbenik posebno računa stopa rasta. Sastoji se od:

$$R_a(t) = \frac{broj\ rođenih}{\Delta t \cdot N(T)}, \tag{2-5}$$

$$S(t) = \frac{broj\ umrlih}{\Delta t \cdot N(T)}, \tag{2-6}$$

$$I(t) = \frac{broj\ useljenih}{\Delta t \cdot N(T)}, \tag{2-7}$$

$$E(t) = \frac{broj\ iseljenih}{\Delta t \cdot N(T)}, \tag{2-8}$$

gdje je:

- $R_a(t) -$ stopa rađanja,
- $S(t) -$ stopa smrtnosti,
- $I(t) -$ stopa imigracije,
- $E(t) -$ stopa emigracije.

Zadani interval ΔT je moguće multiplicirati kako bi se prognozirala populacija za $n\Delta T$ godina:

$$N(T_0 + \Delta T) = N_0(1 + R_0\Delta T), \tag{2-9}$$

$$N(T_0 + 2\Delta T) = (1 + R_0\Delta T)N(T_0 + \Delta T) = N_0(1 + R_0\Delta T)^2, \tag{2-10}$$

$$N(T_0 + 3\Delta T) = (1 + R_0\Delta T)N(T_0 + 2\Delta T) = N_0(1 + R_0\Delta T)^3, \tag{2-11}$$

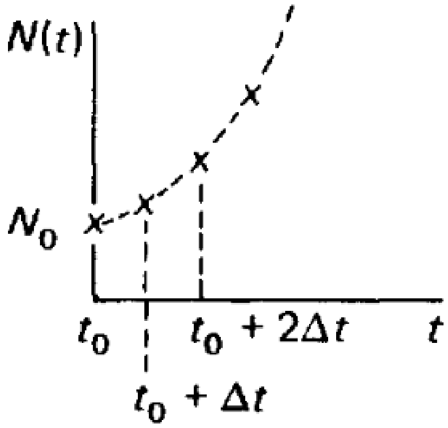
gdje vrijedi

$$N(T_0) = N(T) = N_0. \tag{2-12}$$

Općenita formula:

$$N(T_0 + m\Delta T) = N_0(1 + R_0 \cdot \Delta T)^m. \tag{2-13}$$

Rast populacije s obzirom na multipliciranje intervala izrazom (2-13) je prikazano slikom 2.2.



Slika 2.2. Rast populacije diskretnog modela

Ako je zbroj stopa rađanja i imigracije veći od zbroja stopa smrtnosti i emigracije ($R_0 > 0$), populacija raste. U svakom intervalu populacija se povećava istom stopom, međutim ne i za isti iznos, što znači da rast nije linearan. Taj rast je prikazan slikom 2.2.

2.1. IMPLEMENTACIJA DISKRETNOG MODELA

Za implementaciju svih modela je korišteno integrirano razvojno okruženje Visual Studio 2019 koje je razvila tvrtka Microsoft. Visual Studio je alat koji se koristi za izradu računalnih programa, web stranica, web i mobilnih aplikacija. Koristi Microsoftove razvojne platforme kao što su Windows API, Windows Forme, Windows Presentation Foundation, Microsoft Silverlight...

Razvojna platforma koja se koristi za implementaciju svih modela je Windows forma (WinForms). Windows forme su grafičke biblioteke klasa (programa) koje se pokreću u Microsoftovom .NET programskom framework-u.

Framework sadrži veliku biblioteku klasa te podržava više programskih jezika u istom sistemu. WinForms aplikacija je cijelo vrijeme aktivna i čeka neku akciju (naprimjer da se pritisne gumb) kako bi reagirala na taj događaj. Zatim aplikacija izvršava kod i algoritam te prikazuje rezultate grafički ili tekstualno. Kod je pisan u C#, objektno-orijentiranom programskom jeziku koji se bazira na konceptu objekta koji predstavlja nekakvu cjelinu podataka. C# je jezik napravljen specifično za programiranje u .NET framework-u. Velika prednost jezika C#, prema [2, str. 10], je njegova bliskost s CLR-om (engl. Common Language Runtime) što poboljšava međusobnu interakciju programa i povećava sigurnost te jednostavnost razvoja aplikacija pružajući veliku biblioteku klasa.

C# kod diskretnog modela prikazan je na slici 2.3.

```
private void BunifuImageButton1_Click(object sender, EventArgs e)
        {
            t.Add(int.Parse(time.Text));
            starting = int.Parse(start.Text);
            rate = double.Parse(growth.Text);
            interval = int.Parse(time.Text);
            pop = Math.Round(starting + interval * rate * starting, 0, MidpointRounding.AwayFromZero);
            population.Text = pop.ToString();
            populacije.Add(pop);
        }
```

Slika 2.3. Diskretan populacijski model

- $rate \equiv stopa\ rasta$
- $starting \equiv N_0$
- $interval \equiv \Delta T$

„Math.Round“ je funkcija koja predani decimalni broj zaokružuje na n decimala. Funkcija je potprogram koji jedan ili više podataka pretvara u novi podatak. „populacije“ je lista u koju se spremaju svi rezultati prognoze populacije. Poslije se ti rezultati prikazuju kao točke na 2-D grafu koje spojene daju pravac ili krivulju rasta populacije..

2.2. SIMULACIJA DISKRETNOG MODELA

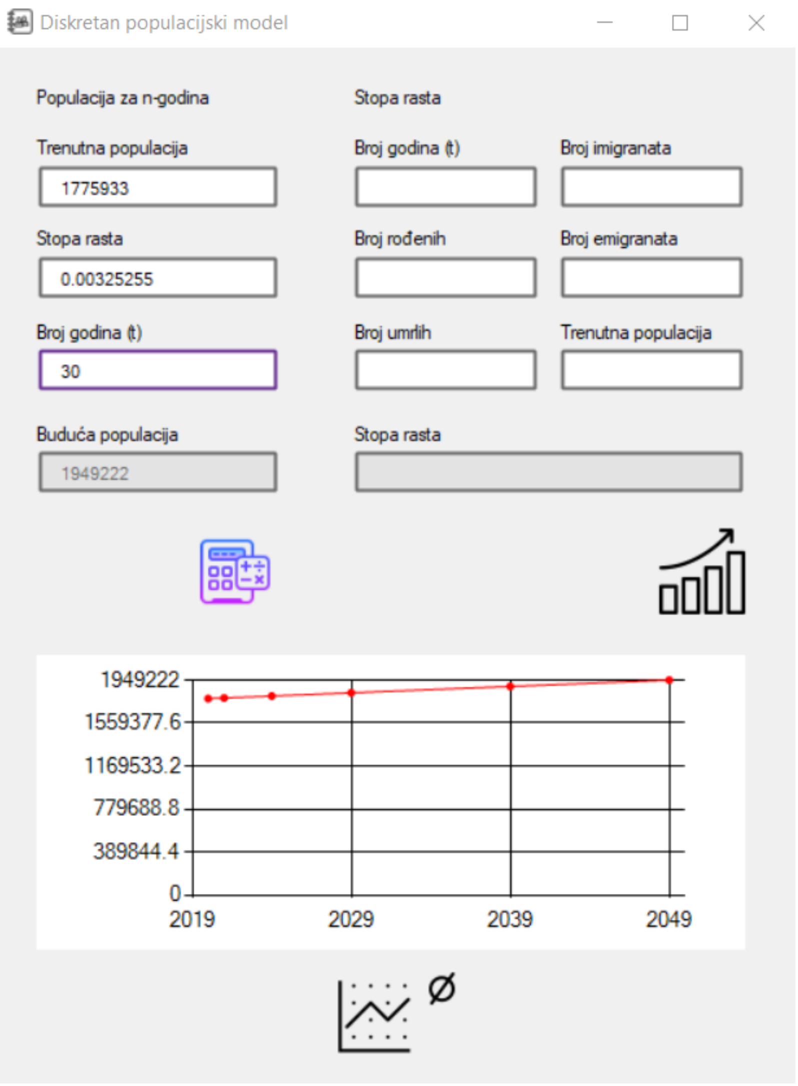
Stopa rasta po stanovniku Varšave:

$$Stopa\ rasta = \frac{\text{broj rođenih} + \text{broj imigranata} - \text{broj umrlih} - \text{broj emigranata}}{broj\ godina\ koje\ se\ uzimaju\ u\ obzir * ukupna\ populacija}$$

Međutim, zbog nedostatka nekih parametara stopa rasta se računa pomoću trenutne i prošle populacije Varšave:

$$Stopa\ rasta = \frac{populacija\ Varšave\ 2019. - populacija\ Varšave\ 2000.}{20 * populacija\ Varšave\ 2019.}$$

Moguće je uzeti i kraći ili duži period za računanje stope rasta.



Slika 2.4. Simulacija rasta Varšavske populacije

3. DISKRETNI MODEL S DOBNOM RAZDIOBOM

Kako bi se buduća populacija grada točnije prognozirala potrebno je uzeti u obzir i razdiobu dobi. Za svaku dobnu skupinu pojedinačno se računaju stope rađanja i smrtnosti te se stoga i za svaku dobnu skupinu prognozira populacija. Diskretni model s dobnom razdiobom se najčešće koristi za prognoziranje rasta populacije jednog spola, većinom ženskog. Uobičajeno se za svaku skupinu uzima interval od jedne godine (Δt = 1):

$N_0 = populacija\ mlađa\ od\ jedne\ godine,$

$N_1 = populacija\ jednogodišnjaka,$

$N_2 = populacija\ dvogodišnjaka,$

$\vdots$

$N_m = populacija\ starosti\ m. godina.$

Model koristi Leslie matricu kojoj je potrebna ženska populacija za svaku dobnu skupinu. Kako bi se smanjila matrica i time olakšao postupak, u obzir se uzima pet dobnih skupina (0-19, 20-39...). Kako bi se model dodatno pojednostavio, prema [3, str. 183], stope rađanja i preživljavanja za svaku dobnu skupinu ostaje konstantne kroz vrijeme. U matrici se koriste sljedeći parametri:

b_i - stopa rađanja u dobnoj skupini i.

p_i - vjerojatnost da će osoba preživjeti do sljedeće dobne skupine:

$$p_i = 1 - d_i - e_i, \tag{3-1}$$

gdje d_i predstavlja stopu smrtnosti a $e_i\ stopu\ emigracije.$

$$A = \begin{pmatrix} b_o & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ p_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{3-2}$$

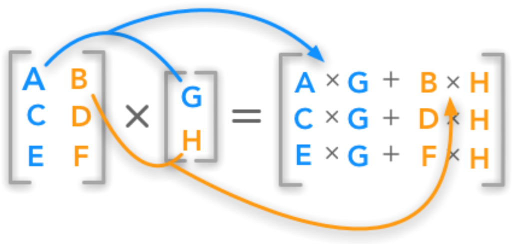
Matrica populacije:

$$\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ \vdots \\ N_n(t) \end{pmatrix} \tag{3-3}$$

Formula za prognoziranje populacije pomoću Leslie matrice:

$$\vec{N}(t+\Delta t) = A * \vec{N}(t). \tag{3-4}$$

Množenje matrica se izvodi na sljedeći način:



Slika 3.1. Postupak množenja dvije matrice

Umnoškom Leslie matrice i matrice populacije se dobije nova matrica dimenzija 5x1 (na slici 3.1. je samo uputstvo za postupak množenja) koja predstavlja populaciju svake dobne skupine za 20 godina.

Leslie matricu je izmislio Patrick H. Leslie te je jedna od najpoznatijih i najkorištenijih metoda za prognoziranje rasta populacije. Promatra se samo jedan spol i u originalnoj Leslie matrici imigracija se zanemaruje. Međutim, moguće je proširiti matricu kako bi se imigracija uzela u obzir:

$$A_I = \begin{pmatrix} b_o & \cdots & b_{n-1} & b_n & b_o{}^* & \cdots & b_{n-1}{}^* & b_n{}^* & 0 \\ p_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & r1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & p_1{}^* & \cdots & 0 & 0 & r2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1}{}^* & 0 & r_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3-5}$$

Tada formula za projekciju populacije glasi:

$$\begin{pmatrix} \vec{N}(t+\Delta t) \\ \vec{N}(t+\Delta t)^* \\ R \end{pmatrix} = A_I * \begin{pmatrix} \vec{N}(t) \\ \vec{N}(t)^* \\ R \end{pmatrix}, \tag{3-6}$$

gdje je $\vec{N}(t)$ populacija starosjedilačke populacije a $\vec{N}(t)^*$ populacija imigrantkinja.

$$\vec{N}(t) = \begin{pmatrix} N_0(t) \\ N_1(t) \\ \vdots \\ N_n(t) \end{pmatrix}, \ \vec{N}(t)^* = \begin{pmatrix} N_0(t)^* \\ N_1(t)^* \\ \vdots \\ N_n(t)^* \end{pmatrix}. \tag{3-7}$$

Zbog proširene matrice potrebno je poznavati populaciju imigrantkinja u svakoj dobnoj skupini. R predstavlja populaciju koja će useliti u idućih 20 godina. Novopridošla populacija R se množi s postotcima r_n kako bi se znalo koliko je populacije iz koje dobne skupine uselilo. Zatim se svakoj imigrantskoj dobnoj skupini zbroji ta novopridošla populacija. Korištenjem izraza (3-7) se dobije populacija svake dobne skupine za 20 godina koja uključuje i populaciju imigrantkinja. Stope rađanja, smrtnosti i imigracije izražavaju se decimalnim brojevima u intervalu [0, 1].

3.1. IMPLEMENTACIJA DISKRETNOG MODELA S DOBNOM RAZDIOBOM

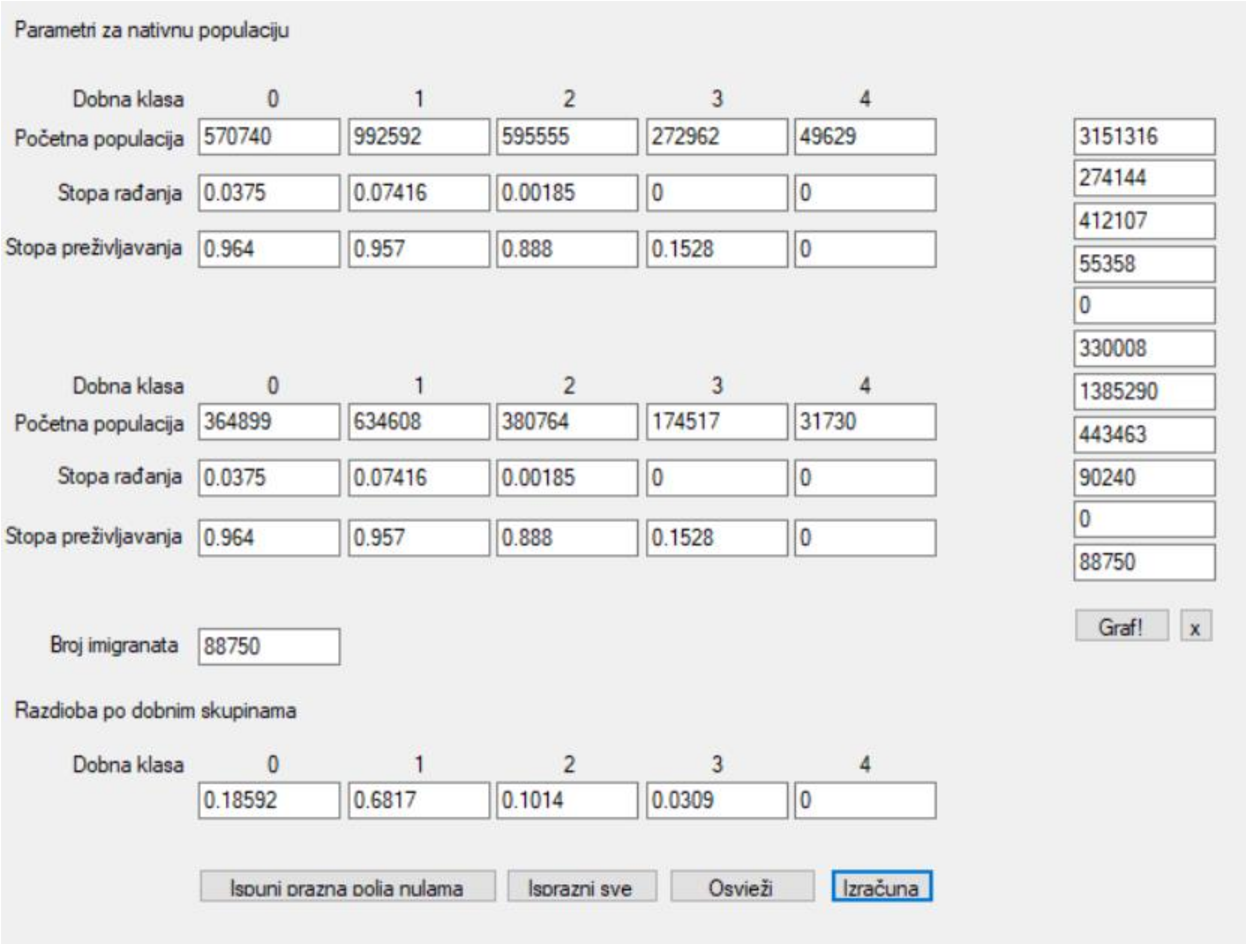
C# kod diskretnog modela s dobnom razdiobom:

```csharp
if (populacije.Count == 0)
{
    dvalue = result1 + result2 + result3 + result4 + result5 + result6 + result7 + result8 + result9 + result10 + result11;
    value = Convert.ToInt32(dvalue);
    populacije.Add(value);
}

res1 = result1 * double.Parse(textBox6.Text) + result2 * double.Parse(textBox7.Text) + result3 * double.Parse(textBox8.Text) +
result4 * double.Parse(textBox9.Text) + result5 * double.Parse(textBox10.Text) + result6 * double.Parse(textBox21.Text) +
result7 * double.Parse(textBox22.Text) + result8 * double.Parse(textBox23.Text) + result9 * double.Parse(textBox24.Text)
+ result10 * double.Parse(textBox25.Text);

res2 = result1 * Math.Pow(double.Parse(textBox11.Text), 20);
res3 = result2 * Math.Pow(double.Parse(textBox12.Text), 20);
res4 = result3 * Math.Pow(double.Parse(textBox13.Text), 20);
res5 = result4 * Math.Pow(double.Parse(textBox14.Text), 20);
res6 = double.Parse(textBox31.Text) * double.Parse(textBox32.Text) * 20;
res7 = result6 * Math.Pow(double.Parse(textBox26.Text), 20) + double.Parse(textBox33.Text) * double.Parse(textBox31.Text) * 20;
res8 = result7 * Math.Pow(double.Parse(textBox27.Text), 20) + double.Parse(textBox34.Text) * double.Parse(textBox31.Text) * 20;
res9 = result8 * Math.Pow(double.Parse(textBox28.Text), 20) + double.Parse(textBox35.Text) * double.Parse(textBox31.Text) * 20;
res10 = result9 * Math.Pow(double.Parse(textBox29.Text), 20) + double.Parse(textBox36.Text) * double.Parse(textBox31.Text) * 20;

res1 *= 20;

dvalue = res1 + res2 + res3 + res4 + res5 + res6 + res7 + res8 + res9 + res10;
value = Convert.ToInt32(dvalue);
populacije.Add(value);
```

Slika 3.2. Diskretni model s dobnom razdiobom

„dvalue" je lista koja sprema populaciju grada nakon svakog izračuna. If uvjet dodaje početnu populaciju u listu dok je još uvijek prazna. U nastavku koda populacije po dobnim skupinama se zbrajaju i množe postupkom prikazanim na slici 3.1. Zatim se populacija svake dobne skupine množi s 20 jer ima pet dobnih skupina što znači da se prognozira populacija za 20 godina. Na kraju se nova populacija ubacuje u listu kako bi se kasnije mogao prikazati graf rasta populacije.

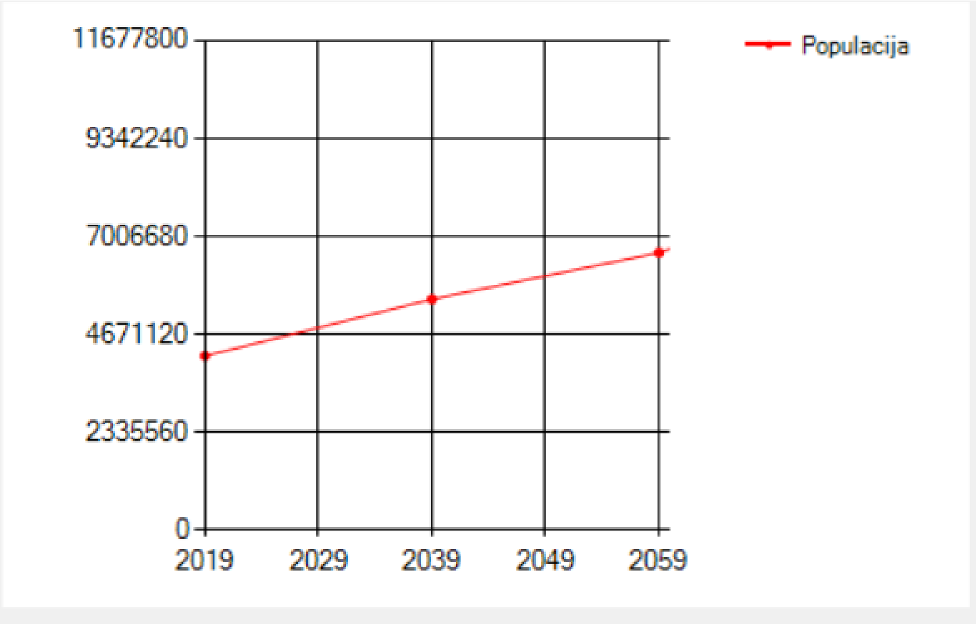
3.2. SIMULACIJA DISKRETNOG MODELA S DOBNOM RAZDIOBOM



Slika 3.2. Parametri Leslie matrice

Stope rađanja i preživljavanja kod starosjedilaca i imigrantkinja su identične jer podaci koji bi upućivali na značajno drukčije stope ne postoje.

Simulacija rasta populacije grada Londona:



Slika 3.3. Simulacija Londonske populacije

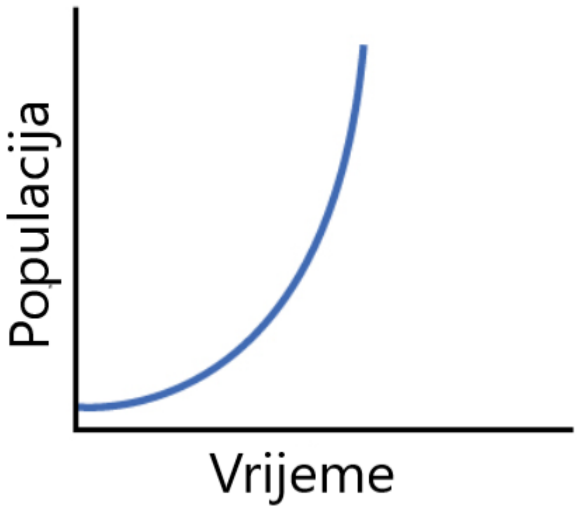
Kako bi ovaj model bio točniji potrebno je računati sa 100x100 matricom gdje svaka godina predstavlja jednu dobnu skupinu, no to zahtijeva parametre za svaku pojedinu dob.

4. EKSPONENCIJALNI RAST

Eksponencijalna funkcija je funkcija

$$f(x) = e^x, \tag{4-1}$$

gdje e predstavlja prirodnu konstantu. Povećavanjem x-a funkcija sve brže raste. Taj skokoviti rast se može vidjeti na slici 4.1.



Slika 4.1. Pregled eksponencijalne funkcije

Model eksponencijalnog rasta sastoji se od tri komponente:

- početna populacija N_0,
- stopa rasta r koja se računa izrazom (2-4),
- vrijeme t za koje prognoziramo populaciju.

Model eksponencijalnog rasta populacije prognozira populaciju za t godina od sad te za to koristi sljedeću eksponencijalnu funkciju:

$$N = N_0 e^{rt}. \tag{4-2}$$

Ako vrijedi da je $r > 0$, populacija grada će se povećavati, a u suprotnom će padati.

4.1. IMPLEMENTACIJA EKSPONENCIJALNOG MODELA

C# kod eksponencijalnog modela:

```
private void BunifuImageButton1_Click(object sender, EventArgs e)
{
    t.Add(int.Parse(bunifuTextBox7.Text));
    double result = Math.Pow(2.71828182846, double.Parse(bunifuTextBox2.Text)
    * int.Parse(bunifuTextBox7.Text));
    double res = Math.Round(result * double.Parse(bunifuTextBox1.Text),
    0, MidpointRounding.AwayFromZero);
    populacije.Add(res);
    bunifuTextBox3.Text = res.ToString();
}
```

Slika 4.2. Eksponencijalni rast populacije

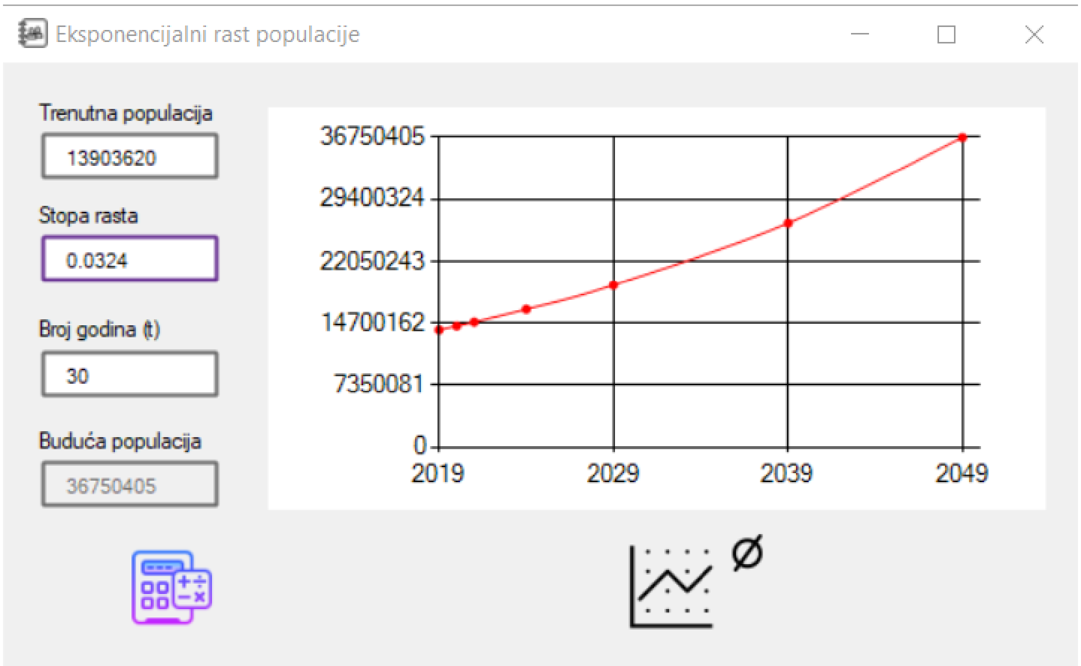
Model eksponencijalnog rasta je najjednostavniji, no ujedno je i najnepouzdaniji model. Koristi se samo u ekstremnim slučajevima i u većini slučajeva samo za kratkoročne prognoze. Sama implementacija je vrlo jednostavna jer su potrebna samo tri parametra kako bi model funkcionirao; populacija grada N_0, vrijeme t koje sami odredimo te stopa rasta r:

- 2.7182 je prirodna konstanta
- $result \equiv e^{rt}$
- $res = N_0 * result$

Rezultat se dodaje u listu populacija za kasniji prikaz grafom.

4.2. SIMULACIJA EKSPONENCIJALNOG MODELA

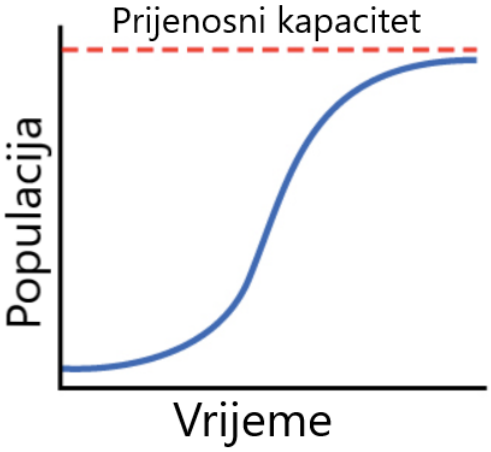
Eksponencijalni rast se najčešće koristi za prognozu populacije u slučajevima gdje populacija grada raste jako brzo. Stopa rasta je nepromjenjiva što znači da će populacija stalno rasti skokovito. Stoga se ovaj model primjenjuje za kraće intervale, 20-30 godina. Zbog potrebe za boljim životnim standardom koji uključuje obrazovanje, mogućnost zaposlenja, bolju komunikaciju i higijenu sve više ljude migrira u gradove. Unatoč tome što je životni standard i dalje jako loš, bolji je u gradovima nego u ostalim dijelovima države što uzrokuje veće stope rasta populacije. Jedan od takvih gradova je i Lagos. Nigerijci sve više migriraju u urbane sredine poput Lagosa zbog prilike za novi, kvalitetniji život te za sobom vode i svoje obitelji. U Lagosu je ta migracija vrlo očita kada se u obzir uzme stopa rasta populacije grada. Eksponencijalni rast populacije Lagosa prikazan je slikom 4.3.



Slika 4.3. Simulacija rasta Lagoške populacije

5. LOGISTIČKI MODEL

Eksponencijalni rast nije održiv ni realan, jer ovisi o neograničenim zalihama resursa. Prema [4, str. 1327] rast će se održati dokle god ima resursa koji će taj rast podupirati (prostor, energija, voda, hrana...), no poslije će krenuti usporavati sve dok rast populacije ne stagnira. Zbog toga se uvodi nova komponenta u model, prijenosni kapacitet K, koji predstavlja maksimalnu populaciju koju grad može postići. Određuje se s obzirom na količinu raspoloživih resursa. Takav rast prikazan je slikom 5.1.



Slika 5.1. Logistički rast populacije

Logistički rast prikazan je sljedećim izrazom:

$$N = \frac{K}{1+Ae^{-rt}} \; ; \; A = \frac{K-N}{K}. \qquad (5\text{-}1)$$

Dok je $K \gg N$, $\frac{(K-N)}{K}$ poprima oblik $\frac{K}{K}$ = 1 te se funkcija N ponaša eksponencijalno. Kako populacija N raste, tako se konstanta A smanjuje sve dok rast populacije ne stagnira.

5.1. IMPLEMENTACIJA LOGISTIČKOG MODELA

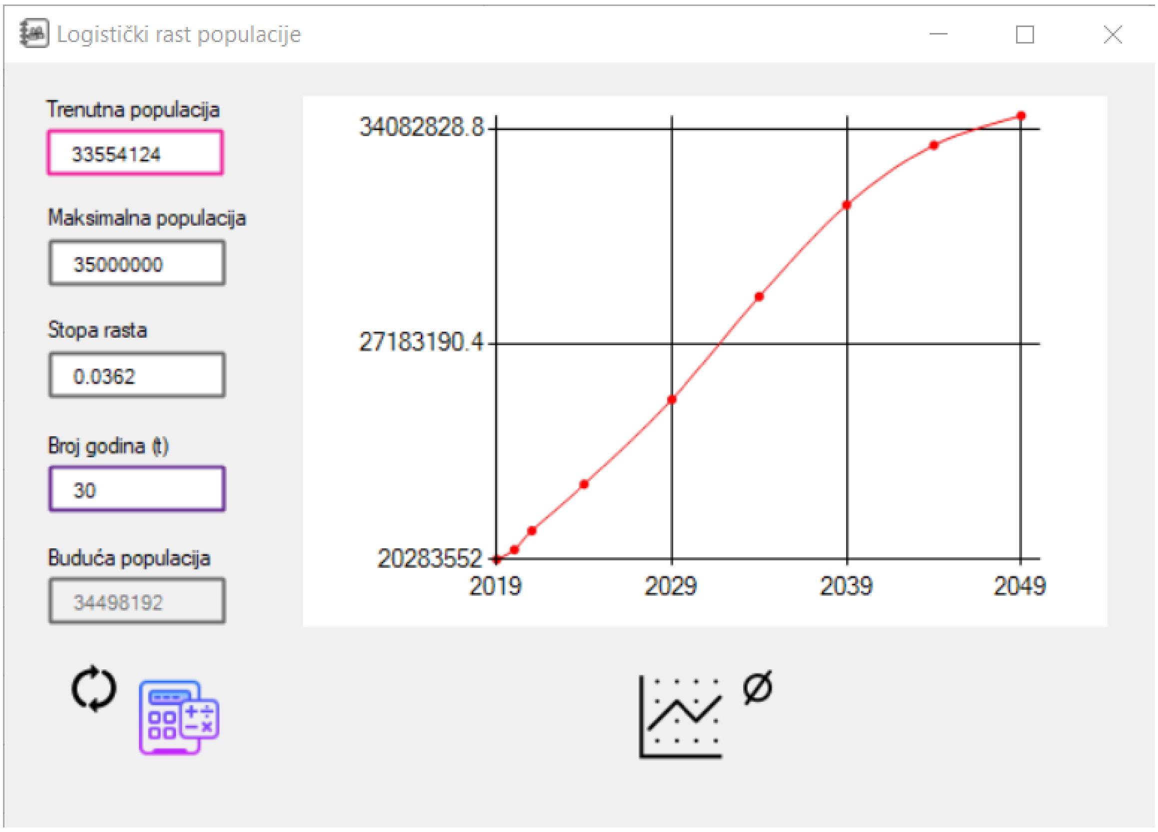
Implementacija ovog modela je gotovo identična implementaciji eksponencijalnog modela rasta populacije. Jedina razlika je sama formula kojom se računa populacija. Implementacija je prikazana slikom 5.2.

```
private void BunifuImageButton1_Click(object sender, EventArgs e)
{
    t.Add(int.Parse(bunifuTextBox4.Text));
    double a = (double.Parse(bunifuTextBox2.Text) -
    double.Parse(bunifuTextBox1.Text)) / double.Parse(bunifuTextBox1.Text);
    double power = Math.Pow(2.71828182846, (-1) *
    double.Parse(bunifuTextBox3.Text) * double.Parse(bunifuTextBox4.Text));
    double result = double.Parse(bunifuTextBox2.Text) / (1 + a*power);
    double res = Math.Round(result, 0, MidpointRounding.AwayFromZero);
    populacije.Add(res);
    bunifuTextBox5.Text = res.ToString();
}
```

Slika 5.2. Implementacija modela logističkog rasta populacije

5.2. SIMULACIJA LOGISTIČKOG MODELA

Ukoliko su poznati ili predvidljivi čimbenici koji će usporiti rast populacije nekog grada koristi se logistički model rasta koji će rezonirati na te promjene te usporiti krivulju rasta. Dhaka, glavni grad Bangladeša, je jedan od najmnogoljudnijih gradova na svijetu kojem je u prošlosti stopa rasta iznosila i do 10% a svakom godinom ta stopa se smanjuje. Prenaseljenost, terorizam i loša medicinska njega samo su neki od razloga zaslužni za usporavanje rasta populacije Dhake. Tu krivulju usporavanja rasta populacije možemo vidjeti na slici 5.3.



Slika 5.3. Simulacija Dhakaške populacije

6. LOTKIN DISKRETNI DETERMINISTIČKI POPULACIJSKI MODEL

Lotkin deterministički populacijski model se primjenjuje isključivo za projekciju populacije jednog spola, kao i diskretni model s dobnom razdiobom. Kod ovog modela se pretpostavlja da je populacija stabilna, što znači da nema migracije.

Lotkin deterministički populacijski model:

$$B_t = \sum_{x=1}^{t} B_{t-x}\, g_x + G_t. \quad (6\text{-}1)$$

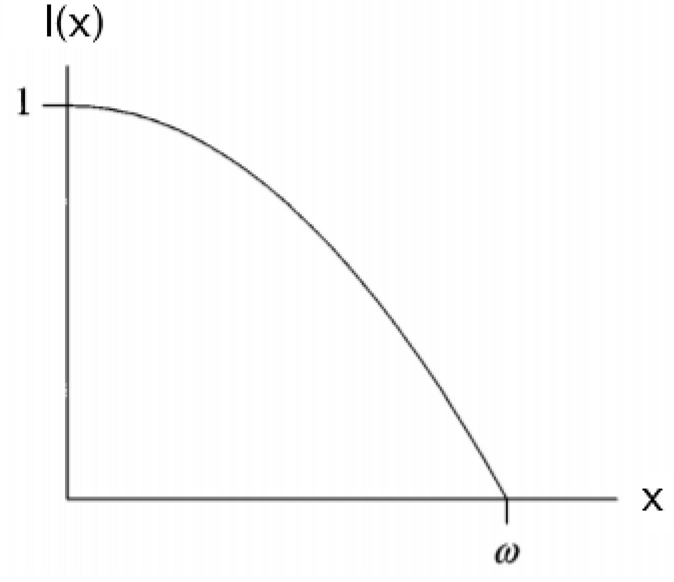
B_t predstavlja broj nove ženske populacije za t godina. Trenutna ženska populacija F_0 se ne zbraja u ovom modelu ali je moguće proširiti model kako bi se u obzir uzeo i taj parametar:

$$F_t = F_0 * s * t + B_t, \quad (6\text{-}2)$$

gdje je s stopa smrtnosti a $F_0 * s * t$ preživjela populacija za t godina.

Vjerojatnost da će osoba preživjeti od rođenja do dobi x označava se sa l_x. m_x je prosječan broj djece koje jedna žena dobi x rodi. l_x i m_x parametri su neovisni o vremenu te unaprijed nama poznati. Svaka dobna skupina (0, 1, 2, ... ω) ima zadane l_x i m_x.

$\omega - maksimalna\ dob\ koju\ je\ moguće\ doživjeti.$



Slika 6.1. Vjerojatnost da osoba doživi ω godina

Za svaku dobnu skupinu l_x i m_x se množe kako bi se dobio broj rođenih od strane žena koje su preživjele do dobi x. Stoga vrijedi:

$$g_x = l_x m_x. \tag{6-3}$$

Prva suma u izrazu (6-1) je broj rođenih od strane žena koje su rođene u trenutku $t = 0$ ili kasnije. Za B_{t-x} vrijedi

$$B_{t-x} = B_0 \tag{6-4}$$

G_t je broj rođenih od strane žena koje su u trenutku $t = 0$ imale dob veću od 0:

$$G_t = \sum_{x=1}^{\omega-t} F_{x,0}\, g_{x+t.} \tag{6-5}$$

$F_{x,0}$ je populacija svake dobne skupine x u trenutku $t = 0$. Vrijedi da je $g_x = g_{x+t}$ jer žene koje su ostarjele za t godina imaju drukčije $m_x\ i\ l_x$. Prema [5, str. 365], nakon više godina G_t komponenta iščezava jer njezin utjecaj na populaciju vremenom postaje zanemariv. Stoga vrijedi sljedeće:

ako je

$$t \geq \omega, \tag{6-6}$$

tada je

$$G_t = 0. \tag{6-7}$$

Primjer Lotkinog diskretnog modela: Fibonaccijevi zečevi

- Parametri:

$$B_0 = 1,$$

$$l_x = 1, x = 1, 2 \ldots$$

$$m_x = \begin{cases} 1, x = 1, 2, \\ 0, x > 2. \end{cases}$$

- Broj rođenih zečeva:

$$B_t = B_{t-1} + B_{t-2.}$$

- Zatim se za $t \to \infty$ dobije Fibonaccijev niz:

$$B_t = 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

6.1. IMPLEMENTACIJA DISKRETNOG LOTKINOG DETERMINISTIČKOG MODELA

C# kod za implementaciju Lotkinog modela:

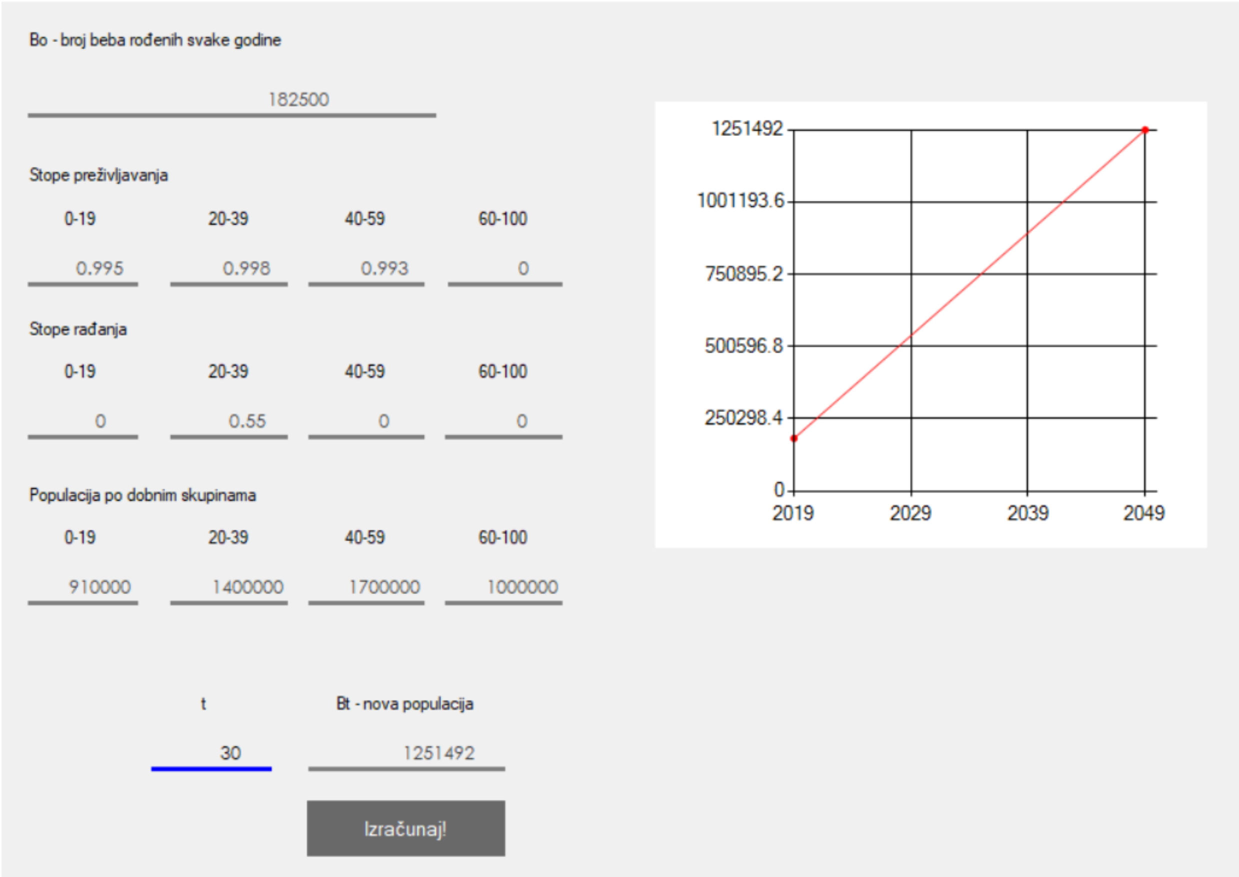
```
double B = 0;
int Bo = int.Parse(beba.Text);
int t = int.Parse(bunifuMaterialTextbox14.Text);

for(int i = 0; i < t; i++)
{
    B += Bo * stope_prezivljavanja[i] * stope_radanja[i];
}

double Gt = 0;
int omega = 100; //maksimalna dob

for(int i = 0; i < (omega - t); i++)
{
    Gt += populacije[i] * stope_radanja[i + t] * stope_prezivljavanja[i + t];
}

double Bt = B + Gt;

bunifuMaterialTextbox13.Text = Bt.ToString();
```

Slika 6.2. Implementacija Lotkinog modela

Funkcija „int.Parse“ pretvara tekst u integer (broj), dok funkcija „ToString()“ pretvara bilo koji tip podatka u tekstualni oblik.

6.2. SIMULACIJA DISKRETNOG LOTKINOG MODELA

Rezultati simulacije rasta ženske populacije u New Yorku kroz idućih 30 godina prikazani su na slici 6.3.



Slika 6.3. Simulacija rasta Newyorške populacije

7. ZAKLJUČAK

U ovom radu predstavljeni su teoretski te uz to i izvedeni na računalu različiti matematički modeli prognoze promjene urbane populacije. Detaljno su napravljeni diskretni model, diskretni model s dobnom razdiobom, eksponencijalni model, logistički model te Lotkin model. Zaključak je da ako želimo što vjernije modelirati rast urbane populacije model mora biti kompliciraniji i uzeti u obzir što više parametara.

Projekcija populacije disciplina je sama za sebe. Postoji mnoštvo modela za prognozu populacije, svaki od njih za određenu situaciju. Stopa rasta koristi jednostavne izračune za mortalitet, natalitet i migraciju no u stvarnosti svi ti parametri imaju vlastite modele koji u obzir uzimaju puno više parametara. Svi ovi modeli su pogodni za prognozu populacije gradovima koji su u prošlosti imali stabilan i konzistentan rast populacije. Problem se javlja kada rast populacije nije predvidljiv, a ne postoji model koji uključuje određeni parametar koji bi kvalitetno i pogodno opisao nepredvidljivost rasta populacije. Zbog rasta populacije na različitim geografskim podnebljima, koja uključuju različita socijalna i prirodna obilježja jasno je da postoje brojne situacije koje mogu utjecati na rast populacije. Neke od njih su različite političke migracije, prirodne katastrofe, klimatske promjene, epidemije, ratne neprilike itd. U skladu s tim potrebno je usavršavati modele koji će u budućnosti moći predvidjeti takve situacije, a samim time i omogućiti njihovo sprječavanje ili barem ublažavanje njihovog učinka na rast i razvoj populacije.

LITERATURA

[1] Richard Haberman, Mathematical Models: Mechanical Vibrations, Population Dynamics, and Traffic Flow (Classics in Applied Mathematics), Society for Industrial and Applied Mathematics (1998)

[2] Brad Merrill, Peter Drayton, Ben Albahari, C# Essentials, 2nd Edition, O'Reilly Media, Inc. 2002.)

[3] P.H., Leslie, „The use of matrices in certain population mathematics", Biometrika, 33(3), 183–212., 1945.

[4] OpenStax, Biology, OpenStax CNX, 8 May 2019 http://cnx.org/contents/185cbf87-c72e-48f5-b51e-f14f21b5eabd

[5] Mark Kot, Elements of Mathematical Ecology, Cambridge University Press (2001), 353 – 375

SAŽETAK

U uvodnom dijelu ovog rada objašnjava se način na koji se računa stopa rasta populacije. Stopa rasta sastoji se od više parametara: mortaliteta, nataliteta i migracije. Mortalitet i natalitet su neizostavan parametar svih modela za prognozu populacije, no migracija također značajno utječe na rast populacije te je stoga jako važan parametar koji bi se trebao uzimati u obzir. Svaki model je implementiran u C# i simuliran za neki grad pripadajućim grafom. U daljnjem tekstu rada se opisuje diskretni model rasta populacije. Kako bi projekcija populacije bila točnija, koristi se diskretni model s dobnom razdiobom. Nadalje se govori o tome kako je eksponencijalni rast populacije neodrživ zbog čega se često ograničava na logistički rast. Na kraju se u radu govori i o osnovama Lotkinog modela.

SUMMARY

In the introductory part of this thesis there is an explanation on how to calculate a growth rate of the population. Growth rate consists of multiple parameters: mortality, natality and migration. Mortality and natality are unavoidable parameters which are used in every single population projection model. Migration also affects population growth a lot and should be included in every model. Every model is programmed in C# and simulated later on. In this thesis there is also an explanation of the discrete model. Discrete model with an age distribution is used for projections that are more precise. Later on is mentioned exponential growth model which is unsustainable due to lack of resources. That is why its growth is often limited to logistic growth. It also mentions the basic principles of Lotka's model.

ŽIVOTOPIS

Mateo Dubinjak rođen je 22. rujna 1997. u Slavonskom Brodu. Osnovnu školu je završio u Rušćici. Tehničku školu je završio u Slavonskom Brodu 2016. godine. Iste te godine upisuje Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek.