

# OPTIMIRANJE VOZNOG REDA MREŽE JAVNOG PRIJEVOZA S CILJEM SMANJENJA VREMENA CEKANJA PUTNIKA I POVEĆANJA POPUNJENOSTI VOZILA

---

Hartmann Tolić, Ivana

Doctoral thesis / Disertacija

2020

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:200:046600>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-02**

*Repository / Repozitorij:*

[Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek](#)



SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA  
I INFORMACIJSKIH ZNANOSTI OSIJEK

Ivana Hartmann Tolić

**OPTIMIRANJE VOZNOG REDA MREŽE  
JAVNOG PRIJEVOZA S CILJEM  
SMANJENJA VREMENA ČEKANJA  
PUTNIKA I POVEĆANJA  
POPUNJENOSTI VOZILA**

Doktorska disertacija

Osijek, 2020.

Doktorski je rad izrađen na Zavodu za programsko inženjerstvo  
Fakulteta elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek  
Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku

Mentor: doc. dr. sc. Emmanuel Karlo Nyarko

Doktorski rad ima 108 stranica.

Doktorski rad broj: 75

*We can do anything we want to do if we stick to it long enough.*

- Helen Keller

Hvala mentoru doc. dr. sc. Emmanuelu Karlu Nyarku na podršci, pomoći i vođenju istraživačkog rada tijekom poslijediplomskog studija.

Hvala dragim prijateljima i kolegama koji su mi bili od iznimne pomoći, izvor konstruktivnih savjeta i podrška u raznim prilikama i neprilikama.

Najveću zahvalnost za ovo što sam postigla pripisujem mom suprugu Ivanu koji je uz neumornu podršku imao mnogo strpljenja i razumijevanja te mi bio nepresušan izvor inspiracije.

Hvala vam svima.

Ivana

### **Povjerenstvo za ocjenu doktorske disertacije**

- dr. sc. Goran Martinović, redoviti profesor u trajnom zvanju, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek, predsjednik
- dr. sc. Emmanuel Karlo Nyarko, docent, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek, mentor
- dr. sc. Marin Golub, redoviti profesor, Fakultet elektrotehnike i računarstva u Zagrebu, član
- dr. sc. Radoslav Galić, redoviti profesor u trajnom zvanju, emeritus, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek, član
- dr. sc. Alfonzo Baumgartner, izvanredni profesor, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek, član

### **Povjerenstvo za obranu doktorske disertacije**

- dr. sc. Goran Martinović, redoviti profesor u trajnom zvanju, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek, predsjednik
- dr. sc. Emmanuel Karlo Nyarko, docent, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek, mentor
- dr. sc. Marin Golub, redoviti profesor, Fakultet elektrotehnike i računarstva u Zagrebu, član

Datum obrane doktorske disertacije: 9. travnja 2020.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Opis problema . . . . .	1
1.2	Organizacija i struktura doktorske disertacije . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Pregled dosadašnjih istraživanja</b>	<b>7</b>
2.1	Analitički zadane metode rješavanja problema . . . . .	7
2.2	Minimiziranje ukupnog vremena putovanja . . . . .	9
2.3	Problemi minimiziranja kašnjenja vozila . . . . .	9
2.4	Optimalno vrijeme između dvaju uzastopnih vozila . . . . .	10
2.5	Minimiziranje vremena čekanja putnika na stanici . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Višekriterijski optimizacijski model voznog reda</b>	<b>23</b>
3.1	Opis problema na temelju ograničenja, parametara, varijabli i skupova . . . . .	25
3.2	Količina čekanja putnika na stanici i iskoristivost vozila . . . . .	27
3.3	Ciljna funkcija . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Određivanje rješenja višekriterijskog optimizacijskog modela</b>	<b>32</b>
4.1	Osnovni koncept višekriterijske optimizacije . . . . .	33
4.2	Metoda za određivanje skupa nedominatnih rješenja . . . . .	38
4.2.1	Optimizacija rojem čestica . . . . .	38
4.2.2	Višekriterijski algoritam optimizacijom roja čestica . . . . .	40
4.3	Metode za određivanje preferiranog optimalnog rješenja iz skupa optimalnih rješenja . . . . .	42
4.3.1	TOPSIS metoda za određivanje preferiranog rješenja . . . . .	43
4.3.2	GRA metoda za određivanje preferiranog optimalnog rješenja . . . . .	45
4.3.3	Predložena metoda za određivanje preferiranog optimalnog rješenja . . . . .	46
4.4	Evaluacija rješenja . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Eksperimentalna analiza</b>	<b>52</b>
5.1	Numerički primjer 1 - određivanje optimalnog rješenja fiksnom dopustivom maksimalnom iskoristivošću vozila . . . . .	52

---

5.2	Numerički primjer 2 - određivanje preferiranog optimalnog rješenja različitim dopustivim maksimalnim iskoristivostima vozila . . . . .	55
5.3	Numerički primjer 3 - analiza i diskusija dobivenih preferiranih optimalnih rješenja dopustivim maksimalnim iskoristivostima vozila . . . . .	58
5.4	Usporedba preferiranih optimalnih rješenja dobivenih različitim metodama . . . . .	61
5.5	Evaluacija preferiranog optimalnog rješenja . . . . .	68
<b>6</b>	<b>Zaključak</b>	<b>72</b>
	<b>Literatura</b>	<b>76</b>
	<b>Popis slika</b>	<b>83</b>
	<b>Popis tablica</b>	<b>84</b>
	<b>Popis pokrata i oznaka</b>	<b>86</b>
	<b>Sažetak</b>	<b>87</b>
	<b>Životopis</b>	<b>90</b>
	<b>Dodatak</b>	<b>91</b>
1	Prilog: rezultati istraživanja numeričkog primjera 1 . . . . .	91
2	Prilog: rezultati istraživanja numeričkog primjera 2 . . . . .	94
3	Prilog: rezultati istraživanja numeričkog primjera 3 . . . . .	96
4	Prilog: rezultati detaljnog prikaza rješenja određivanja optimalnog rješenja različitim metodama . . . . .	99
5	Prilog: rezultati detaljnog prikaza rješenja određivanja optimalnog rješenja različitim metodama . . . . .	101

---

# 1

## Uvod

U modernom transportnom sustavu putnika najveći je izazov smanjiti, općenito rečeno, potrošnju energije i maksimizirati ekonomske, tehnološke i društvene ciljeve. Problemi voznog reda i raspoređivanja vozila u mreži javnog prijevoza putnika, **PT** (engl. *public transportation*), poznati su godinama [1–3]. U dosadašnjoj literaturi ciljevi su pronaći što bolji algoritam modificirajući prijašnje matematičke metode i postići bolje rezultate rabeći različite metode i poznate algoritme. Planiranje gradskog prijevoza putnika izrazito je složeno i vrlo se često promatraju rasčlanjene dvije faze: minimalno vrijeme čekanja putnika na stanici **PWT** (engl. *Passenger Waiting Time*) i optimalan broj vozila [1]. Posljednjih godina proučava se problem željezničkog voznog reda **TTP** (engl. *train timetabling problem*) kojem je osnovni cilj određivanje periodičnog ili neperiodičnog voznog reda koji se drže fiksnog kapaciteta vozila i zadovoljava ograničenja broja operacija [4–7]. Jedan je od najvećih izazova u algoritmima za rješavanje **PWT** problema planiranje optimalnog broja vozila i njihovo raspoređivanje, minimiziranje vremena putovanja i određivanje najkraćeg puta [8].

Planiranje mreže javnog prijevoza složen je problem koji sadržava četiri osnovna podproblema - konstruiranje mreže linije javnog prijevoza, generiranje voznog reda, vremensko raspoređivanje vozila i raspored vozača [9–11]. Svi podproblemi međusobno su povezani i ne smiju se promatrati zasebno. U stvarnim primjerima iz literature oni predstavljaju posebno zadovoljavanje želja putnika, u cilju povećanja usluga putnicima, i zadovoljavanje ciljeva prijevoznike tvrtke, odnosno smanjenju operativnih troškova [12, 13].

### 1.1 Opis problema

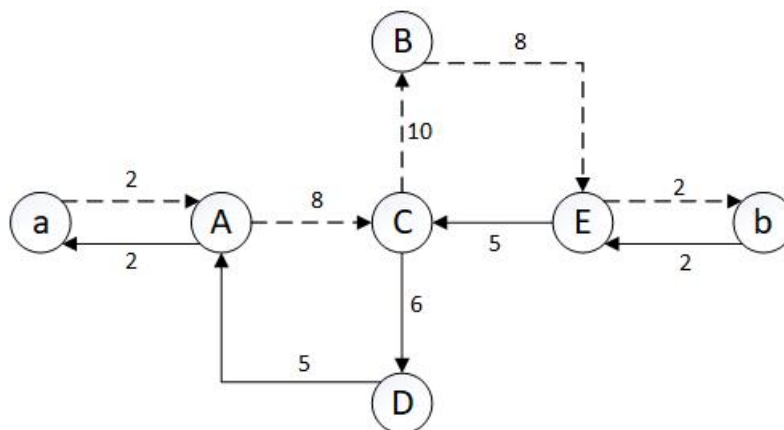
U svrhu smanjenja vremena čekanja putnika na sljedeće vozilo na stanici i maksimiziranja iskoristivosti vozila, proučava se težinski graf, definiran definicijom 1.1, sa skupom vrhova (stanica)  $A, B, C, D, E$  i skupom bridova kojem se svakom bridu pridružuje nenegativni



broj, vrijeme potrebno vozilu iz jedne stanice u drugu, odnosno težina brida.

**Definicija 1.1.** *Težinski graf (engl. weighted graph) je uređeni par  $(G, \omega)$ .  $G(V, E)$  je graf, gdje je  $V$  skup čvorova ili vrhova, a  $E$  skup bridova. Funkcija  $\omega : E(G) \rightarrow \mathcal{R}_0^+$  koja svakom bridu  $e$  iz  $G$  pridružuje nenegativni broj  $\omega(e)$  naziva se težinska funkcija, a njezina vrijednost naziva se težina brida  $e$ .*

Primjer težinskog grafa, koji odgovara mreži javnog prijevoza putnika prikazan je na slici 1.1.



Slika 1.1: Primjer mreže javnog prijevoza putnika s prikazom vremena putovanja između stanica temeljno na [14]

PT mreža ima dva okretišta ( $a$  i  $b$ ), dvije rute ( $r_{a \rightarrow b}, r_{b \rightarrow a}$ ) i jednu stanicu presjedanja (stanica  $C$ ). Za potrebe izračuna PT-a i omjera zauzetosti vozila (VOR) potrebno je definirati polazišno-odredišnu, OD, matricu koja sadrži broj osoba koji putuju od jedne stanice (polazište) do druge (odredište). Za primjer mreže prikazane na slici 1.1 dana je OD matrica tablicom 1.1.

Tablica 1.1: OD matrica broja putnika

	A	B	C	D	E
A	0	100	50	70	80
B	0	0	0	0	50
C	50	20	0	80	60
D	60	0	0	0	0
E	80	100	20	60	0

Transparentan broj putnika za svaku rutu na temelju OD matrice dan tablicom 1.1 za svaki segment linije  $ACBE$  za rutu  $r_{a \rightarrow b}$  i linije  $ECDA$  za rutu  $r_{b \rightarrow a}$  dan je tablicom 1.2.

Tablica 1.2: Zbroj putnika na temelju OD matrice, za svaki segment linije za rute  $r_{a \rightarrow b}$  i  $r_{b \rightarrow a}$

	Segment linije	Zbroj broja putnika za svaki OD	Ukupan zbroj putnika
$r_{a \rightarrow b}$	$A - C$	$k(AC) + k(AB) + k(AE) + k(AD)$	300
	$C - B$	$k(CB) + k(CE) + k(AB) + k(AE) + k(EB)$	360
	$B - E$	$k(BE) + k(AE) + k(CE)$	190
$r_{b \rightarrow a}$	$E - C$	$k(EC) + k(EB) + k(ED) + k(EA)$	260
	$C - D$	$k(CD) + k(CA) + k(AD) + k(ED) + k(EA)$	340
	$D - A$	$k(DA) + k(CA) + k(EA)$	190

Funkcija  $k(\cdot)$  pridružuje svakom OD paru odgovarajući broj putnika,  $\{k(AB), k(AC), k(AD), \dots\}$ . Najveći broj osoba koje žele ući u vozilo na ruti  $r_{a \rightarrow b}$  na segmentu linije  $ACBE$  je  $C - B$  360 putnika, dok je za rutu  $r_{b \rightarrow a}$  na segmentu linije  $ECDA$   $C - D$  340 putnika.

Uz pretpostavku za liniju  $ACBE$  na ruti  $r_{a \rightarrow b}$  da se svi putnici mogu prevesti prvim servisom  $ACBE1$  u proučavanom razdoblju svih 360 putnika bilo bi zadovoljeno, odnosno ne bi ostalo putnika na stanicu nakon odlaska servisa. U slučaju da je veličina kapaciteta vozila ograničena mogući problem je da neki od putnika moraju ostati na stanicu. Putnici koji su ostali na stanicu mogu odabrati čekati sljedeći servis ili odabrati drugi oblik transporta, na primjer taksi ili neki drugi oblik prijevoza putnika. Jedan od bitnih utjecaja na odluku hoće li putnici koji su morali ostati na stanicu odabrati drugi oblik transporta ili ne vrijeme je čekanja na sljedeći servis. U slučaju da je razlika vremena odlaska servisa i dolaska idućeg servisa na promatranom stanicu između dvaju servisa velika, pretpostavlja se da će putnici odabrati drugi oblik transporta što ne odgovara ni putnicima, a ni prijevoznikom poduzeću jer će u tom slučaju izgubiti zaradu. U tom slučaju, prijevozniko poduzeće mora definirati gušći raspored polazaka servisa što utječe na povećanje broja vozača i vozila, a s tim i povećanje troškova.

Zbog lakšeg razumijevanja prikaza modela i izračuna u poglavljima 3 i 5, u ovom poglavlju opis modela će se pojednostaviti. Pretpostavlja se da je željena popunjenost vozila sedamdeset putnika i fiksna je broj polazaka sa stanice u promatranom vremenu od jednog sata prijedodne iz čega proizlazi da su četiri polaska vozila sa stanice za rutu  $r_{a \rightarrow b}$  i četiri polaska

vozila za povratnu rutu  $r_{b \rightarrow a}$  unutar sat vremena.

U tom je slučaju na temelju broja putnika za svaki segment linije prikazan tablicom 1.2 nakon što prvi servis  $ACBE1$  napusti stanicu  $A$ , broj putnika koji nisu uspjeli ući u vozilo 230. Putnici koji su ostali na stanici  $A$  u najboljem slučaju, u korist prijevoznčke tvrtke, čekaju sljedeći servis na promatranoj liniji. Pretpostavimo da je svih 50 putnika koji su izašli na stanicu  $C$  ušlo u servis  $ACBE1$  na stanici  $A$ . Na stanici  $C$  čeka ući na servis  $ACBE1$   $k(CB) = 20$  putnika za stanicu  $B$  i  $k(CE) + k(EB) = 60 + 100 = 160$  putnika za stanicu  $E$ , odnosno za iduće stanice na liniji  $ACBE$  ukupno 180 putnika. Pretpostavka je da putnici sa stanice  $E$  idu u stanicu  $B$  preko preko stanice  $C$ , stanice presjedanja, i dođu na vrijeme linijom  $ECDA$  na stanicu presjedanja. Nakon izlaska putnika na stanici  $C$  iz servisa  $ACBE1$  i ulaskom mogućih 50 putnika, na stanici  $C$  ostalo je čekati sljedeći servis 130 putnika. Uzevši u obzir putnike koji su ostali na stanici  $A$  nakon servisa  $ACBE1$ , njih 230, nakon što je drugi servis  $ACBE2$  otišao sa stanice  $A$ , ostalo je 460 putnika. Pretpostavlja se da je svih 50 putnika ušlo u servis  $ACBE2$  na stanici  $A$  za stanicu  $C$ . Nakon što je servis  $ACBE2$  napustio stanicu  $C$  ostalo je 260 putnika čekajući idući servis uključujući putnike koji su ostali od prethodnog servisa. Popunjenosti vozila za servise  $ACBE1$  i  $ACBE2$  su maksimalne i iznose za svaku stanicu redom  $[1 \ 1 \ 1]$ . Svaki element vektora popunjenosti vozila dobiven je kao omjer broja putnika u vozilu i kapaciteta vozila. Definiran je za svaki OD par svakog servisa - u ovom su slučaju to parovi  $AC$ ,  $CB$  i  $BE$ . Količina čekanja putnika za danu stanicu definirana je kao produkt broja putnika koji su ostali čekati sljedeći servis i vremena potrebnog da sljedeći servis stigne na stanicu. Također, moraju se uzeti u obzir i novi putnici koji pristižu na stanicu za sljedeći servis. Način na koji se to uzima u obzir detaljno je objašnjen u poglavlju 3. Ako je vrijeme između dvaju uzastopnih servisa 15 minuta, odnosno servis  $ACBE2$  odlazi sa stanice 15 minuta nakon što je otišao servis  $ACBE1$  s iste stanice, količina čekanja putnika je umnožak broja putnika koji su ostali na stanici i 15 minuta. U okviru danog gornjeg primjera, količina čekanja putnika na stanici  $A$  na servis  $ACBE2$  je  $3450 \text{ putnika} \times \text{min}$ , dok je količina čekanja putnika na stanici  $C$  istog servisa  $1950 \text{ putnika} \times \text{min}$ . Ukoliko je vrijeme između dvaju vozila dulje pretpostavlja se da će putnici pronaći drugi oblik prijevoza. Isplativo bi rješenje prijevoznčke tvrtke bilo ako liniju  $ACBE$  i povratnu liniju  $ECDA$  može izvršiti isto vozilo i osoblje u jednom satu. Uz pretpostavku da prijevoznčka tvrtka posjeduje vozila koja se mogu spojiti (kao što su tramvaj ili vlak), može se proučavati i primjer kada je najveći mogući kapacitet 350 putnika,

odnosno 5 vozila po 70 mjesta. U slučaju da je dano vozilo najvećeg dopustivog broja putnika veličine 350 mjesta, rezultati su danog gornjeg primjera sljedeći koji se mogu usporediti s vrijednosima u tablici 1.3:

- na stanici  $A$  ne ostaje putnika što predstavlja dobro rješenje i za putnike i prijevozničku tvrtku
- popunjenost vozila za servise  $ACBE1$  i  $ACBE2$  za svaki posebno po stanicama iznosi  $[0.8571 \quad 1 \quad 0.54286]$ , što odgovara omjeru broja putnika u vozilu i kapaciteta vozila za svaku stanicu.
- broj putnika koji su ostali na stanici nakon što su ova dva servisa napustili stanice iznosi  $[0 \quad 10 \quad 0]$  za servis  $ACBE1$ , odnosno  $[0 \quad 20 \quad 0]$  za servis  $ACBE2$ .

Tablica 1.3: Broj putnika za liniju  $ACBE$  za dva uzastopna servisa

Servis	Segment linije	Ukupan zbroj putnika tablica 1.2	Broj putnika koji su ušli u vozilo	Broj slobodih mjesta u vozilu	Broj putnika koji su ostali na stanici
$ACBE1$	$A - C$	300	300	50	0
	$C - B$	360	350	0	10
	$B - E$	190	190	160	0
$ACBE2$	$A - C$	300	300	50	0
	$C - B$	$360+10=370$	350	0	20
	$B - E$	190	190	160	0

Iz gore navedenih razloga važno je odrediti optimalnu odluku u svrhu zadovoljstva poslovnih interesa prijevoznčkog poduzeća, ali i potreba putnika u isto vrijeme.

## 1.2 Organizacija i struktura doktorske disertacije

Doktorska disertacija proizašla je iz provedenog istraživanja i podijeljena je u sljedeća poglavlja:

2. poglavlje - dan je pregled područja prijevoza putnika s naglaskom na vrijeme čekanja putnika.
  3. poglavlje - definiran je višekriterijski optimizacijski model za rješavanje problema prijevoza putnika s ciljem minimiziranja vremena čekanja putnika na stanici na sljedeće vozilo i maksimiziranja iskoristivosti vozila .
  4. poglavlje - predložena metoda za rješavanje optimizacijskog problema postavljenog u poglavlju 3 kao i postupak evaluacije dobivenog rješenja.
  5. poglavlje - implementacija zadanog problema i provedena tri numerička primjera čija su rješenja uspoređivana s rješenjima implementiranim primjerom iz literature uz interpretaciju dobivenih rješenja sa zaključcima.
-

# 2

## Pregled dosadašnjih istraživanja

U svrhu klasifikacije optimizacijskih modela za minimizaciju PWT-a u poglavlju su prikazane relevantne metode, ciljne funkcije i korišteni algoritmi u prijevoznim sustavima objavljeni u znanstvenoj literaturi zadnjih godina, a temelje se na minimalnom vremenu čekanja putnika i popunjenosti vozila [15]. Poglavlje 2.1 prikazuje analitičke modele za rješavanje problema prijevoza putnika. Matematički su modeli za minimizaciju ukupnog vremena putovanja i minimizaciju PWT-a na stanici presjedanja, kao i odgovarajući algoritmi, prikazani u poglavljima 2.2 i 2.5. Matematički modeli za minimiziranje kašnjenja vozila na stanicu i određivanje optimalnog vremena između dvaju uzastopnih vozila prikazani su u poglavljima 2.3 i 2.4.

### 2.1 Analitički zadane metode rješavanja problema

S ciljem povećanja produktivnosti i korisnosti prijevoznčkih usluga s jedne strane, i zadovoljstva korisnika s druge strane dane su četiri glavne metode za određivanje broja vozila  $[f_j]$  potrebnih u periodu  $j$  koje je definirao Ceder [1, 3, 10].

$$f_j = \frac{P_j}{\gamma_j \cdot c}. \quad (2.1)$$

U prvoj metodi koja je dana jednadžbom (2.1)  $[P_j]$  predstavlja prosječnu maksimalnu dnevnu popunjenost vozila tijekom perioda  $j$ . U drugoj metodi  $[P_j]$  označava prosječnu maksimalnu satnu popunjenost vozila tijekom perioda  $j$ . Umnožak faktora ulaska putnika i kapaciteta vozila ( $\gamma_j \cdot c$ ) željena je popunjenost vozila u periodu  $j$ .

Prve dvije metode poboljšane su omjerom opterećenja vozila u periodu  $j$   $[A_j]$  te umnoškom duljine rute  $[L]$  i željene popunjenosti vozila  $[d_j]$  dane jednadžbom

$$f_j = \max \left[ \frac{A_j}{d_j \cdot L}, \frac{P_j}{c} \right]. \quad (2.2)$$

Treća metoda osigurava da nikada neće doći do prekoračenja kapaciteta vozila, dok četvrta metoda ima dodatno ograničenje na dio puta koji je opterećen više od željene popunjenosti.

Analiza prosječnog vremena čekanja putnika **APWT** (engl. *average passenger waiting time*) na mješovitoj stanici usluge (dolazak po rasporedu i nasumičan dolazak) opskrbnog autobusa (engl. *feeder bus service*) i međugradskog prijevoza putnika te postavljanje modela za numeričko izračunavanje prosječnog vremena čekanja putnika na stanici s ograničenjem kapaciteta vozila međugradskog prijevoza opisana je u [16]. Pretpostavka je da je dolazak opskrbnog autobusa normalno distribuiran. **APWT** za međunarodna vozila je

$$W = \int_0^H N(t) \cdot (1 - m_1)(H - t)dt + \sum_{i=1}^s \int_0^H N(t) \cdot m_r [(r + 1)H - t] dt \quad (2.3)$$

gdje je  $N(t)$  funkcija gustoće dolaska putnika na stanicu po rasporedu,  $H$  označava vremenski razmak odlaska sa stanice između dvaju uzastopnih međugradskih vozila i  $m_r$  postotak propuštenih vozila u  $r$ -tom periodu čekanja. Pomoću danog modela došli su do zaključka da je za točniji prikaz čekanja putnika na stanici u međugradskom prijevozu putnika potrebno uzeti u obzir pouzdanost opskrbe usluge, ponašanje putnika i karakteristike sustava međugradskog prijevoza putnika.

Većina modela pristupa problemu javnog prijevoza putnika s gledišta troškova i poboljšanja prijevozničke tvrtke, ali potrebno je razmotriti i druge utjecaje kao što su zadovoljstvo putnika, frekvencija vozila i udaljenost od stanice [17].

Model određivanja optimalnog broja vozila ili razlike vremena odlaska sa stanice između dvaju uzastopnih vozila s potrebnim kapacitetom vozila za proučavano razdoblje prikazano je u [18]. Uzimaju u obzir putnike koji nisu uspjeli ući u vozilo i razmatraju se mogućnosti: pričekati sljedeće vozilo ili napustiti stanicu i koristi se drugim prijevoznim sredstvima. Kako bi zadržali putnike, tvrtka želi smanjiti penale u slučaju da putnik nije uspio ući u vozilo i napustio je stanicu, a s druge strane ograničavaju vrijeme čekanja putnika koji su odlučili pričekati drugo vozilo. Analitičkim modelom i primjerom na autobusnoj ruti u Aucklandu na Novom Zelandu došli su do smanjenja troškova od 12.3% u jutarnjem najvećem zagušenju putnicima (u razdoblju od sedam do devet sati ujutro) i 19.5% za poslijepodnevno najveće zagušenju putnicima.

U modelu raspoređivanja uravnoteženog prijevoza putnika, putnici u vozilu ili stoje ili sjede (što je putovanje dulje, putnik ima veću želju sjediti), proučava se vremenska distribucija (engl. *temporal distribution*) i prijevozna mreža zagušenja [19]. Model raspodjele prijevoza (engl. *transit assignment model*) koristan je za procjenu koliko putnici rabe prijevoznici

---

sustav. Dani analitički model može poslužiti za planiranje voznog reda prijevozne usluge za smanjenja ukupnog kašnjenja vozila ili povećanje prihoda.

## 2.2 Minimiziranje ukupnog vremena putovanja

Zadovoljavanje ekonomskih, ekoloških i društvenih ciljeva cilj je prijevoza putnika u velikim gradovima. S ciljem osiguranja brzog i energetski učinkovitog gradskog željezničkog prometa definira se nelinearni problem minimiziranja ukupnog vremena putovanja i minimiziranja potrošnje energije [20]. U model se uključuje vrijeme dolaska/odlaska vozila sa stanice i vrijeme potrebno za presjedanje putnika u drugo vozilo. Modelom se žele smanjiti troškovi (broj vlakova i potrošnja energije) i poboljšati zadovoljstvo putnika, odnosno smanjiti vrijeme čekanja i broj presjedanja čime se smanjuje ukupno vrijeme putovanja. Za rješenje problema rasporeda vlakova upotrebljava se sekvencijalno kvadratno programiranje, SQP (engl. *Sequential Quadratic Programming*), i evolucijski algoritmi čije su rezultate usporedili s tradicionalnim fiksnim rasporedom kretanja vozila sa stanice. Zaključeno je da SQP daje bolje pokazatelje kontrole i računalne složenosti od genetskog algoritma.

## 2.3 Problemi minimiziranja kašnjenja vozila

Vrijeme provedeno na stanici jedan je od ključnih elemenata za ocjenu kvalitete usluge i optimizaciju usluge prijevoza putnika. Problem nastaje kada se pojavi kašnjenje u voznom redu, ali tome se može doskočiti ako se u vozni red uključi dodatno vrijeme zbog mogućeg kašnjenja.

Minimizaciju funkcije troška čekanja putnika, što uključuje trajanje vožnje i test osjetljivosti, proveli su Vansteenwegen i Van Oudheusden [21, 22]. Kako bi funkcija troška čekanja bila minimalna, predložili su model određivanja najboljeg dodatnog (engl. *buffer*) vremena s ciljem uspješnog povezivanja prilikom presjedanja putnika u slučaju kada dolazeći vlak kasni. Najbolje dodatno vrijeme temelji se na distribuciji kašnjenja dolazećih vlakova i težinskih faktora vremena čekanja putnika. Definirali su LP (engl. *linear programming*) ciljnu funkciju kao funkciju troška vremena čekanja u ovisnosti o dodatnom vremenu u obliku linearnog modela odluke kojeg rješavaju pomoću linearnog programiranja. U maloj mreži smanjili su trošak vremena čekanja za 40%.

Veliki problem u željezničkoj mreži stvara kašnjenje vlakova uslijed zastoja (nesreće i

---



---

slično) jer se vrijeme čekanja putnika i/ili kašnjenje sljedećeg vlaka povećava ako jedan vlak zakasni. Corman et al. [23] rješavaju problem pronalaska mogućeg vremenskog voznog reda tako da minimiziraju kašnjenje vlakova uz maksimizaciju ukupnog zadovoljstva veze. Problem su postavili grafički i računalno. Računalno su ga riješili pomoću heurističkog algoritma koji su testirali na stvarnim podacima. Na osnovi rezultata zaključili su da definirane ciljne funkcije za rješavanje ovog problema zadovoljavaju visoki prioritet za napredno upravljanje performansama.

## 2.4 Optimalno vrijeme između dvaju uzastopnih vozila

Optimizacija voznog reda temelji se na optimalnom vremenu odlaska vozila sa stanice za svaku liniju vozila kako bi se smanjilo vrijeme čekanja putnika. Uzimaju se u obzir vrijeme čekanja i vrijeme hoda prilikom presjedanja. Parbo et al. [24] predložili su model u kojem razlikuju izravno presjedanje od presjedanja u koje je uključen hod od jedne stanice do druge. Ciljna funkcija modela je minimizirati koštanje vremena čekanja putnika što je dvorazinska minimizacija problema, a rješava se pomoću heuristika kao što je algoritam tabu pretraživanje (engl. *tabu search*).

Optimizacija modela vremena rasporeda vožnje vlakova u ovisnosti o zahtjevima putnika temelji se na jednadžbi koja ovisi o razlici vremena odlaska sa stanice između dvaju uzastopnih vozila, jednadžbi broja putnika i jednadžbi vremena zadržavanja vozila na stanici (engl. *dwell time*) koja je definirana kao funkcija količine putnika koji ulaze i izlaze iz vozila [25]. Cilj optimizacijskog problema je minimizirati vrijeme čekanja putnika na stanici i operativne troškove vlaka. Autori su predložili analitički višedimenzionalni prometni model za linije metroa čija je funkcija cilja nelinearna i zapisana kao Lagrangeova funkcija. Optimizacijski problem riješili su pomoću Lagrangeove teorije dualnosti (engl. *Lagrangian duality theory*) koji sadržava ograničenja koja uključuju ulaske putnika i jednadžbu vremena zadržavanja na stanici.

Prosječno vrijeme čekanja putnika na kontrolnoj stanici moguće je smanjiti ako se smanji vrijeme kretanja vozila s kontrolne stanice. Metoda koju predlažu Berrebi et al. [26] temelji se na minimizaciji sume razlika vremena odlaska sa stanice uzastopnih vozila, odnosno upotrebljavaju načelo na kojem se zasniva metoda najmanjih kvadrata. Prosječno vrijeme čekanja putnika na vozilo APW (engl. *Average Passenger Wait*) koji nasumično stižu na

---

stanicu između  $n$  vozila u promatranom razdoblju jednako je sumi kvadrata razlike vremena odlaska sa stanice uzastopnih vozila podijeljeno sa sumom razlike vremena odlaska sa stanice uzastopnih vozila tijekom kojeg je putnik stigao dano je jednadžbom 2.4.

$$APW = \frac{\sum_{i=1}^n [D_i - D_{i-1}]^2}{2 \sum_{i=1}^n [D_i - D_{i-1}]} \quad (2.4)$$

Kako bi zadovoljili putnike i poboljšali kvalitetu usluga transportnog sustava prilikom kreiranja optimizacijskog modela cilj im je minimizirati ukupno koštanje cijelog sustava što uključuje čekanje vozila ili čekanje vozila na koji trebaju presjesti, koštanje presjedanja i vrijeme provedeno u vozilu. Iz prakse se može zaključiti da putnici najčešće izbjegavaju presjedanje ako to mogu, a ako je nezaobilazno tada žele da je čekanje na vozilo na koje moraju presjesti što manje, što čini zadovoljnijeg putnika. Optimizacijski problem je nelinearan te se problem raspoređivanja vlakova odnosno kreiranje voznog reda rješava pomoću nelinearnog programiranja (kao što je SQP), a od evolucijskih algoritama za rješavanje problema koriste se genetski algoritmi kao što su prikazali Wang et al. [20] i Aksu i Akyol [27].

Dizajniranje optimizacijskih modela za kreiranje voznih redova osjetljivih na zahtjeve (engl. *demand-sensitive timetables*) koji se temelji na dinamičkom voznom redu sa svojstvima neograničenog kapaciteta, uvjet kapaciteta vozila, kreiranje voznog reda za vršna i nevršna vremena tijekom dana definirali su Sun et al. [28]. Matematički model formuliraju izračunavajući vrijeme odlaska vozila sa stanice. Za formulaciju voznog reda definiraju optimizacijski model minimiziranja ukupnog vremena čekanja putnika na stanici uzimajući u obzir sljedeće pretpostavke i uvjete: brzinu vozila, stajanje na stanici, zbog pojednostavljenja modela linije su iste, dolazak putnika je uniformno distribuiran, broj vozila je ograničen, minimalna razlika odlaska sa iste stanice između dvaju uzastopnih vozila je definirana, vrijeme polaska posljednjeg vozila je definirano, svi putnici moraju biti u vozilu. Modeli su formirani kao problem mješovitog cjelobrojnog programiranja MIP (engl. *Mixed Integer Programming*) koji rješavaju pomoću egzaktnih metoda kao što je metoda grananja i ograničavanja, B & B (engl. *branch and bound*), za MIP modele.

Proučavajući pravilne vozne redove i pravilne ulaske u autobuse različitih kapaciteta Ceder et al. [29] predložili su višekriterijsku metodologiju u dvama optimizacijskim modelima. U ovom radu, kao i u većini drugih, primjenjuju uniformnu razdiobu dolaska putnika na stanicu. Prvi model uz minimiziranje odstupanja izračunatih razlika vremena odlaska sa stanice uzastopnih vozila od željenih također reducira očekivano vrijeme čekanja putnika na stanici koji dolaze nasumično. Za rješavanje problema upotrijebljena je heuristika i predloženi su

algoritmi za rješavanje problema.

U svrhu racionaliziranja intervala polaska sa stanice koliko god je moguće, ubrzanje putovanja autobusom i minimiziranje PWT-a, model za optimizaciju rasporeda autobusa predložili su Li et al. [30]. Autori uzimaju u obzir pretjecanje vozila tijekom vožnje, ograničenje kapaciteta vozila i neodlučnost odabira vrste autobusa: tradicionalnog autobusa ili tzv. brzog autobusa (engl. *rapid bus*). Predložili su dvije metode za generiranje rješenja: hibridnu metodu tradicionalne metode optimizacije rojem čestica (HPSO, engl. *hybrid method of traditional PSO*) i metodu koja je kombinacija genetskog algoritma (GA) i algoritma optimizacije rojem čestica (PSO) zajedničkim imenom GAPSO.

## 2.5 Minimiziranje vremena čekanja putnika na stanicima

Model problema kreiranja voznog reda uporabom višekriterijskog pristupa problemu s naglaskom na minimizaciju PWT predložili su Hassold i Ceder [31, 32]. Proučavaju se dva kriterija: penalitet praznih mjesta (prazna mjesta po kilometru ili prazna mjesta po satu) i približno vrijeme čekanja putnika na stanicima. Za pronalazak odgovarajućeg voznog reda problem postavljaju kao pronalazak najboljeg puta u grafu s težinskim bridovima  $c_{ij} = (c_{ij}^1, c_{ij}^2) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}$  koji rješavaju pomoću višekriterijskog ispravljanja oznake (engl. *multiobjective label - correcting*) algoritma koji za stvarni slučaj rezultira uštedom vremena čekanja putnika od 43% uz prihvatljiva opterećenja svih vozila u usporedbi s trenutnim voznim redom.

Problem vremena čekanja putnika prilikom presjedanja u drugo vozilo definira se kao problem sinkroniziranog voznog reda TTSP (engl. *timetable synchronization problem*). Problem se u literaturi najčešće rješava pomoću B & B metode [33]. Kako bi se ubrzalo vrijeme izvršavanja u slučaju velikih problema Wong et al. [34] definiraju optimizacijsku metodu temeljenu na heuristikama OHM (engl. *optimization based heuristic method*) čije su rezultate uspoređivali s B & B za najveća i najmanja opterećenja. Za minimizaciju vremena čekanja putnika prilikom presjedanja svih putnika u podzmenoj željeznici razvili su MIP. Također proučavaju slučajeve kada je vlak krenuo, a putnik nije uspio ući, koje žele smanjiti. Ciljna je funkcija TTSP problema minimizacija ukupnog vremena putovanja putnika koji u svom putovanju imaju presjedanje. Zaključuju da je njihova OHM metoda optimizira problem i brže konvergira rješenju jer uzimaju u obzir vrijeme provedeno na stanicima presjedanja.

Matematičke modele u kojima je ciljna funkcija ukupno vrijeme čekanja putnika na stanicima

presjedanja također su Shafahi i Khani [35] postavili kao MIP modele. U prvom modelu izlaza je varijabla dolazno vrijeme vozila na prvu stanicu, a u drugom modelu se uzima u obzir i dodano vrijeme zaustavljanja vozila na stanici presjedanja koje se uzima kao skup varijabli zbog potrebe prilagođavanja prvog modela jer su za svaku liniju konstantne razlike vremena polazaka sa stanice uzastopnih vozila (engl. *headways*). Jednadžba vremena čekanja grupe putnika koji s linije  $i$  presjedaju na liniju  $j$  na stanici  $s$  dana je jednadžbom 2.5.

$$WT_{ij}^s = (X_j + t_j^s + dt_j^s + h_j Y 2_{ij}^s) - (X_i + t_i^s + tt_{ij}^s + h_i Y 1_{ij}^s) \quad (2.5)$$

gdje  $X_i$  i  $X_j$  predstavljaju vremena polaska vozila s prve stanice,  $tt_{ij}^s$  je vremenska varijabla koja predstavlja vrijeme pješaćenja putnika od vozila na liniji  $i$  do vozila na liniji  $j$ ,  $h_i$  vrijeme (u minutama) između vozila na liniji  $i$ ,  $X_i + t_i^s + tt_{ij}^s$  vrijeme dolaska putnika koji presjedaju sa vozila  $i$  na vozilo  $j$  na stanici  $s$ , a  $X_j + t_j^s + dt_j^s$  vrijeme dolaska sa stanice prvog vozila iz linije  $j$ . Umnožak  $h_j Y 2_{ij}^s$  dodano je odlaznom vremenu vozila iz linije  $j$  tako da se za presjedanje promatraju i ostala vozila na liniji  $j$ . Umnožak  $h_i Y 1_{ij}^s$  dodan je vremenu dolaska za putnike iz drugih vozila na liniji  $i$  zbog kraćeg vremena čekanja.  $Y 1_{ij}^s$  i  $Y 2_{ij}^s$  su cjelobrojne varijable.

Ciljna funkcija modela suma je svih vremena čekanja na svim stanicama presjedanja  $s$  za sve parove linija dana jednadžbom (2.6).

$$\min z = \sum_s \sum_{ij} \left( \frac{D}{h_i} p_{ij}^s AWT_{ij}^s \right) \quad (2.6)$$

gdje je  $AWT_{ij}^s$  prosječno vrijeme čekanja na presjedanje s linije  $i$  na liniju  $j$ ,  $p_{ij}^s$  predstavlja broj putnika koji presjedaju s linije  $i$  na liniju  $j$ , a  $\frac{D}{h_i}$  broj vozila koji stižu na stanicu presjedanja. Složenost modela iznosi  $NK^2$  gdje je  $N$  broj stanica za presjedanje, a  $K$  je broj linija u mreži. U stvarnim mrežama složenost modela je reda  $NK$ . Model se može riješiti uporabom klasičnih MIP metode za rješavanje kao što je B & B algoritam u slučaju kada se proučava manje od 50 linija.

Funkcija je cilja drugog modela

$$\min z = \sum_s \sum_{ij} \left( \frac{D}{h_i} p_{ij}^s AWT_{ij}^s \right) + \sum_s \sum_{ij} \left( \frac{D}{h_i} p_i^s edt_i^s \right) \quad (2.7)$$

gdje  $edt_i^s$  za svako vozilo u liniji  $i$  odgovara duljini vremena koje može provesti na stanici  $s$ , koje su ograničili s maksimalnim vremenom čekanja. Za rješavanje drugog modela upotrebljavaju CPLEX programsku podršku za rješavanje problema i genetski algoritam za veću

---

realnu mrežu. Genetski algoritam GA (engl. *genetic algorithm*) može se upotrijebiti i za manju i veću mrežu čiju su uspješnost pokazali rezultatima u radu.

S ciljem minimiziranja vremena čekanja putnika na stanici presjedanja Ceder et al. [9] su postavili matematički model koji maksimizira broj paralelnih vozila koji stižu na stanicu u ovisnosti o zahtjevu putnika i dobu dana. Postavljanje problema na ovaj način predstavlja nelinearni problem i problem mješovitog cjelobrojnog linearnog programiranja MILP (engl. *mixed integer linear programming*) koji je NP problem i najbolje rezultate daje rješavanjem heurističkim algoritmima. Za potrebe definiranja voznog reda i smanjenja troškova poslovanja prijevozničke tvrtke na temelju dane autobusne mreže predlaže se manji broj stanica na kojima je moguće presjedanje s jednog vozila na drugo [2].

Minimizacija prosječnog vremena čekanja na presjedanje na drugi vlak putnika u periodičnom rasporedu vožnje vlakova PRTS (engl. *periodic railway timetable scheduling problem*) Zhong et al. [36] rješavaju pomoću poboljšanog algoritma diferencijske evolucije DE (engl. *differential evolution*) s dualnom populacijom. Cilj je optimizacije da se napravi raspored odlaznih vremena za svaki vlak sa svake stanice tako da vrijeme čekanja putnika na stanici presjedanja bude što manje za razliku od tradicionalnih modela u kojima upotrebljavaju fiksni raspored. Prosječno čekanje putnika na stanici presjedanja povećavaju za sve stanice presjedanja u mreži te im je ona funkcija cilja. Uspoređujući dani model s B & B metodom i pohlepni (engl. *greedy-based*) heurističkim algoritmom za rješavanje PRTS problema rezultati simulacije algoritma na problemu rasporeda vožnje metroa u Kini daju vrlo obećavajuće pokazatelje za PRTS problem i numeričke pokazatelje optimizacijskih funkcija.

Problem voznog reda najčešće se temelji na maksimizaciji broja sinkroniziranih vozila koji stižu na stanicu presjedanja ili na minimizaciji ukupnog vremena čekanja na stanici na vozilo s kojim putnik nastavlja svoje putovanje [37]. Autori su predložili slučajni, stohastični, cjelobrojni programski model za minimizaciju troška ukupnog vremena čekanja za tri vrste putnika: putnici koji presjedaju, putnici koji ulaze i putnici koji putuju. Ciljna je funkcija minimizacija ukupnog očekivanog troška i vremena čekanja – minimizira se suma troška u mreži čekanja putnika koji presjedaju, trošak čekanja svih putnika koji ulaze u vozilo i trošak vremena čekanja. Za rješavanje problema upotrebljavaju genetski algoritam s lokalnim pretraživanjem (engl. *genetic algorithm with local search*). Model su primijenili na maloj autobusnoj mreži i reducirali su koštanje vremena čekanja za prosječno 9.5%.

Kako bi optimizirali vrijeme čekanja putnika Wu et al. [38] su predložili optimizacijski

---

model sinkroniziranog voznog reda. Predlažu minimizaciju maksimalnog vremena čekanja putnika na vozilo na koje moraju presjesti za nastavak putovanja, odnosno reduciraju najgore vrijeme presjedanja. Kako bi se provjerila učinkovitost modela prikazali su pokazatelje uspješnosti. Rješenje problema dobili su analitički i genetskim algoritmom koji pokazuju da se predloženi model sinkroniziranog voznog reda može upotrijebiti za poboljšanje mreže javnog prijevoza putnika.

Niu i Zhang [39] predlažu po dijelovima regularni raspored vozila PRS, (engl. *phase-regular scheduling*) metodu koja dijeli dan u nekoliko blokova jednake duljine. Promatraju se  $k$  stanica koje su redom označene s  $1, 2, \dots, k$ , a vlakovi imaju jednaku brzinu između stanica. Broj planiranih vozila tijekom jednog perioda ( $\tau = 1$  sat) označavaju s  $x(\tau)$  dok binarnu varijablu koja pokazuje vrstu vlaka (je li poslan veći odnosno manji u odnosu o popunjenosti vlaka) označuju kao s

$$y(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{veliki vlak} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \quad (2.8)$$

Vrijeme je između dvaju vlakova konstantno i iznosi  $\frac{60}{x(\tau)}$  minuta s ograničenjem  $[h_{min}, h_{max}]$  gdje je  $h_{min}$  odnosno  $h_{max}$  unaprijed određeni minimalan odnosno maksimalni interval između dvaju uzastopnih vlakova. Postavili su dvije hipoteze. Prva je da putnici stižu na stanicu uniformnom razdiobom tako da je očekivano odnosno prosječno vrijeme čekanja putnika na stanici na vozilo koje treba doći na stanicu  $\frac{30}{x(\tau)}$ . Druga je hipoteza da u razdoblju u kojem su stigli na stanicu trebaju biti prevezeni drugim vlakom iz tog razdoblja po voznom redu. Cilj je modela minimizirati vrijeme čekanja putnika na stanici i trošak popunjenosti vozila:

$$\min Z = \sum_{\tau \in \mathcal{R}} [F(\tau) + W(\tau)]. \quad (2.9)$$

Ukupno vrijeme čekanja putnika tijekom perioda  $\tau$  računa se s pomoću izraza

$$W(\tau) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{s=1}^{k-i} \frac{30}{x(\tau)} D^{i,i+s}(\tau). \quad (2.10)$$

Trošak popunjenosti računa se kao

$$F(\tau) = \sum_{j=1}^{x(\tau)} \sum_{i=1}^{k-i} Q_j^i(\tau) R^i \delta(Q_j^i(\tau) - y(\tau) \cdot C_1 + (1 - y(\tau)) \cdot C_0) \quad (2.11)$$

gdje je  $\delta(u)$  funkcija predznaka koja je jednaka 1 ako je  $u > 0$ , 0 inače. Potrebno vrijeme putovanja između stanice  $i$  i  $i + 1$  označeno je s  $R^i$  dok oznake  $C_1$  i  $C_0$  označavaju unaprijed

definirani kapacitet većeg odnosno manjeg vozila. Popunjenost vlaka  $Q_j^i(\tau)$  je suma putnika u vlaku  $j$  na stanici  $i$  u trenutku  $\tau$  koji su ostali u vlaku i putuju prema sljedećoj stanici i putnika koji su ušli u vlak na stanici  $i$  u trenutku  $\tau$ . Za rješavanje problema upotrijebili su hibridni genetski algoritam i testirali ga na međugradskoj željezničkoj liniji u Kini koja se sastoji od pet stanica i zaključili da je problem voznog reda učinkovito riješen.

Za problem minimiziranja trošak čekanja putnika na stanici Madridske željeznice definira se model izrazom (2.12) Barrena et al. [40] [41]:

$$\min \delta \sum_{i \in S} \sum_{\{n\}} \sum_{t \in T} \sum_{\{p\}} f_i^t. \quad (2.12)$$

Očuvanje protoka putnika koji čekaju na stanici  $i$  u trenutku  $t$  definira se u uvjetima jednadžbom (2.13).

$$f_i^t = f_i^{t-1} + \sum_{j \in S, j > i} d_{ij}^t - u_i^t. \quad (2.13)$$

Očuvanje tijeka u računalnim mrežama podrazumijeva da je zbroj svih tijekova koji u čvor ulaze jednak zbroju svih tijekova koji iz čvora izlaze. Iz prethodne definicije može se zaključiti da je varijabla  $d_{ij}^t$  ukupan broj putnika, čekali oni ili ne na stanici, koji planiraju putovati sa stanice  $i$ . U drugoj formulaciji problema zanemaruju uvjete za varijable brzine i čekanja vlaka na stanici. Promatraju varijablu vremena proteklog između vremena kad je  $k$ -ti vlak otišao sa stanice  $i$  i kada je otišao sa stanice  $i + 1$ . Treća formulacija problema nadovezuje se na prethodnu samo što se ograničenja odnose na granice kretanja sa stanice  $i + 1$  s obzirom na kretanje sa stanice  $i$  te minimalne i maksimalne brzine i proteklog vremena stajanja na stanici. Barrena et al. [40] koriste algoritam grananja i rezanja **B & C** (engl. *branch and cut*) za sve modele. Pomoću opširnog računalnog izračuna sa stvarnim slučajevima i nekoliko generiranih slučajeva zaključili su da formulacije daju poboljšanja prosječnog vremena čekanja putnika u odnosu na stvarne slučajeve, prosječno 30%, a u najboljem slučaju 77%. Uočili su da ukupna brzina i vrijeme čekanja putnika na stanici pomažu ostvariti bolje rezultate uvjeta vrijednosti ciljne funkcije i računalnog vremena. U drugom radu Barrena et al. [41] predlažu algoritam prilagodljivog pretraživanja velikog susjedstva **ALNS** (engl. *adaptive large neighborhood search algorithm*) sposoban za rješavanje velikih realnijih slučajeva problema u kratkom računalnom vremenu. Usporedili su rješenja s prethodnim istraživanjem u smislu prosječnog čekanja putnika i vremena računanja i zaključili da je **ALNS** algoritam zadovoljavajući u slučaju kada imaju veći broj slučajeva dok pomoću

---

B & B algoritma mogu riješiti problem minimizacije vremena čekanja putnika na stanici. Redukcija prosječnog vremena čekanja putnika na stanici je 26% u odnosu na algoritme u CPLEX-u, programskoj podršci za rješavanje optimizacijskih problema koji sadrži efikasne optimizacijske algoritme.

Isti je problem promatran i rješavan pomoću hibridnog genetskog algoritma povezanog s pohlepnom metodom i algoritmom lokalnog poboljšanja (engl. *local improvement*) u [42] i [43]. Budući da su genetski algoritmi metode slučajne optimizacije i oponašaju procese u prirodi, upotrebljavaju se za optimizacije jednokriterijskih problema. Kako bi uključili parametar trošak-dobit između dva kriterija, razvili su neizraziti logički kontroler (engl. *fuzzy logic controller*). Za malu mrežu i probleme s periodičnim vremenom vožnje mjerodavne su egzaktno metode, kao što je B & B. Također su proučavali i periodički željeznički raspored vozila. Zaključili su da su im metode uspješne i da su svojim rasporedom smanjili vrijeme čekanja putnika na stanici na vlak na koji moraju presjesti za 7%.

Višekriterijska optimizacija očuvanja energije u vozilima podzemne i nadzemne željeznice i vremena čekanja putnika na stanici prikazali su Yang et al. [44]. Prvo žele maksimizirati iskorištenu energiju, odnosno minimizirati izgublenu energiju između vlakova na istoj stanici. Dolazeći vlak pri kočenju stvara električnu energiju i sustav tu energiju vraća u mrežu rabeći je za akceleraciju odlazećeg vlaka. Istovremeno žele minimizirati vrijeme čekanja putnika uz odgovarajuća ograničenja, vrijeme između odlaska sa stanica dvaju uzastopnih vlakova, vrijeme stajanja vlaka na stanici i ukupno vrijeme putovanja. Definiiraju višekriterijski model i upotrebljavaju svojstva Pareto optimalnosti. Za rješavanje problema upotrebljavaju genetski algoritam koji je najčešće korišten algoritam za rješavanje problema cjelobrojnog programiranja i istraživanja u prometnom sustavu. Na numeričkim primjerima zaključili su da prezentirani model može uštedjeti energiju za 8.86% i reducirati vrijeme čekanja putnika za 3.22% u usporedbi sa stvarnim redom vožnje.

Model minimiziranja ukupnog vremena čekanja putnika i iskorištenja električne energije definiran kao problem višekriterijske optimizacije očuvanje energije i PWT-a prikazan je u [45]. Funkciju ukupnog čekanja putnika definirali su pomoću binarnih varijabli u ovisnosti o broju putnika koji nisu mogli ući u vozilo zbog ograničenog kapaciteta vozila, i o broju putnika koji pristižu na stanicu za sljedeće vozilo po rasporedu. Za rješavanje problema rabili su genetski algoritam na stvarnom primjeru pekinške linije metroa kojim su regulirali iskorištenje električne energije za 9.67% i PWT-a za 4.72% u odnosu na stvarni vozni red.

---



---

Na temelju navedenih metoda mnogi su autori kreirali vlastite modele s dodatnim ograničenjima i rješavali definirane probleme pomoću različitih algoritama. Odabir odgovarajućeg algoritma za rješavanje problema transporta putnika ovisi o vremenu izvršavanja i stupnju preciznosti algoritma.

Ako je bitno maksimizirati vrijednost usluge, kao funkciju populacije, mogućnosti zapošljavanja i slično, prije nego minimizirati trošak (udaljenost) puta, problem se rješava kao problem linearnog programiranja i naziva se maksimizacija usluge prijevoza rute brid-čvor **TRANSMax** (engl. *transit route arc-node service maximization*) problema koji određuje optimalni broj kombinacija bridova i čvorova koje čine najbolju prijevoznu rutu [12].

Minimizacija vremena čekanja putnika na stanici u cijeloj mreži može se promatrati s različitih stajališta: pravilno i nepravilno vrijeme odlaska uzastopnih servisa sa stanice, redovno zaustavljanje na svakoj stanici ili tzv. ekspresno zaustavljanje vlakova (engl. *express train stop*), tj. zaustavljanje samo na nekim stanicama u vršnim vremenima. Matematičke metode tako da mogu upravljati kompleksnim odnosima između vremena čekanja putnika i vremenski ovisnog zahtjeva i kreirati **MIP** modele kompaktilne sa standardnim visoko rangiranim optimizacijskim platformama predložili su Niu et al. [46]. Rabe **GAMS** (engl. *general algebraic modeling system*), sustav za modeliranje matematičkih problema i optimizacije i odgovarajući paket (AMPL) za modeliranje linearnih, nelinearnih i **MIP**-a.

Iz pretpostavke uniformnog stizanja putnika na stanicu pretpostavlja se da je vrijeme čekanja na sljedeće vozilo polovica vremena između odlaska dvaju uzastopnih vozila. Amin-Naseri i Baradaran [47] pokazali su točne formulacije izračunavanja prosječnog čekanja putnika na stanici jer u većini radova autori pretpostavljaju uniformnu razdiobu dolazaka putnika na stanicu neovisno o dolasku vozila.

Problem odluke hoće li vozilo čekati sljedeće vozilo po rasporedu koje kasni na stanicu kako bi se održao vremenski razmak vozila naziva se upravljanje kašnjenjem **DM** (engl. *delay management*). Algoritmi koji se u literaturi najčešće upotrebljavaju za rješavanje problema kašnjenja vozila u svrhu minimizacije vremena čekanja putnika na stanici, minimizacije ukupnog vremena putovanja, ali prvenstveno određivanja najboljeg voznog reda kako bi se minimiziralo ukupno kašnjenje vozila rješavaju se pomoću metaheurističkih i egzaktnih algoritama [48–53].

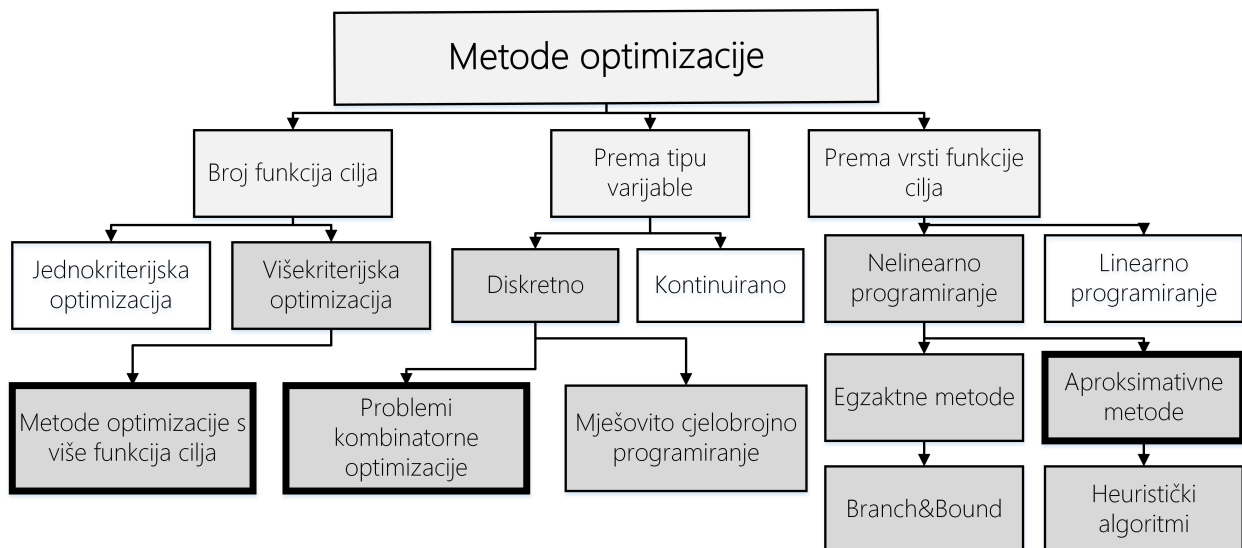
Proučava li se optimizacijski problem u prijevozu putnika ciljne funkcije kao problem linearnog planiranja, definira se problem orijentiran prema trošku ili prema usluzi [54]. Problem

---

linearnog planiranja odnosi se na prijevoznu infrastrukturu, vrijeme putovanja putnika, odabir najpovoljnijeg smjera putovanja i/ili njihova frekvencija korištenja. Definira li se problem kao orijentirana usluga k problemu linijskog planiranja i voznog reda **SOLPTP** (engl. *service-oriented line planning and timetabling problem*) moguće ga je riješiti pomoću heurističkog pristupa kao što su ga u [54] riješili pomoću metaheurističke metode unakrsne entropije (engl. *cross-entropy metaheuristic*).

Problem linearnog planiranja moguće je formulirati kao problem mješovitog cjelobrojnog linearnog programiranja, **MILP**, i rabiti egzaktne metode kao što su **B & B** ili **B & C** [54].

Jedna je od klasifikacija metoda optimizacija po broju funkcija cilja, prema tipu varijable i prema vrsti funkcije cilja. Prema dosadašnjoj literaturi optimizacijskog problema prijevoza putnika klasifikacija se može prikazati Slikom 2.1.



Slika 2.1: Klasifikacija metode optimizacije u problemu transporta putnika

Prema prikazanom na slici 2.1 zaključuje se da je problem prijevoza putnika jednkriterijska optimizacija ili višekriterijska, ovisno o broju funkcija cilja koje se promatraju, diskretna optimizacija, a prema vrsti funkcije cilja problem se rješava kao nelinearno programiranje koje se može riješiti egzaktnim ili aproksimativnim metodama. **MIP** problemi najčešće se rješavaju heurističkim algoritmima jer oni daju najbrže približna rješenja stvarnom rješenju.

Pregled literature prikazan u Tablici 2.1 prikazuje detaljnu strukturu problema iz literature objašnjene u ovom poglavlju.

Tablica 2.1: Pregled i usporedba literature

Autori	Godina	Ciljna funkcija	Ograničenja	Metode	Testni slučaj
Vansteenwegen i Van Oudheusden [21]	2006.	Minimiziranje vremena čekanja	Vrijeme vožnje, vrijeme dolaska, korigirano vrijeme, razmak vremena	Linearno programiranje	realan
Wong et al. [34]	2008.	Minimiziranje čekanja na presjedanju	Vrijeme vožnje, vrijeme stajanja, trajanje puta, razlika vremena odlaska dvaju uzastopnih servisa, vrijeme okretanja	B&B, heurističke	realan
Shafahi i Khani [35]	2010.	Minimiziranje vremena čekanja	Granice razlike vremena između odlaska dvaju uzastopnih vozila, dodatno vrijeme stajanja na stanicama	Genetski algoritam	realan
Hassold i Ceder [31]	2012.	Minimiziranje očekivanog vremena čekanja putnika i minimiziranje odstupanja od željene razine popunjenosti	Granice razlike vremena između odlaska dvaju uzastopnih vozila, kapacitet vozila	Višekriterijski algoritam za ispravljanje oznaka	realan

Tablica 2.1: Pregled i usporedba literature

Autori	Godina	Ciljna funkcija	Ograničenja	Metode	Testni slučaj
Niu i Zhang [39]	2012.	Minimiziranje vremena čekanja	Razlika vremena odlaska dvaju uzastopnih servisa, putnici u vlaku, zahtjevi putnika, broj zastopnih dostupnih vozača, broj putnika koji ulaze u vozilo	Genetski algoritam	realan
Zhong et al. [36]	2013.	Minimiziranje vremena čekanja	Vrijeme putovanja	Evolucijski algoritmi	realan
Parbo et al. [24]	2014.	Minimiziranje vremena čekanja	Razlika vremena odlaska dvaju uzastopna servisa, vrijeme odlaska sa stanice	Tabu pretraživanje	test
Wang et al. [20]	2015.	Minimiziranje ukupnog vremena putovanja svih putnika i potrošnja energije vlakova	razlika vremena odlaska dvaju uzastopnih servisa, kapacitet vozila	Evolucijski algoritmi	test
Wu et al. [38]	2015.	Minimiziranje maksimalnog vremena čekanja putnika	Razlika vremena odlaska dvaju uzastopnih servisa, vrijeme odlaska sa stanice, vrijeme vožnje	Genetski algoritam	realan

Tablica 2.1: Pregled i usporedba literature

Autori	Godina	Ciljna funkcija	Ograničenja	Metode	Testni slučaj
Berrebi et al. [26]	2015.	Minimiziranje vremena čeka- kanja	Razlika vremena odlaska dvaju uzastopnih servisa	Analičko rješenje	test
Li et al. [30]	2017.	Minimiziranje vremena čeka- kanja	Razlika vremena odlaska dvaju uzastopnih servisa	poboljšanja genetskog algoritma i algoritma optimizacije roja čes- tica	test
Liu i Ceder [14]	2018.	Problema rasporeda vozila	Razlika vremena odlaska dvaju uzastopnih servisa, broj polazaka, broj zaposlenih dostupnih vozača	Heuristički	test
Sun et al. [45]	2019.	Minimiziranje vremena čeka- kanja putnika i potrošnje energije	Razlika vremena odlaska dvaju uzastopnih servisa	Genetski algoritam	realan
Ovaj rad		Minimiziranje količine čeka- kanja putnika na stanicama i maksimiziranje omjera po- punjenosti vozila	Razlika vremena odlaska dvaju uzastopnih servisa, zahtjevi put- nika, broj putnika koji ulaze u vo- zilo	Višekriterijska optimi- zacija rojem čestica	test

# 3

## Višekriterijski optimizacijski model voznog reda

Postupak stvaranja voznog reda i rasporeda vozila je kompleksan problem za koji se mora voditi računa o uključivanju niza parametara koji utječu na optimalnost modela. U ovom poglavlju doktorske disertacije definirat će se višekriterijski optimizacijski model stvaranja voznog reda i rasporeda vozila, u kojem se daje naglasak na rješavanje višekriterijske optimizacije prijevoza putnika u korist zadovoljstva putnika i iskorištenja vozila.

Ovo poglavlje daje postupak stvaranja voznog reda i vremenskog raspoređivanja vozila u mreži javnog prijevoza i definira se kriterijska funkcija za rješavanje problema vremenskog raspoređivanja vozila zasnovanog na višekriterijskoj optimizaciji s ciljem smanjenja vremena čekanja putnika na stanici i povećanja popunjenosti vozila predložene u radu [55].

Predloženi model opisan u ovom poglavlju temelji se na zakonitostima definiranim u referentnoj literaturi i uspoređen je s testnim primjerom iz literature. Rezultati usporedbe su prikazani u poglavlju 5.

U svrhu definiranja modela te budućih izračuna i objašnjenja u Tablici 3.1 prikazane su potrebne varijable i parametri.

Tablica 3.1: Notacija

Generalno	
$OD$	par stanica polazište-odredište
$OD_s$	skup OD parova za servis $s$
$S_{OD}$	skup servisa za zadani OD par
$M = \{1, 2, \dots, m\}$	skup vozila
$N = \{1, 2, \dots, n\}$	skup stanica
$L$	skup linija

---

$v_{s,c}$  vozilo  $v$  s definiranim kapacitetom  $c$ , za servis  $s$

---

### Indeksi

---

$s \in S_{OD}$	servis $s$ iz skupa servisa s istim OD parom
$i \in N$	stanica $i$ iz skupa stanica
$v \in M$	vozilo $v$ iz skupa vozila
$l \in L$	linija $l$ iz skupa linija

---

### Varijable

$t_{s,i}^d$	vrijeme polaska servisa $s$ sa stanice $i$
$t_{s,i}^a$	vrijeme dolaska servisa $s$ na stanicu $i$
$d_o$	željena maksimalna popunjenost vozila
$dwel_{s,i}$	vrijeme stajanja na stanici $i$ servisa $s$
$run_{s,i}^l$	vrijeme putovanja servisa $s$ između dviju susjednih stanica za promatranu liniju
$H_{i,s}$	razlika vremena odlaska sa stanice $i$ dvaju uzastopnih servisa
$T_i$	ukupno promatrano vrijeme od prvog do posljednjeg servisa za stanicu $i$
$T_{s,i}$	razlika između vremena odlaska servisa $s$ s dvije uzastopne stanice na liniji $l$
$P(v_{s,c}, i)$	ukupan broj putnika u vozilu $v$ na stanici $i$
$P_{ij}$	broj putnika koji žele ući u vozilo na stanici $i$ putujući na stanicu $j$ ( $ij$ predstavlja OD par stanica)
$P(v_{s,c}, kj)$	broj putnika u vozilu koji su ušli na stanici $k$ i imaju destinaciju $j$
$P^{out}(v_{s,c}, i)$	broj putnika koji izlaze iz vozila $v$ , servisa $s$ , na stanici $i$
$P^{in}(v_{s,c}, i)$	broj putnika koji su ušli u vozilo $v$ , servisa $s$ , na stanici $i$
$P^{curr}(v_{s,c}, i)$	broj putnika koji se nalaze u vozilu $v$ , servisa $s$ , dolazeći na stanicu $i$
$P^{stay}(v_{s,c}, i)$	broj putnika koji ostaju na stanici $i$ nakon što je vozilo $v$ , servisa $s$ napustilo stanicu $i$
$k_i$	prosječni broj putnika na stanici $i$ u promatranom vremenu
$w_i$	prosječno vrijeme čekanja na stanici $i$
$K_{i,s}$	količina čekanja putnika koji pristižu na stanicu u vremenu između servisa
$Z_{i,s}$	količina čekanja putnika na stanici $i$ na servis $s$
$Z_{i,s}^{norm}$	količina čekanja putnika na stanici $i$ na servis $s$

---

---

$Z_{av,norm}$	ukupna prosječna normirana količina čekanja putnika
$\eta$	ukupna iskoristivost vozila za sve servise za danu liniju
$\eta_{av,norm}$	ukupna prosječna normirana iskoristivost vozila za sve servise za danu liniju
$\tau_{v,s}$	prosječna iskoristivost vozila za servis $s$

---

### 3.1 Opis problema na temelju ograničenja, parametara, varijabli i skupova

Putnici u vozilo ulaze slučajno, neovisno o završnoj stanici na koju žele stići. Koliko je putnika sa zajedničkom odredišnom stanicom uspjele ući u vozilo, može se samo pretpostaviti, odnosno uzeti u obzir vjerojatnost, tj. udio broja putnika s određenom odredišnom stanicom od ukupnog broja putnika koji čeka na stanici. Na taj se način može procijeniti broj putnika koji ulaze u vozilo za svaki pojedinačni OD par.

Broj putnika na stanici koji čekaju na vozilo definirana je OD matricom broja putnika u željenom razdoblju. Za određivanje najboljeg voznog reda da bi se zadovoljili putnici, potreban je prosječan broj putnika na svakoj stanici s njihovom odredišnom stanicom kako bi se odredio potrebni najbolji kapacitet. Na slici 1.1 OD parovi su: AB, AC, AD, AE, CD, CA, CB, CE, BE, EC, EB, ED, EA, DA. Moguće su linije vozila: AC, ACB, ACBE, ACD i tako dalje. Ako se proučava jedna linija ( $l$ ) koja ima više servisa po danu, na primjer linija  $ACBE$ , definirani su servisi:  $ACBE1$ ,  $ACBE2$ ,  $ACBE3$  i tako dalje. Skup servisa definiran je za svaku liniju, tj.  $S_{ACBE} = \{ACBE1, ACBE2, ACBE3, \dots\}$ . Svaki servis  $s$  ovisi o:

- vremenu polaska vozila sa stanice  $i$  ( $t_{s,i}^d$ )
- dodjeljivanju karakteristika vozilu (engl. *vehicle assignment*)  $v_{s,c}$  - vozilu  $v$  servisa  $s$  dan je kapacitet  $c$ .

Skup OD parova za servis  $s$  ( $OD_s$ ), odnosno konkretno za liniju  $ACBE$  postoji šest OD parova: AC, AB, AE, CB, CE, BE.

Broj putnika koji ulaze u servis  $s$  na stanici  $i$ ,  $P^{in}(v_{s,c}, i)$  manji je ili jednak sumi svih putnika za sve OD parove na stanici  $i$  u trenutku odlaska sa stanice servisa  $s$ , a dan je nejednadžbom (3.1), gdje je  $P_{ij}$  broj putnika koji dolaze na stanicu  $i$  i putuju prema stanici

---



$j$ , linijom  $l$ . Nejednakost u jednadžbi (3.1) predstavlja uvjet da ne moraju svi putnici ući u vozilo na stanici  $i$ .

$$P^{in}(v_{s,c}, i) \leq \sum_{j=i+1}^n P_{ij}. \quad (3.1)$$

Skup vozila odgovara voznom parku prijevoznickog poduzeća za koji se kreira vozni red. Skup takvih vozila označava se s  $M = \{1, 2, \dots, m\}$ . Vozni park sadržava različita vozila različitog kapaciteta, a saznanje o takvom skupu je bitno, kako bi se znalo kakva se vozila mogu koristiti prilikom kreiranja voznog reda.

Vrijeme između dvaju uzastopnih servisa na stanici  $i$  na istoj liniji, odnosno s istim OD parovima, definira se jednadžbom (3.2) i predstavlja cilj za kreiranje voznog reda, odnosno zavisnu varijablu modela.

$$H_{i,s} = t_{s,i}^d - t_{s-1,i}^d, \forall s \in S_{OD}. \quad (3.2)$$

Kada vozilo stiže na zadnju stanicu mreže za jedan servis, ovo vozilo je slobodno za korištenje za drugi servis.

Skup linija između OD parova stanica označava se s  $L$ , gdje je svaka linija  $l$  unaprijed definirana. Skup stanica servisa označava se s  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ , gdje se  $i$ -ta stanica označava indeksom  $i$ . Vrijeme dolaska vozila servisa  $s$  na stanicu  $i$  definira se s  $t_{s,i}^a$ . Vrijeme putovanja između dviju stanica servisa  $s$  definira se jednadžbom (3.3).

$$run_{s,i} = t_{s,(i+1)}^a - t_{s,i}^d. \quad (3.3)$$

Za svako vozilo servisa  $s$  na stanici  $i$  definira se vrijeme provedeno na stanici  $dwell_{s,i}$  (engl. *dwelling time*) nejednadžbom (3.4).

$$dwell_{s,i} \leq t_{s,i}^d - t_{s,i}^a. \quad (3.4)$$

Vrijeme potrebno putnicima za ulazak i izlazak iz vozila konstantno je i zanemaruje se u ovoj disertaciji. Vrijeme između polaska servisa s dvije uzastopne stanice, gdje je uključeno i vrijeme provedeno na stanici i vrijeme putovanja, dano je jednadžbom (3.5).

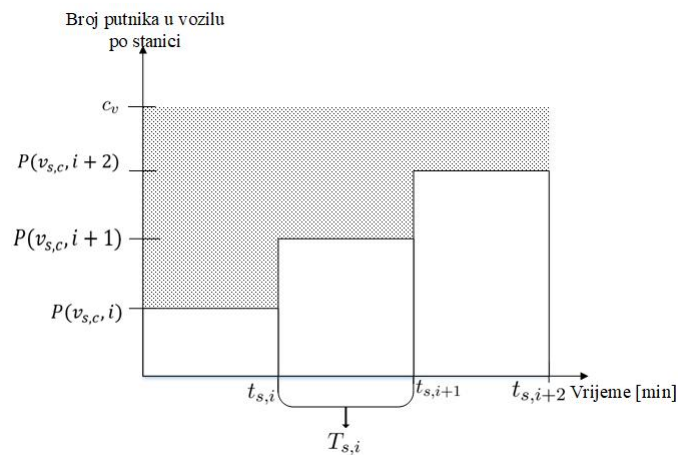
$$T_{s,i} = t_{s,i+1}^d - t_{s,i}^d, \quad \forall s \in S_{OD}. \quad (3.5)$$

## 3.2 Količina čekanja putnika na stanici i iskoristivost vozila

Za svaki OD par definira se varijabla putnika koja ovisi o vremenu kretanja sa stanice ( $t_{s,i}^d$ ). Broj putnika za svaki OD par koji se nalaze u vozilu u trenutku kada je vozilo na stanici  $i$  definirano je jednažbom (3.6).

$$P(v_{s,c}, i) = P^{curr}(v_{s,c}, i) + P^{in}(v_{s,c}, i) - P^{out}(v_{s,c}, i) \quad (3.6)$$

gdje je  $P^{out}(v_{s,c}, i)$  broj putnika koji napuštaju servis  $s$  na stanici  $i$ , a  $P^{in}(v_{s,c}, i)$  broj putnika koji ulaze u servis  $s$  na stanici  $i$ . Pretpostavka je ulaska da u vozilo na stanici  $i$  ulazi razmjerni broj putnika koji žele ući u vozilo po svakom OD paru za stanicu  $i$  u trenutku kada servis pristigne na stanicu  $i$ . Maksimalni broj putnika koji mogu ući u vozilo ovisi o odabranoj veličini vozila za dani servis. Ova je pretpostavka bitna za izračunavanje jednakosti (3.6), a usko je povezana i s nejednakosti (3.1). Iskoristivost vozila  $v_{s,c}$  za jednu liniju u trenucima odlaska sa stanice  $i$  može se prikazati grafikonom na slici (3.1). Sivo područje predstavlja udio vozila koje nije popunjeno putnicima.



Slika 3.1: Iskoristivost vozila po stanicama i jedinici vremena

Trenutačni broj putnika u vozilu  $v$  prije stanice  $i$ , odnosno putnici koji su ušli na stanici  $k$  i imaju destinaciju  $j$  definira se jednažbom (3.7).

$$P^{curr}(v_{s,c}, i) = \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=i+1}^n P(v_{s,c}, kj). \quad (3.7)$$

Iz prethodnih izraza slijedi jednažba (3.8).

$$P(v_{s,c}, i) = \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=i+1}^n P(v_{s,c}, kj) + P^{in}(v_{s,c}, i) - P^{out}(v_{s,c}, i). \quad (3.8)$$

Prosječan broj putnika po vremenu na stanici  $i$  dan je jednažbom (3.9)

$$k_i = \frac{\sum_{s \in S_{OD}} P(v_{s,c}, i)}{T_i}, \quad (3.9)$$

gdje je  $T_i$  ukupno promatrano vrijeme za sve uzastopne servise  $s$  s istim  $OD$  parovima na stanici  $i$ .

Količina čekanja putnika koji pristižu na stanicu u vremenu između servisa dana je jednažbom (3.10)

$$K_{i,s} = k_i H_{i,s} w_i, \quad (3.10)$$

gdje je  $w_i$  prosječno vrijeme čekanja na stanici  $i$ . Opći oblik definirali su Liu i Ceder [14], a prilagođen je za konkretan problem i dan jednažbom (3.11). Liu i Ceder [14] koriste jednaku razliku vremena odlaska dvaju uzastopnih vozila. U ovoj disertaciji je naglasak na nejednaku razliku vremena odlaska dvaju uzastopnih vozila.

$$w_i = \frac{E[H_i]}{2} \left[ 1 + \frac{Var[H_i]}{E^2[H_i]} \right], \quad (3.11)$$

gdje su  $E[H_i]$  i  $Var[H_i]$ , redom za svako posebno, očekivanje i varijanca vremena polaska dvaju uzastopnih vozila, za sva vozila na stanici  $i$  na istoj liniji definirani jednažbama (3.12) i (3.13).

$$E[H_i] = \frac{\sum_{s \in S} H_{i,s}}{m}. \quad (3.12)$$

$$Var[H_i] = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (H_i - E[H_i])^2}{n}}. \quad (3.13)$$

Količina čekanja putnika između dvaju uzastopnih servisa za sve  $OD$  parove dana jednažbom (3.10) i mjera s prosječnim vremenom čekanja za te putnike dana jednažbom (3.11) temelje se na pretpostavkama da:

- putnici na stanicu pristižu nasumično,
- dolasci vozila su neujednačeni, ali pristižu u unaprijed određenim vremenskim intervalima.

Količina čekanja putnika na stanici, PWT, na stanici  $i$  za svaki servis  $s$  dan je jednažbom (3.14) gdje  $P^{stay}(v_{s,c}, i)$  odgovara broju putnika koji ostaju na stanici  $i$ , odnosno nisu mogli ući u servis  $s - 1$ .

$$Z_{i,s} = P^{stay}(v_{s,c}, i) \cdot H_{i,s} + K_{i,s}, \quad (3.14)$$

gdje je  $P^{stay}(v_{s,c}, i)$  broj putnika koji su ostali na stanici  $i$  jer nisu mogli ući u servis  $s - 1$ . Količina čekanja putnika na stanici, **PWT**, dana jednadžbom (3.14) na stanici  $i$  suma je količine čekanja na stanici  $i$  dok sljedeći servis ne stigne na stanicu  $i$  i prosječne količine čekanja putnika na stanici  $i$ .

Količinu čekanja putnika, **PWT**, na stanici je potrebno normirati jednadžbom (3.15), gdje je  $Z_{max}$  količina **PWT**-a za maksimalnu razliku vremena dolaska između dvaju uzastopnih servisa s minimalnim kapacitetom na danoj stanici. Suprotno,  $Z_{min}$  je količina **PWT**-a za minimalnu razliku vremena dolaska između dvaju uzastopnih servisa s maksimalnim kapacitetom na danoj stanici. Ukupna prosječna normirana količina čekanja dana jednadžbom (3.16) odgovara ukupnoj prosječnoj normiranoj količini čekanja putnika za sve stanice i sve servise dana jednadžbom (3.15) i potrebno ju je minimizirati.

$$Z_{i,s}^{norm} = \frac{Z_{i,s} - Z_{min}}{Z_{max} - Z_{min}}. \quad (3.15)$$

$$Z_{av,norm} = \frac{\sum_{i,s} Z_{i,s}^{norm}}{n \cdot m}. \quad (3.16)$$

U cilju maksimiziranja popunjenosti vozila  $v$  za servis  $s$  prvo se definira prosječna popunjenost vozila  $v$ , za servis  $s$  kroz sve stanice ( $\tau_{v,s}$ ), dana jednadžbom (3.17)

$$\tau_{v,s} = \frac{\sum_{i=1}^n P^{curr}(v_{s,c}, i) \cdot run_{s,i}}{n \cdot c_v \cdot run_s}, \quad (3.17)$$

gdje ukupno vrijeme vožnje između dva servisa za sve stanice na liniji odgovara vrijednosti

$$run_s = \sum_{i=1}^n run_{s,i}. \quad (3.18)$$

Ukupna iskoristivost  $\eta$  za sve servise po svim stanicama dana je jednadžbom (3.19).

$$\eta = \sum_{s \in S} \tau_{v,s}. \quad (3.19)$$

Normirana vrijednost iskoristivosti vozila za svaki servis  $i$  kroz sve stanice dana je jednadžbom (3.20).

$$\eta_{av,norm} = \frac{\eta}{\eta_{max}}. \quad (3.20)$$

Jednadžba (3.20) slijedi iz jednadžbe za normiranje kao što je definirano jednadžbom (3.21).

$$\eta_{av,norm} = \frac{\eta - \eta_{min}}{\eta_{max} - \eta_{min}}, \quad (3.21)$$

gdje je  $\eta_{min} = 0$ , a  $\eta_{max} = \sum_{s \in S} n$ , odnosno maksimalna iskoristivost vozila jednaka je sumi broja stanica po broju servisa, odnosno  $m \cdot n$  iz čega slijedi da je ukupna prosječna normirana iskoristivost vozila dan jednadžbom (3.22).

$$\eta_{av,norm} = \frac{\eta}{n \cdot m}. \quad (3.22)$$

Profit prijevozničkog poduzeća povećava se ako je iskoristivost vozila veća. Proučavajući cijelo vrijeme i sumiranjem svih iskoristivosti vozila proizlazi kumulativna funkcija distribucije količine putnika u vozilu po svakoj stanici .

### 3.3 Ciljna funkcija

Cilj je optimizacijskog problema minimizirati količinu ukupnog čekanja putnika, **PWT**, dok se maksimizira omjer iskoristivosti vozila, **VOR**. Varijable koje su uključene u model diskretne su tako da se model može riješiti koristeći metode kombinatorne optimizacije. Za predloženi višekriterijski optimizacijski model ciljna funkcija modela definirana je s (3.23)

$$\min_x F(x) = (f_1(x), f_2(x)), \quad (3.23)$$

gdje je vektor  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  n-dimenzionalna varijabla odluke u prostoru rješenja i  $n = 2|S_{OD}|$ , gdje je  $|S_{OD}|$  broj servisa u skupu  $S_{OD}$ . Prvih  $|S_{OD}|$  elemenata vektora  $x$  odgovara vremenima polaska servisa s prve stanice linije, dok drugih  $|S_{OD}|$  elemenata vektora  $x$  odgovara odgovarajućim veličinama vozila servisa. Ukupna prosječna normirana količina **PWT**-a dana s (3.16) odgovara vrijednosti funkcije  $f_2(x) = Z_{av,norm}$ , dok  $f_1(x)$  odgovara suprotnoj normiranoj vrijednosti **VOR**-a danoj jednadžbom (3.22), odnosno  $f_1(x) = 1 - \eta_{av,norm}$  jer se ciljna funkcija minimizira. Ciljna funkcija (3.23) minimizira ukupnu količinu **PWT**-a i maksimizira omjer zauzetosti. Problem se rješava koristeći metode za rješavanje višekriterijske optimizacije i odlučivanja.

Definirana su sljedeća ograničenja:

$$P(v_{s,c}, i) \leq c_v, \quad \forall v \in M, \forall i \in N \quad (3.24a)$$

$$t_{s-1,i}^d < t_{s,i}^d, \quad \forall s \in S_{OD} \quad (3.24b)$$

$$T_{s,i} = t_{s,i+1}^d - t_{s,i}^d, \quad \forall i \in N, \forall s \in S_{OD} \quad (3.24c)$$

$$H_{i,s} = t_{s,i}^d - t_{s-1,i}^d, \quad \forall i \in N, \forall s \in S_{OD} \quad (3.24d)$$

$$k_i \leq \frac{c_v}{\sum_{s \in S} H_{i,s}} \quad \forall i \in N, \forall s \in S_{OD} \quad (3.24e)$$

Broj putnika u  $j$ -tom vozilu ne može biti veći od  $c_j$ ,  $\forall j \in S$  kao što je definirano u (3.24a). Ograničenje (3.24b) predstavlja da polazno vrijeme vozila  $v$  servisa  $s$  mora biti poslije polaznog vremena prethodnog servisa  $s$  istim OD parom. Razlika između polaznog vremena  $s$  dviju uzastopnih stanica vozila  $v$ , servisa  $s$  dana je ograničenjem (3.24c), dok je razlika polaznih vremena na stanici  $i$  između dvaju uzastopnih servisa  $s$  istim OD parom dana jednažbom (3.24d). Prosječno dolazna učestalost za OD par na stanici  $i$  manja je ili jednaka prosječnoj maksimalnoj mjeri kapaciteta vozila koja je zadana ograničenjem (3.24e).

# 4

## Određivanje rješenja višekriterijskog optimizacijskog modela

Na temelju danih ulaznih parametara - kapaciteta, odnosno karakteristike voznog parka prijevoznikog poduzeća, očekivanog broja putnika na svakoj stanici jedne linije s određnim stanicama za svakog putnika, što odgovara OD matrici, razdoblje proučavanja za kreiranje voznog reda, broj željenih servisa tijekom razdoblja, vrijeme potrebno servisu za vožnju između dviju susjednih stanica na promatranoj liniji (engl. *running time*), fiksno vrijeme stajanja na svakoj stanici (engl. *dwelling time*) potrebno je definirati metodu kojom će se odrediti najbolji vozni red i raspored vozila za određeno razdoblje unutar jednog dana.

Ovom disertacijom je prikazana metoda za rješavanje višekriterijskog problema. Iako je problem diskretan i pripada problemima kombinatorne optimizacije prikazano je mogućnost korištenja aproksimativnih metoda za njegovo rješavanje.

Pregledom dostupne literature i prikazom u poglavlju 2, može se zaključiti da su za razne slične probleme u prometu upotrebljeni razni heuristički algoritmi.

Višekriterijska optimizacija rojem čestica MOPSO (engl. *multiobjective particle swarm optimization*) algoritam je temeljen na algoritmu za optimizaciju rojem čestica PSO (engl. *Particle Swarm Optimization*), ali za rješavanje višekriterijske optimizacije, odnosno u konkretnom slučaju minimiziranje ciljne funkcije dane jednadžom (3.23). PSO je prvenstveno kreiran za kontinuirane vrijednosti problema, ali mnogo se problema definira i na konačnoj domeni varijabli [56, p. 115]. Zato što se PSO rijetko upotrebljava za kombinatorne optimizacije, nužno je dobiveni skup rješenja prilagoditi željenom obliku. Više će se o algoritmu reći u poglavlju 4.2.

Konačno rješenje višekriterijske optimizacije skup je vektora rješenja  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , gdje je  $k = 2 \cdot n$ . Prvih  $n$  članova vektora rješenja predstavljaju vremena u minutama polaska vozila s prve stanice jer je razmak vremena između dolaska i odlaska sa stanica

fiksna i unaprijed određen uvjetima problema, odnosno odgovara jednadžbama (3.3), (3.4) i (3.5). Druga polovica vektora rješenja, odnosno drugih  $n$  članova vektora rješenja predstavlja moguću maksimalnu popunjenost vozila  $d_o$ . Time se definira koliko je putničkih vagona potrebno poslati da bi iskoristivost bila što je moguće veća.

Dobivene kontinuirane vrijednosti vremena u minutama zaokružuju se na najbližu cijelu minutu, a dobiveni kontinuirani mogući kapacitet vozila zaokružuje se na najbliži dopustivi kapacitet vozila iz skupa svih kombinacija vozila.

Za svako rješenje iz skupa svih rješenja izračunate su vrijednosti za  $f_1(x)$  i  $f_2(x)$  ciljne funkcije (3.23), odnosno proučava se uređeni par normiranih vrijednosti ukupne količine čekanja putnika između servisa i ukupne količine putnika u vozilu koji putuju između vozila. Iskoristivost vozila, odnosno količina putnika u vozilu uvijek je maksimalna ako se pošalje i najmanje vozilo iz skupa svih kombinacija dopustive popunjenosti vozila. Kako je s druge strane potrebno i zadovoljiti potrebe putnika, odnosno želi se smanji vrijeme čekanja na stanici na iduće vozilo, potrebno je penalizirati količinu čekanja putnika na stanici, odnosno želimo da nakon posljednjeg vozila ostane što je moguće manje putnika koji će na kraju biti prisiljeni se koristiti nekim drugim oblikom prijevoza.

Vrijeme potrebno da putnici uđu i izađu iz vozila, vrijeme potrebno da se vrata zatvore i otvore uvršteno je u vrijednost varijable  $d_{well_{s,i}}$ , prikazano nejednadžbom (3.4).

## 4.1 Osnovni koncept višekriterijske optimizacije

U radu se koristi višekriterijska optimizacija za koju se definira  $n$ -dimenzionalni skup svih mogućih rješenja.

**Definicija 4.1.** *Neka je  $S \subset \mathcal{R}^n$  i neka su  $f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $k$  ciljne funkcije definirane na  $S$ . Definira se vektorska funkcija jednadžbom (4.1) koja se minimizira [57, p. 21; 56, p. 127]*

$$f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)] \quad (4.1)$$

*i za koju vrijedi  $m$  ograničenja*

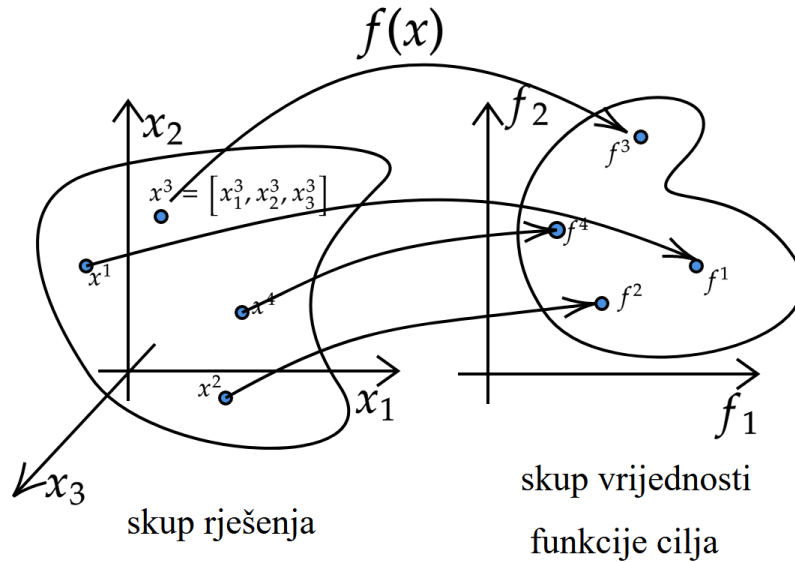
$$h_i(x) = 0, \quad (4.2a)$$

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.2b)$$

$$l_x \leq x \leq u_x. \quad (4.2c)$$



Za vektorsku funkciju problema definiranog ovom doktorskom disertacijom vrijedi  $f : S \rightarrow F$ , gdje su  $S \subset \mathbb{R}^n$  i  $F \subset \mathbb{R}^k$  za  $k = 2$ . Generalni je problem višekriterijske optimizacije odrediti vektor rješenja, odnosno vektor odluke  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  koji će zadovoljiti  $m$  ograničenja i optimizirati vektorsku funkciju (4.1).



Slika 4.1: Koncept višekriterijske optimizacije

Zbog jednostavnosti je vektor rješenja  $x^3$  prikazan na slici 4.1 uređena trojka u skupu svih mogućih kombinacija vrijednosti varijable na  $S$  za koju vrijede vrijednosti ciljne funkcije  $f(x)$ , koja je definirana jednadžbom (4.1). Funkcija preslikavanja je prikazana slikom 4.1. Na slici je prikazan vektor rješenja  $x^3 = [x_1^3, x_2^3, x_3^3]$  koji je varijabla odluke ciljne funkcije  $f^3$  koja ima vrijednosti  $(f_1^3, f_2^3)$ . U modelu kreiranom ciljnom funkcijom (3.23) vektor rješenja je dimenzije  $k = 2 \cdot m$ , odnosno veličina dimenzije je dva puta koliko ima servisa tijekom promatranog vremena jer za svaki servis treba odrediti vrijeme polaska s početne stanice i njegovo maksimalno dopustivo iskorištenje vozila.

Ako se promatraju dva vektora  $u = [u_1, \dots, u_k]$  i  $y = [y_1, \dots, y_k]$  rješenja iz skupa svih rješenja  $S$  tada  $u$  dominira nad  $v$  ako i samo ako vrijedi [57]:

$$u_i \leq v_i, \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$$

i

$$u_i < v_i, \quad \text{za barem jednu komponentu.}$$

Osnovni su pojmovi višekriterijske optimizacije Pareto dominantnost i optimalnost [58]. Rješenje  $x$  višekriterijskog problema Pareto je optimalno, odnosno efikasno rješenje, nedominatno ili neinferiorno rješenje, ako i samo ako ne postoji niti jedno rješenje  $y \in S$  takvo da  $f_i(y) \geq f_i(x)$ ,  $\forall i = 1, \dots, k$ . Odnosno, rješenje  $x$  efikasno je rješenje višekriterijskog problema, ako i samo ako ne postoji  $y$  koje dominira nad rješenjem  $x$  [57].

Skup svih Pareto optimalnih rješenja općenito se označava s  $\mathcal{P}$ . Tada se skup

$$\mathcal{PF} = \{f(x) : x \in \mathcal{P}\} \quad (4.3)$$

naziva *Pareto frontom* [57].

Za pareto frontu vrijedi  $\forall u, v \in \mathcal{PF}$  i  $\forall \lambda \in (0, 1) \exists \omega \in \mathcal{PF}$ . Tada za svako rješenje iz pareto fronte vrijedi definicija 4.2.

**Definicija 4.2.** *Neka je  $X$  realni vektorski prostor. Tada funkciju  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ , koja svakom vektoru  $u \in X$  pridružuje nenegativan realan broj zovemo norma vektora ako vrijedi*

(i)  $\|u\| = 0 \iff u = 0$  (pozitivna definitnost)

(ii)  $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall u \in X$

(iii)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ ,  $\forall u, v \in X$  (nejednakost trokuta)

Najčešće korištene vektorske norme su:

- $\|u\|_1 = \sum_{i=1}^n |u_i|$  ( $l_1$  norma)
- $\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2}$  ( $l_2$  ili Euklidska norma)
- $\|u\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |u_i|$  ( $l_\infty$  ili Čebiševljeva norma)

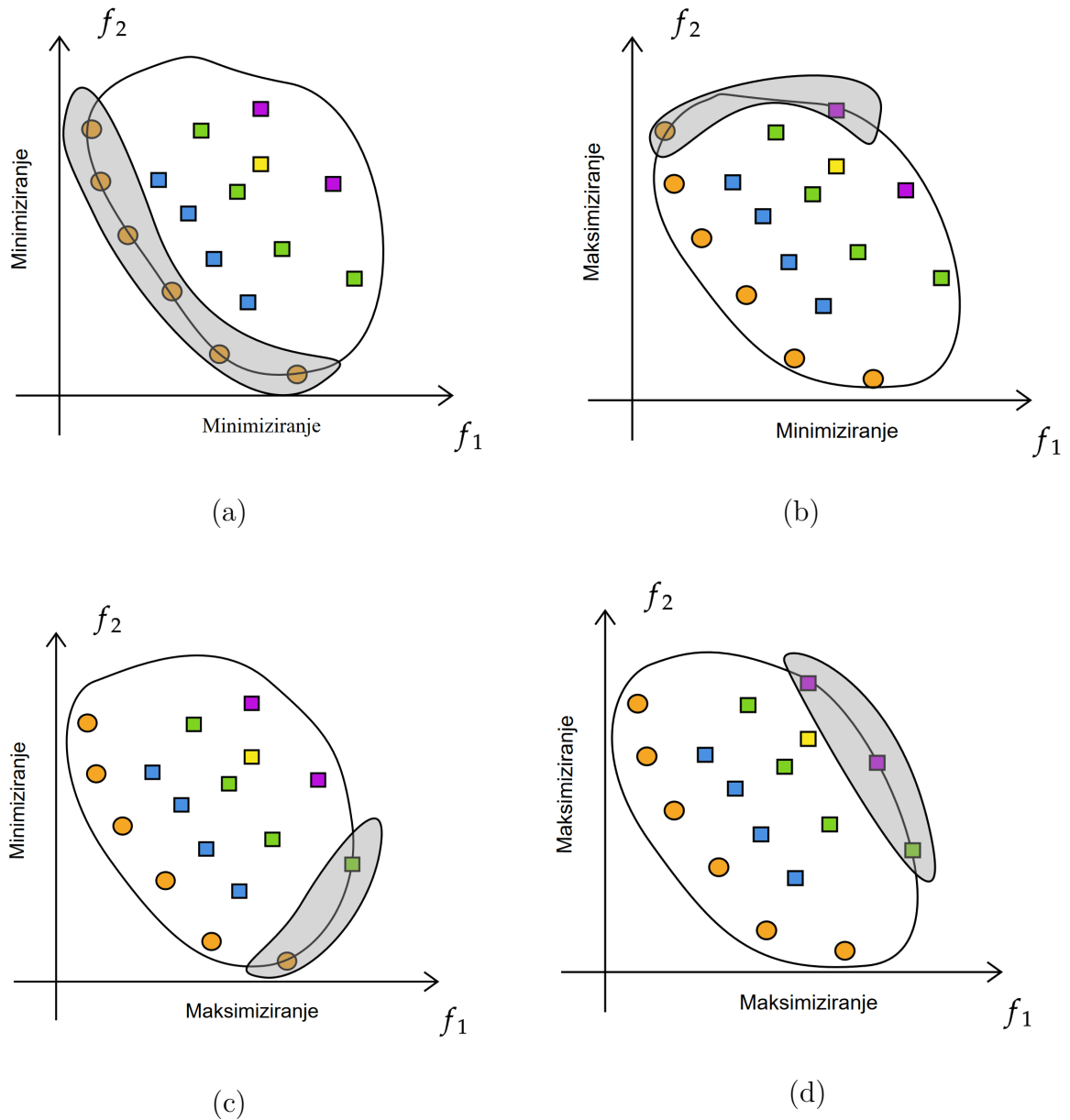
Tada za Pareto frontu vrijede svojstva konveksnosti i konkavnosti.

- konveksna  $\iff$

$$\lambda \|u\| + (1 - \lambda) \|v\| \geq \|\omega\| \quad (4.4)$$

- konkavna  $\iff$

$$\lambda \|u\| + (1 - \lambda) \|v\| \leq \|\omega\| \quad (4.5)$$



Slika 4.2: Pareto optimalne fronte za dvodimenzionalni problem na temelju literature [59].

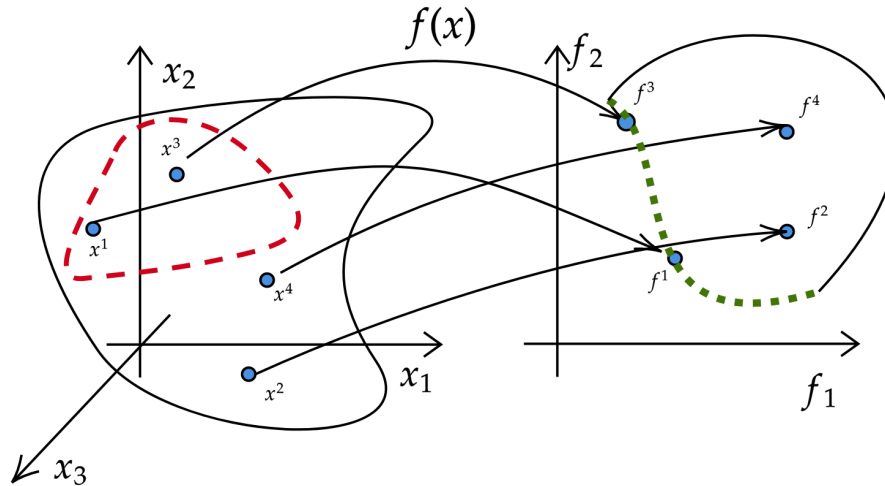
Slučaj (a) za minimiziranje obaju funkcija cilja, slučaj (b) za minimiziranje jedne, a maksimiziranje druge, slučaj (c) obrnuto od slučaja (b), slučaj (d) maksimiziranje obaju funkcija cilja

Skup svih Pareto optimalnih rješenja u slučaju minimizacije definira se na temelju definicije skupa dan je izrazom (4.6), a u slučaju maksimizacije dan je izrazom (4.7) [59].

$$\mathcal{P} = \{x, y \in S : \nexists y < x\} \quad (4.6)$$

$$\mathcal{P} = \{x, y \in S : \nexists y > x\} \quad (4.7)$$

Gore navedene definicije Pareto fronte i skupa svih Pareto optimalnih rješenja mogu se prikazati slikama 4.2. Sivo područje na slikama označava Pareto frontu za svaku od slučajeva za dvije ciljne funkcije koje se mogu minimizirati ili maksimizirati.



Slika 4.3: Pareto dopustiv skup rješenja i Pareto fronta vrijednosti funkcija cilja

Pareto optimalan skup na slici 4.3 označen je crvenom isertkanom linijom i sadržava vektore rješenja  $x^1$  i  $x^3$ . S druge strane, Pareto fronta označena je zelenom bojom točkasto i sadržava vrijednosti ciljnih funkcija  $f^1$  i  $f^3$ .

Ovom se doktorskom disertacijom također proučava optimizacija koristeći algoritam roja čestica, a u tom slučaju govorimo o klasifikaciji odabira ovisno o tome kada je uključen donositelj odluke. Odluka se može izvršiti prije, tijekom ili nakon višekriterijskog procesa. Kategorije su sljedeće: [56, 57, 59]

- *a priori* - *odluči*  $\rightarrow$  *pretraži* metoda. Donositelj odluke uključen je prije pokretanja višekriterijskog procesa. Zna se koliko je koja ciljna funkcija bitna za odluku.
- *interaktivan* - *odluči*  $\leftrightarrow$  *pretraži* metoda. Donositelj odluke uključen je tijekom višekriterijskog procesa koji se periodično pauzira i donositelj odluke odlučuje o željenom/izglednom rješenju.
- *posterior* - *pretraži*  $\rightarrow$  *odluči* metoda. Donositelj odluke uključuje se nakon što je algoritam pronašao što je više moguće Pareto optimalnih rješenja problema nakon čega donositelj odluke odlučuje o odgovarajućem rješenju.

U ovom je radu korištena *posterior* metoda. Kako je rješenje skup nedominatnih rješenja potrebno je odrediti preferirano rješenje, odnosno najbolje predloženo optimalno rješenje. Tijekom operacijskog procesa *posterior* algoritam mora spremati sva nedominantna rješenja kao najbolja rješenja problema [59, p. 18.].

## 4.2 Metoda za određivanje skupa nedominatnih rješenja

Optimizacijske metode do nedavno su se temeljile na tradicionalno matematičkom rješavanju problema. Mnoge karakteristike metoda proširene su u područja biologije, molekula, rojeva, neurobiološkog sustava i slično. Jedino što većina metoda traži je vrijednost funkcija.

### 4.2.1 Optimizacija rojem čestica

Optimizacija rojem čestica **PSO** algoritam je koji pripada algoritmima čestica, a oni pripadaju metaheurističkim algoritmima. **PSO** je jedna od najčešće korištenih tehnika optimizacija koja se temelji na roju koji kopira kretanje jata ptica ili jata riba, a čiji je cilj pronaći hranu. Svako je rješenje opisano sa smjerom vektora i položajem, a duljina je jednaka broju varijabli problema. Optimizacijska metoda temeljena je na inteligenciji čestica. Pretpostavlja se da roj mora biti točno određen, odnosno fiksne veličine, gdje svaka čestica ima sljedeće karakteristike: položaj i brzinu [60].

Svaka čestica predstavlja moguće rješenja promatranog problema, a promjenom položaja unutar područja pretrage oponašaju uspješnost drugih individualnih čestica. Zbog lakšeg razumijevanja algoritma definirat će se **PSO** za jednodimenzijsku optimizaciju. Definiiraju se vektor položaja i vektor brzine jednadžbama redom (4.8) i (4.9)  $k$ -te čestice  $D$ -dimenzionalnog skupa pretrage, gdje  $D$  predstavlja dimenziju čestice (broj rješenja), a  $S$  veličinu roja (broj čestica u roju) [56, 61, 62].

$$\vec{X}_k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_d^k), \forall k = 1, 2, \dots, S. \quad (4.8)$$

$$\vec{V}_k = (v_1^k, v_2^k, \dots, v_d^k), \forall k = 1, 2, \dots, S. \quad (4.9)$$

Početne vrijednosti, za vrijednost brojača  $k = 0$ , vrijednost položaja  $x_i^0$  i njegove odgovarajuće brzine  $v_i^0$  generirane su slučajno iz skupa pretrage. Na temelju korisnikove definicije ciljne funkcije najbolji položaj svake čestice koji odgovara najboljoj vrijednosti ciljne funkcije definira se s *pbest* (engl. *particles best solution*) kao vektor  $\vec{p}_k = (p_1^k, p_2^k, \dots, p_d^k)$ , gdje je

$p_i^0 = x_i^0$ . Globalno najbolje rješenje (*gbest*) najbolji je položaj čestice prikazan kao vektor  $\vec{p}_g = (p_1^g, p_2^g, \dots, p_d^g)$ . [56, 57, 61, 63]

PSO roj rabi dvije jednadžbe kretanja za promjenu brzine i promjenu položaja definirane redom jednadžbama (4.10) i (4.11) ovisno o vremenu (broju generacija, pomaka)  $\forall j = 1, 2, \dots, D, k = 1, 2, \dots, S$ .

$$v_j^k(t+1) = \omega v_j^k(t) + c_1 r_1 (p_i^k(t) - x_j^k(t)) + c_2 r_2 (p_g^k(t) - x_j^k(t)). \quad (4.10)$$

$$x_j^k(t+1) = x_j^k(t) + v_j^k(t). \quad (4.11)$$

Vrijednost faktora inercije  $\omega$  postavljena je kako bi se osiguralo pretraživanje unutar lociranih kandidata rješenja, odnosno odgovara koliki utjecaj ima prijašnja brzina na sadašnju. Što je vrijednost  $\omega \in [0, 1]$  veća proširuje se istraživanje na nova područja skupa pretraživanja, a što je vrijednost  $\omega$  manja iskorištava se lokalno pretraživanje kako bi se postigao što bolji učinak. Potrebno je pronaći najbolju ravnotežu između jedne i druge granice. [56, 57, 62]

Objašnjenja komponenti jednadžbe (4.10) [64]:

- umnožak  $\omega v_j^k(t)$  predstavlja komponentu inercije koja česticu pomiče u smjeru prethodne iteracije
- umnožak  $c_1 r_1 (p_i^k(t) - x_j^k(t))$  pomiče česticu sukladno najboljoj individualnoj poziciji
- umnožak  $c_2 r_2 (p_g^k(t) - x_j^k(t))$  pomiče česticu sukladno najboljem položaju roja koja se temelji na komunikaciji s drugim česticama.

U svakom koraku određivanja vrijednosti promjene brzine i promjene položaja svaka čestica uzima u unaprijed određenoj mjeri važnost odluke najbližeg najboljeg rješenja. Zato  $c_1$  predstavlja individualni faktor (engl. *cognitive parameter*), odnosno koliko je za česticu važno njegovo prethodno rješenje. Socijalni faktor (engl. *social parameter*)  $c_2$  predstavlja koliko je za česticu važno najbolje pronađeno rješenje njegove bliske okoline. Koeficijenti  $r_1$  i  $r_2$  dvije su slučajne varijable koje predstavljaju uniformnu distribuciju s vrijednostima iz intervala  $[0, 1]$ . Vrijednost promjene brzine sastoji se od triju komponenti. Proučavaju se vektori i definiraju se  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  te iznose redom:

$$\vec{a} = c_1 r_1 (p_i^k(t) - x_j^k(t)) \quad (4.12)$$

$$\vec{b} = c_2 r_2 (p_g^k(t) - x_j^k(t)) \quad (4.13)$$

$$\vec{c} = \vec{v} \quad (4.14)$$

Generalni pseudokod PSO algoritma definiran je algoritmom 1 temeljen na [65].

---

**Algoritam 1** PSO algoritam

---

- 1: Inicijaliziranje parametara  $w$ ,  $c_1$ ,  $c_2$
  - 2: Inicijaliziranje  $P[k]$  ▷ Položaj čestice
  - 3: Inicijaliziranje  $V[k] = 0$  ▷ Brzina čestice
  - 4: Evaluacija ciljne funkcije za svaku česticu
  - 5: **Dok** uvjeti zaustavljanja nisu istiniti **Čini** ▷ Kriteriji zaustavljanja
  - 6:     **Za** za svaki pojedini  $X_i$  **Čini**
  - 7:         **Za** za svaku dimenziju  $x_j^k$  **Čini**
  - 8:             (i) Izračunati brzinu  $v_j^k$  ▷ Koristeći 4.10
  - 9:             (ii) Izračunati položaj  $x_j^k$  ▷ Koristeći 4.11
  - 10:         **Kraj Za**
  - 11:     **Kraj Za**
  - 12:     Izračunati vrijednost ciljne funkcije ažuriranih čestica
  - 13:     Ažurirati  $gbest$  i  $pbest$
  - 14: **Kraj Dok**
  - 15: Vratiti česticu koja daje najbolju vrijednost ciljne funkcije problema
- 

Uvjeti zaustavljanja mogu biti različiti. Neki od uvjeta zaustavljanja su postizanje maksimalnog broja iteracija ili pronalazak dovoljno dobrog rješenja. [62, 66]

U korist stabilnosti algoritma, odnosno sprječavanja divergencije, reducira se brzina u koraku pretraživanja tako da se jednadžba (4.10) proširuje i njezin je novi zapis dan jednadžbom (4.15).

$$v_j^k(t+1) = \lambda(v_j^k(t) + c_1r_1(p_i^k(t) - x_j^k(t)) + c_2r_2(p_g^k(t) - x_j^k(t))) \quad (4.15)$$

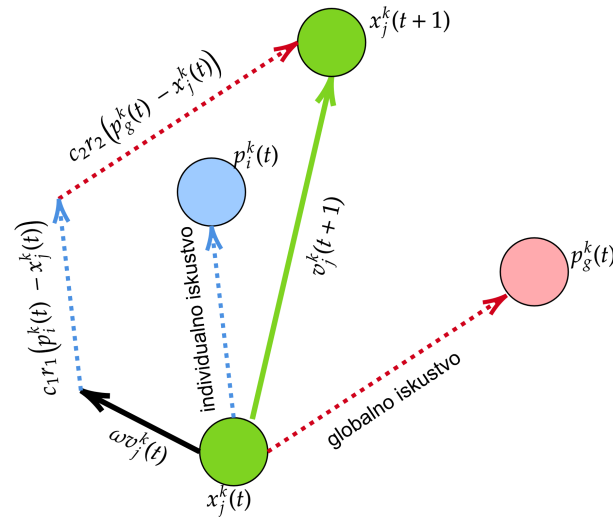
gdje je  $\lambda = \frac{2}{|2 - \Phi\sqrt{\Phi^2 - 4\Phi}|}$  i  $\Phi = c_1 + c_2$ ,  $\Phi > 4$ .

Slikoviti vektorski prikaz načina rada PSO algoritma za jedan korak dan je na slici 4.4.

## 4.2.2 Višekriterijski algoritam optimizacijom roja čestica

Osnovni koncept PSO algoritma nije zadovoljavajući za rješavanje kompleksnih problema, odnosno pretraživanja u višekriterijskom prostoru rješenja. U tom slučaju potrebno je originalni PSO modificirati. Višekriterijskom optimizacijom rojem čestica MOPSO optimizira se

---



Slika 4.4: PSO dijagram shema na temelju [64]

istodobno više od jedne ciljne funkcije koje su u konfliktu. U slučaju višekriterijske optimizacije rojem čestica **MOPSO** algoritam pretražuje skup različitih rješenja (skup rješenja Pareto fronte) umjesto jednog rješenja što je slučaj za jednodimenzionalni **PSO**. **MOPSO** algoritam za pretraživanje rješenja upotrebljava "bazen" rješenja u kojem pretražuje nedominatna rješenja na temelju zakonitosti koje su objašnjene u poglavlju 4.1. **MOPSO** i **PSO** algoritmi su koji ažuriraju brzinu i poziciju čestica na isti način. Dva su načina za prilagodbu **PSO** algoritma za rješavanje višekriterijske optimizacije. Jedan od načina je da algoritam svaku ciljnu funkciju proučava zasebno i svaka je čestica određena za svaku ciljnu funkciju. U tom slučaju prilagođeni **PSO** algoritam odgovara jednodimenzionalnoj optimizaciji. Drugi je način da algoritam određuje rješenja za sve ciljne funkcije za svaku česticu. U tom je slučaju riječ o Pareto optimalnom skupu rješenja.

Općeniti višekriterijski algoritam optimizacijom roja čestica pseudokodom je definiran algoritmom 2 temeljen na [67].



---

**Algoritam 2** Višekriterijski PSO algoritam temeljen na [67]
 

---

- 1: Inicijaliziranje parametara  $w$ ,  $c_1$ ,  $c_2$
  - 2: Inicijaliziranje  $P[k]$  ▷ Položaj čestice
  - 3: Inicijaliziranje  $V[k] = 0$  ▷ Brzina čestice
  - 4: Inicijaliziranje vanjske arhive ▷ Na početku je prazna
  - 5: **Dok** uvjeti zaustavljanja nisu istiniti **Čini** ▷ Kriteriji zaustavljanja - maksimalni broj iteracija
  - 6:     **Za** za svaki pojedini  $X_i$  **Čini**
  - 7:         Odrediti predvodnika vanjske arhive ▷ Ako je potrebno
  - 8:         (i) Izračunati brzinu  $v_j^k$  ▷ Koristeći 4.10
  - 9:         (ii) Izračunati položaj  $x_j^k$  ▷ Koristeći 4.11
  - 10:        Odrediti vrijednost ciljnih funkcija
  - 11:        Ažurirati najbolji položaj i vanjsku arhivu
  - 12:     **Kraj Za**
  - 13: **Kraj Dok**
  - 14: Izvješće rezultata vanjske arhive
- 

Višekriterijski problem definiran izrazom (3.23) predstavlja dvije ciljne funkcije koje je potrebno minimizirati. Koristeći MOPSO algoritam prema [68] rješava se problem minimiziranja količina čekanja na stanici i maksimiziranja količine iskoristivosti vozila, odnosno minimizira se količina slobodnih mjesta za svaki servis. Svaka čestica predstavlja jedno od mogućih rješenja definiranog problema. Algoritam pretražuje sve čestice u svakom koraku i definira skup nedominatnih rješenja za svaki korak.

## 4.3 Metode za određivanje preferiranog optimalnog rješenja iz skupa optimalnih rješenja

Dostupna literatura daje više različitih metoda za određivanje preferiranog optimalnog rješenja. Wang i Rangaiah [69] prikazuju deset dostupnih najčešće korištenih metoda za određivanje preferiranog optimalnog rješenja. U nastavku disertacije će se govoriti o preferiranom optimalnom rješenju iz skupa nedominatnih rješenja, odnosno Pareto fronte, dobivenih višekriterijskom optimizacijom.

---

U ovom su radu implementirane i uspoređivane tri metode na temelju ulaznih parametara i ciljeva određivanja preferiranog optimalnog rješenja. Odabrane metode iz literature su:

- **TOPSIS** (engl. *technique for order of preference by similarity to ideal solution*)
- **GRA** (engl. *gray relational analysis*).

Uz navedene metode predlaže se prilagođena metoda temeljena na kompromisnom programiranju.

### 4.3.1 TOPSIS metoda za određivanje preferiranog rješenja

Široko područje korištenja **TOPSIS** metode detaljno su opisali Behzadian et al. [70]. Metoda **TOPSIS** temelji se na određivanju najmanje euklidske udaljenosti od pozitivnog idealnog rješenja, **PIS** (engl. *positive ideal solution*), i najveće euklidske udaljenosti od negativnog idealnog rješenja, **NIS** (engl. *negative ideal solution*) [71]. Postoji nekoliko različitih metoda za određivanje pozitivnog, odnosno negativnog idealnog rješenja. Koraci na kojima se temelji **TOPSIS** metoda definirali su Hwang i Yoon [72] i prilagođeni su za definiran optimizacijski problem iz poglavlja 3.

#### Koraci za određivanje preferiranog optimalnog rješenja po TOPSIS metodi

1. **korak** Kreiranje matrice normiranih vrijednosti rješenja s  $m$  redova i  $n$  stupaca. Na temelju ciljne funkcije definirane jednadžbom (3.23) vrijednost broja stupaca je dva. Matricu je moguće odrediti na dva načina po [71]:

a)

$$F_{ij}(x) = \frac{f_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m f_{ij}^2}}, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, 2 \quad (4.16)$$

b) • za kriterij profita:

$$F_{ij}(x) = \frac{f_{ij} - f_j^-}{f_j^* - f_j^-} \quad (4.17)$$

gdje je  $f_j^* = \max_i f_{ij}$ , odnosno željena vrijednost, i  $f_j^- = \min_i f_{ij}$ , odnosno najgora vrijednost.

- za kriterij troška

$$F_{ij}(x) = \frac{f_j^- - f_{ij}}{f_j^- - f_j^*} \quad (4.18)$$

Općenito definira se matrica normiranih vrijednosti jednadžbom (4.19).

$$F_{ij}(x) = \frac{|f_{ij} - f_j^-|}{|f_j^* - f_j^-|} \quad (4.19)$$

Vrijednosti  $f_{ij}$  odgovaraju vrijednostima ciljne funkcije za svako od rješenja iz skupa nedominatnih rješenja. Za optimizacijski problem definiran s (3.23)  $f_{i,1}$  odgovara vrijednosti količine PWT-a,  $f_{i,2}$  odgovara vrijednosti  $1 - \eta_{av,norm}$ , a za kreiranje matrice normiranih vrijednosti korištena je jednakost (4.16).

2. **korak** Kreiranje normirane težinske matrice. U skupu težina  $w = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  je  $\sum_{j=1}^n w_j = 1$ . Za definiranu ciljnu funkciju s (3.23) jednako su važne, odnosno  $w_1 = w_2 = 0.5$ . Tada je normirana težinska matrica definirana s (4.20).

$$v_{ij}(x) = F_{ij}(x) \cdot w_j, \quad i = 1, \dots, m; j = 1, 2 \quad (4.20)$$

odnosno

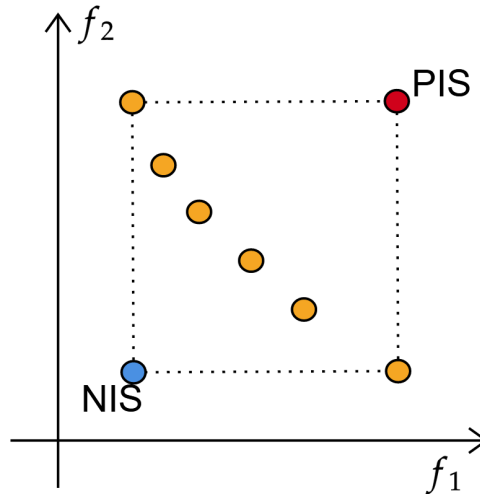
$$V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ \vdots & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 F_{11} & w_2 F_{12} \\ \vdots & \vdots \\ w_1 F_{m1} & w_2 F_{m2} \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

3. **korak** Određivanje pozitivno idealnog rješenja PIS (4.22) i negativno idealnog rješenja NIS (4.23).

$$\begin{aligned} PIS &= \{v_1^+(x), v_2^+(x), \dots, v_j^+(x), \dots, v_m^+(x)\} = \\ &= \{(\max_i(v_{ij}|j \in J)), (\min_i(v_{ij}|j \in J'))|i \in \{1, 2, \dots, m\}\} \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} NIS &= \{v_1^-(x), v_2^-(x), \dots, v_j^-(x), \dots, v_m^-(x)\} = \\ &= \{(\min_i(v_{ij}|j \in J)), (\max_i(v_{ij})|j \in J')|i \in \{1, 2, \dots, m\}\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

gdje su skupovi  $J$  odnosno  $J'$  vrijednosti svake pojedinačne ciljne funkcije profita odnosno troška. Za problem definiran u poglavlju 3 obje se funkcije cilja minimiziraju, odnosno optimiziraju po kriteriju troška. Pozitivno i negativno idealno rješenje TOPSIS metode dani su na slici 4.5. Žute točke na slici predstavljaju skup nedominatnih rješenja, odnosno Pareto fronte.



Slika 4.5: Idealna rješenja TOPSIS metode.

4. **korak** Određivanje Euklidske udaljenosti svakog rješenja i idealno pozitivnog (4.24), odnosno idealno negativnog rješenja (4.25).

$$S_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^+)^2} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.24)$$

$$S_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^n (v_{ij} - v_j^-)^2} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.25)$$

5. **korak** Određivanje sličnosti sa PIS:

$$C_i^* = \frac{S_i^-}{S_i^+ + S_i^-} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.26)$$

Rješenje  $i$  bliže je negativnom idealnom rješenju u slučaju kada je  $S_i^- = 0$ , odnosno  $C_i^* = 0$ . U slučaju kada je  $S_i^+ = 0$  i  $C_i^* = 1$  rješenje  $i$  je bliže pozitivnom idealnom rješenju. Optimalno rješenje koje je i preferirano rješenje ima najveću vrijednost  $C_i^*$ .

### 4.3.2 GRA metoda za određivanje preferiranog optimalnog rješenja

Siva relacijska analiza, odnosno **GRA** model, odnosi se na nepouzdana relacije između rješenja. Neki su elementi sustava poznati, a neki nisu [73]. Da bi se opisala sličnost između nedominatnih rješenja i najbolje vrijednosti ciljne funkcije računa se koeficijent GRC (engl. *grey relational coefficient*). Ova metoda ne rabi težinske vrijednosti funkcija.

## Koraci za određivanje preferiranog optimalnog rješenja po GRA metodi

1. **korak** Kreiranje matrice normiranih vrijednosti ciljne funkcije:

- za kriterij profita

$$F_{ij} = \frac{f_{ij} - \min_{i \in m} f_{ij}}{\max_{i \in m} f_{ij} - \min_{i \in m} f_{ij}} \quad (4.27)$$

- za kriterij troška

$$F_{ij} = \frac{\max_{i \in m} f_{ij} - f_{ij}}{\max_{i \in m} f_{ij} - \min_{i \in m} f_{ij}} \quad (4.28)$$

2. **korak** Izračunavanje parametara za izračunavanje GRC

$$F_j^+ = \max_{i \in m} F_{ij} \quad (4.29)$$

$$\Delta I_{ij} = |F_j^+ - F_{ij}| \quad (4.30)$$

$$\Delta \max = \max_{i \in M, j \in N} \Delta I_{ij} \quad (4.31)$$

$$\Delta \min = \min_{i \in M, j \in N} \Delta I_{ij} \quad (4.32)$$

3. **korak** Određivanje GRC za svako nedominatno rješenje:

$$GRC_i = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^n \frac{\Delta \min + \Delta \max}{\Delta I_{ij} + \Delta \max} \quad (4.33)$$

Za najveću vrijednost  $GRC_i$  odgovara da je  $i$ -to nedominatno rješenje ujedno i preferirano optimalno rješenje.

### 4.3.3 Predložena metoda za određivanje preferiranog optimalnog rješenja

Na temelju dosadašnjih danih metoda iz literature i prirodom rješenja dobivenih optimizacijom definiranog optimizacijskog modela (3.23) s MOPSO, definiraju se sljedeći koraci za rješavanje predloženog optimalnog nedominatnog rješenja, odnosno preferiranog optimalnog rješenja, na Pareto fronti dobivenoj MOPSO algoritmom. Predložena metoda za određivanje preferiranog optimalnog rješenja temelji se na metodi globalnog kriterija, odnosno kompromisnog programiranja. Kompromisno programiranje, CP, (engl. *compromise programming*) daje alternativno rješenje koje je što je moguće bliže optimalnom rješenju [74, p. 5-9].

Predložena metoda daje preferirano optimalno rješenje, a normiranjem ciljnih funkcija preferirano optimalno rješenje daje jednaku težinu ciljnim funkcijama.

1. **korak** Kreiranje matrice normiranih vrijednosti ciljne funkcije:

$$F_{ij} = \frac{f_{ij} - \min_{i \in m} f_{ij}}{\max_{i \in m} f_{ij} - \min_{i \in m} f_{ij}} \quad (4.34)$$

2. **korak** Određivanje euklidske norme vektora  $F \in \mathbb{R}^n$  (po [75]), svake normirane dvojke rješenja iz skupa nedominatnih rješenja:

$$r_j = \sqrt{\sum_{i=1}^2 F_{ij}^2}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m \quad (4.35)$$

3. **korak** Određivanje minimalne euklidske norme vektora, koji odgovara optimalnom rješenju iz skupa nedominatnih rješenja ciljne funkcije dane s (3.23):

$$\delta_{min} = \min_{j \in M}(r_j) \quad (4.36)$$

U poglavlju 5 za svaku od metoda prikazat će se odgovarajuća implementacija i preferirana optimalna rješenja iz skupa optimalnih rješenja i bit će dana i njihova usporedba.

## 4.4 Evaluacija rješenja

Odabir preferiranog optimalnog rješenja iz skupa optimalnih rješenja ovisi o ekspertu, odnosno stručnoj osobi, koji odluči je li ono dovoljno dobro ili ne. Moguće je evaluirati rješenje i time zaključiti koliko je preferirano optimalno rješenje dovoljno dobro odnosno loše, ovisno o zahtjevima. Zato će se model za evaluaciju preferiranog optimalnog rješenja višekriterijskog optimizacijskog modela definiranog jednačbom (3.23) koji je dobiven metodama koje su navedene u prethodnim poglavljima temeljiti na osnovnim relacijama evaluacije rješenja za određivanje najboljeg voznog reda i rasporeda vozila koji su definirali Ceder et al. [29]. Predloženi pokazatelji za evaluaciju rješenja koji odgovaraju broju putnika u razdoblju kada je servis između stanica prikazani su matično dimenzijom  $m \times (n - 1)$ , [broj servisa  $\times$  (broj stanica - 1)], i temelje se na prikazu i izračunu pokazatelja evaluacije rješenja za svaku stanicu i za svaki servis.

- **Pokazatelj troška** - predstavlja koja će vrsta vozila koliko puta biti poslana. Ako je potrebno više puta polazaka istog vozila u voznom redu, to predstavlja i više vozila te veličine [29]. Prijedlog je da se trošak smanji i koriste konstrukcije serijski spojenih vozila kao što su vlak ili tramvaj. Indikator troška u ovoj doktorskoj disertaciji predstavlja rješenje maksimalne željene popunjenosti vozila za svaki servis tj.  $d_o^s$ .

- **Pokazatelj na razini usluge** - odgovara pokazateljima koji opisuju kvalitetu rasporeda vozila na razini zadovoljstva prijevoznike tvrtke i zadovoljstvu putnika.

1. Ukupno odstupanje opterećenja vozila LD (engl. *total load-discrepancy*) - odgovara razlici između prosječnog broja putnika u vozilu u trenutku maksimalnog opterećenja i maksimalne željene popunjenosti vozila. Ukupno opterećenje popunjenosti za vozni red s  $N$  polazaka u vremena  $t_i$  odgovara jednadžbi (4.37) [29].

$$LD(Tt) = \sum_{i=1}^N |Disc(t_i)|, \quad (4.37)$$

gdje je  $Disc(t) = L(t) - d_{okj}$  odstupanje opterećenja vozila u trenutku  $t$  u periodu  $j$  za  $k$ -to vozilo iz skupa svih vozila.

Ovom doktorskom disertacijom se predlaže suprotno od predloženog u literaturi za pokazatelja na razini usluge za ukupno odstupanje opterećenja vozila. Cilj je modela definiranog jednadžbom (3.23) smanjiti broj putnika koji su ostali na stanici. Predlaže se pokazatelj na razini usluge za ukupnu mjeru broja putnika koji su ostali na stanici. Zbog toga se jednadžba (4.37) prilagođava jednadžbom (4.38).

$$TLD(t_s) = \sum_{i=1}^n |Disc(t_i)|, \quad (4.38)$$

gdje je

$$Disc(t) = \begin{cases} L(t) - d_o^s, & L(t) > d_o^s \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \quad (4.39)$$

broj putnika koji su morali ostati na stanici u trenutku  $t$  što odgovara vremenu napuštanja  $i$ -te stanice servisa  $s$ , dok je  $L(t)$  broj putnika koji žele ući u vozilo u trenutku  $t$ .

2. Prosječno relativno odstupanje preopterećenje vozila ARLD (engl. *average relative load-discrepancy*) odgovara omjeru odstupanja opterećenja vozila i dopustive maksimalne željene iskoristivosti vozila. Različito odstupanje opterećenja vozila daje različito relativno odstupanje opterećenja vozila [29]. Za predloženi model

u doktorskoj disertaciji prosječno relativno odstupanje preopterećenja vozila predložen je izračun s različitim dopustivim maksimalnim popunjenostima vozila i dana je jednadžba (4.40), suprotno od predloženog u literaturi.

$$ARLD(t) = \frac{\sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n |RLD(t_{i,s})|}{(n-1) \cdot m} \quad (4.40)$$

gdje je  $RLD$  relativno preopterećenje vozila u postocima dan jednadžbom (4.41). Rješenje  $RLD$  prikazano je matično za svaki servis  $i$  za svaku stanicu zbog jasnog uvida za koju stanicu  $i$  servis je postignuto preopterećenje  $i$  u kojem iznosu što je bitno ekspertu da može odlučiti o eventualnoj izmjeni veličine vozila za dani servis.

$$RLD(t_{i,s}) = \frac{Disc(t_i)}{d_o^s} \quad (4.41)$$

3. Prosječna razina usluge LOS (engl. *level-of-service*) odgovara prosječnom preopterećenju za različite moguće dopustive veličine vozila za razliku od prethodnih jednadžbi gdje se koriste samo jedna moguća dopustiva veličina vozila, što su definirali Ceder et al. [29]. Jednadžba (4.42) dana u Ceder et al. [29] za određivanje prosječne razine usluge se temelji na danom rasporedu vozila.

$$LOS = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \frac{L(t_i)}{d_{o(k_i)j}} \quad (4.42)$$

Ovom doktorskom disertacijom predložena je ocjena relativne razine usluge dana jednadžbom (4.43), za svaku stanicu  $i$  za svako dopustivo vozilo dano preferiranim rješenjem redom na temelju koje se određuje prosječna relativna razina usluge za sve stanice i sve servise.

$$RLOS_{i,s}(t) = \frac{L(t_i^s)}{d_o^s} \quad (4.43)$$

Prosječna vrijednost ocjene relativne razine usluge za sve servise  $i$  i sve stanice dana je jednadžbom (4.44).

$$RLOS_{av}(t) = \frac{\sum_{s=1}^m \sum_{i=1}^n RLOS_{i,s}}{m \cdot (n-1)} \quad (4.44)$$

- **Vremenski pokazatelj** - predstavlja koliko mala promjena vremena u voznom redu utječe na vrijednosti varijabli vremena čekanja putnika na stanici, i koliko je odstupanje voznog reda od pravilnog voznog reda.



1. Prosječna razlika vremena odlaska uzastopnih servisa za dobiveni vozni red, odnosno vremena polazaka servisa s prve stanice [29].
2. Očekivano vrijeme čekanja putnika na stanici predloženog modela evaluacije preferiranog rješenja računa se po jednadžbi (3.11). U predloženom se modelu uzima u obzir razlika vremena polaska dvaju uzastopnih vozila sa stanice jer se proučava nepravilni vozni red, za razliku od navedene literature gdje proučavaju pravilni vozni red.
3. Omjer vremenskog odstupanja dan je jednadžbom (4.45) čije su vrijednosti između 0% i 50% u slučaju pravilnog voznog reda [29].

$$TDR = \left( \frac{Wt}{hw} - \frac{1}{2} \right) \cdot 100 \quad (4.45)$$

Predložen vremenski pokazatelj omjera vremenskog odstupanja (PTDR) na temelju jednadžbe (4.45) i predloženog modela (3.23) dan je jednadžbom (4.46). Definira se omjer vremenskog odstupanja za svaku stanicu posebno u ovisnosti o očekivanom vremenu čekanja putnika na stanici koji dolaze ovisno o razlici vremena polaska između dvaju uzastopnih vozila. Vrijednost predloženog omjera vremenskog odstupanja je veći od 50% zbog toga što se proučava nepravilni vozni red. Što je vrijednost predloženog omjera vremenskog odstupanja veći od 50% to se više vozni red razlikuje od pravilnog voznog reda.

$$PTDR_i = \frac{w_i}{E[H_i]} = 50 \left( 1 + \frac{Var[H_i]}{E^2[H_i]} \right). \quad (4.46)$$

$$PTDR_{av} = \frac{\sum_{i=1}^n PTDR_i}{n}. \quad (4.47)$$

Kvaliteta definiranog voznog reda temelji se na odstupanju broja ulazaka u vozilo od željenog odstupanja broja ulazaka u vozilo, ali temelji se i na vremenskom odstupanju od željene razlike vremena odlaska sa stanice dvaju uzastopnih vozila [29]. Prijedlog metode evaluacije rješenja za konkretan problem je kvalitativna analiza prosječnog opterećenja popunjavanja vozila i prosječnog čekanja putnika na sljedeće vozilo. Predložena se analiza temelji na maticama rješenja određenim prilagođenim pokazateljima za evaluaciju. U dosadašnjoj literaturi odabrani su skalari rješenja, što nije dovoljno detaljna analiza evaluacije. Zato se predložena metoda temelji na matrici rješenja jer se mogu detaljno uočiti promjene za svaki servis i

za svaku stanicu. Prijedlogom metode evaluacije dolazi se do dubinske diskretne statističke analize podataka.

# 5

## Eksperimentalna analiza

Ciljna funkcija definirana jednadžbom (3.23) višekriterijska je i za rješavanje se predlažu heuristički optimizacijski algoritmi. Skup najboljih vozni redova odredit će se optimizacijom rojem čestica, odnosno višekriterijskim PSO, tj. MOPSO, opisan u poglavlju 4 koji se temelji na populaciji rješenja [68]. Provođenjem algoritma daje se skup nedominatnih rješenja koji čine Pareto optimalan skup. Preferirano optimalno rješenje dobiveno iz Pareto optimalnog skupa određuje se na temelju multikriterijskih metoda odlučivanja, definiranih u poglavlju 4. Za određivanje preferiranog optimalnog rješenja iz Pareto optimalnog skupa upotrebljava se TOPSIS metoda, GRA metoda i predložena metoda za određivanje preferiranog optimalnog rješenja definirane u poglavlju 4. U ovom će se poglavlju doktorske disertacije predložiti rješenja u slučaju da je dopustiva maksimalna iskoristivost vozila fiksna,  $d_0 = 70$ , i da je moguće kombinirati maksimalno sedam vozila dopustive maksimalne iskoristivosti vozila. Na temelju danih rješenja izračunata su, interpretirana i uspoređena preferirana optimalna rješenja na temelju svih triju opisanih metoda za određivanje preferiranog optimalnog rješenja.

Dana su i analizirana rješenja za tri numerička primjera temeljena na problemu koji su zadali Liu i Ceder [14]. Za sva tri su numerička primjera rezultati dobiveni koristeći predloženi model u poglavlju 3 i uspoređeni s dobivenim rješenjima na temelju ulaznih vrijednosti i početnih parametara definiranih u [14].

### 5.1 Numerički primjer 1 - određivanje optimalnog rješenja fiksnom dopustivom maksimalnom iskoristivošću vozila

Za prikazivanje rezultata predložene metode upotrijebit će se jednostavna linija prijevoza putnika dana na slici 1.1 koristeći tri skupa intervala vremena polaska sa stanice (broj intervala, odnosno servisa:  $q = 4$ ,  $q = 5$  i  $q = 6$ ) za rutu  $r_{a \rightarrow b}$  s četiri stanice, i dva skupa intervala vremena polaska (broj intervala, odnosno servisa:  $q = 4$  i  $q = 5$ ) za rutu  $r_{b \rightarrow a}$  s

četiri stanice. Ulazni podaci proučavani u razdoblju od sat vremena (između 7:00 i 8:00 sati prijepodne) sadržavaju prosječno vrijeme putovanja. Vrijeme potrebno za ulazak i izlazak putnika je konstantno. Vrijeme provedeno na stanici vozila je fiksno i ne ovisi o broju putnika. Predviđena OD matrica koja je nužna za izračune dana je tablicom 1.1. Vrijeme putovanja između dvije uzastopne stanice (engl. *running time*) prikazano je na slici 1.1.

Ostali parametri potrebni za rješenje problema sljedeći su:

- željeni maksimalni kapacitet svakog vozila je 70
- moguće kretanje (u minutama) s polazišne stanice definirano je vremenskim intervalima za svaki servis posebno:
  - $[0, 15], [16, 30], [31, 45], [46, 60]$ , za broj servisa  $q = 4$
  - $[0, 12], [13, 24], [25, 36], [37, 48], [49, 60]$ , za broj servisa  $q = 5$
  - $[0, 10], [11, 20], [21, 30], [31, 40], [41, 50], [51, 60]$ , za broj servisa  $q = 6$ .

U prilogu 1 prikazani su cjelokupni rezultati predloženog modela koristeći MOPSO algoritam i rezultati dobiveni na temelju ulaznih parametara iz literature [14]. Prikazani parametri su: *vremena polazaka* svakog servisa s početne stanice, ukupna normirana *količina čekanja* putnika na stanici na iduće vozilo, *broj putnika koji su ostali na stanici*, *vrijeme čekanja* na svakoj stanici i na svaki servis, *količina PWT*-a prikazanog za svaku stanicu i svaki servis posebno. Svako je rješenje prikazano matrično gdje redci predstavljaju servise redom, a stupci stanice redom. Nije prikazana suprotna ukupna prosječna normirana iskoristivost vozila ( $1 - \eta_{av,norm}$ ) jer je ista i jednaka nuli, zato što je veličina vozila jednaka za vozila svih servisa, odnosno  $d_o = 70$  i iskoristivost je maksimalna. Na temelju ulaznih podataka i rezultata koji su dani u Liu i Ceder [14] potrebne usporedbe prikazane su u prilogu 1 za sve skupove servisa za obje rute.

U svrhu PSO algoritma, svi su eksperimenti izvršeni korištenjem 200 čestica (engl. *particles*) i 500 generacija. Detaljni rezultati dani su u tablicama u prilogu 1. Dobiveno rješenje je Pareto fronta, odnosno postavkom maksimalno 200 rješenja na fronti.

U svrhu uspoređivanja rezultata prikazat će se tablica 5.1 s vremenom čekanja i količine čekanja putnika PWT u slučaju da su definirana četiri servisa tijekom sat vremena. Kao što se može zaključiti iz tablice, ukupna prosječna normirana količina vremena čekanja za sljedeći servis  $Z_{av,norm} = 0.142$  je manja kada se vozni red kreira MOPSO algoritmom, i on

je nepravilan vozni red, od vrijednosti  $Z_{av,norm} = 0.161$  predloženog pravilnog voznog reda kojeg su predložili Liu i Ceder [14]. Na temelju danih rezultata može se zaključiti da je rezultat količina čekanja putnika PWT definirana jednadžbom (3.14) bolji, odnosno manji koristeći MOPSO. Proučavajući ukupne rezultate dobivene predloženom metodom, ali i na temelju ulaznih parametara iz literature, količina čekanja putnika PWT nije zadovoljavajuća iz razloga što je veliki broj putnika ostao na stanicama i dugo čekaju na sljedeći povezani servis. U svrhu zadovoljavanja zahtjeva prijevozničkog poduzeća da vozila na linijama budu popunjena, odnosno da nema slobodnih mjesta u vozilima, zadovoljena je pretpostavka da je VOR maksimalan. U tom slučaju vrijednost ciljne funkcije modela definirane jednadžbom (3.23) koja se odnosi na suprotnu vrijednost ukupne prosječne normirane iskoristivosti vozila za sve stanice i servise jednaka je nuli, odnosno  $f_1(x) = 0$ . Iz prikazanih rezultata može se zaključiti da će putnici odabrati drugi oblik PT-a.

Tablica 5.1: Rezultati numeričkog primjera 1 i usporedba s rezultatima Liu i Ceder [14] za

$$r_{a \rightarrow b}, q=4$$

$d_o = 70$	Vrijeme polaska	$Z_{av,norm}$	Broj putnika koji su ostali na stanici	Vrijeme čekanja	Količina PWT po stanicama i servisima Jednadžba (3.14)
Predložena metoda	[7:15,	0.142	230 152 8	13 12 12	4386.45 2813.87 336.74
	7:28,		460 304 16	10 9 9	5674.19 3684.52 339.03
	7:38,		690 456 24	8 7 7	6379.35 4163.61 335.23
	7:46]		920 608 32	90 89 89	92467.74 60520.65 4491.29
Rezultati prema [14]	[7:15,	0.161	230 152 8	15 14 14	5700 3630 495
	7:30,		460 304 16	15 14 14	9150 5910 615
	7:45,		690 456 24	15 14 14	12600 8190 735
	8:00]		920 608 32	90 89 89	96300 62820 5130

U svrhu poboljšanja primjera PT servisa više orijentirano prema korisnicima, numerički primjer prikazan ovim poglavljem proširen je i prezentiran u poglavlju 5.2.

---

## 5.2 Numerički primjer 2 - određivanje preferiranog optimalnog rješenja različitim dopustivim maksimalnim iskoristivostima vozila

Kao što se može primijetiti na temelju rezultata iz prethodnog poglavlja, za kreiranje voznog reda u želji da putnici što manje čekaju na idući servis, nije potrebno da bude pravilni vozni red. Jednaki maksimalni dopustivi kapaciteti vozila za sve servise nije efikasno budući da postoji mogućnost da putnici koji čekaju na idući servis odluče koristiti drugi oblik prijevoza.

Zato je potrebno proširiti mogućnosti da se u razdobljima kada je frekvencija putnika povećana, kao što je u vrijeme odlaska na posao i odlaska s posla, vozila prošire serijskim spajanjem dodatnih vozila ili zamijene većim vozilom. U svrhu ispitivanja u ovom se poglavlju proširuju prethodni početni uvjeti i pretpostavka je [PT](#) željeznička ili tramvajska linija, a vozila su putnička vozila ili vagoni koji su maksimalnog dopustivog kapaciteta za 70 putnika svaki. Pretpostavlja se da je moguće spojiti maksimalno sedam putničkih vozila odnosno vagona u niz. Ostali uvjeti i parametri ostaju isti kao i u poglavlju [5.1](#). Ovim proširenjem cilj je reducirati količinu čekanja putnika po stanicama i servisima.

Koristi se [MOPSO](#) algoritam za određivanje optimalnih parametara. Parametri [MOPSO](#) algoritma su ostali isti kao u poglavlju [5.1](#). Dobiven skup nedominatnih rješenja, odnosno Pareto fronta prikazana je slikama [5.1](#) i [5.2](#), a preferirano optimalno rješenje se odabire predloženom metodom definiranom u potpoglavlju [4.3.3](#).

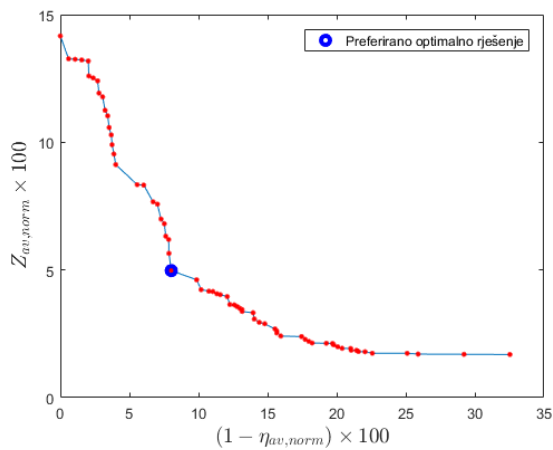
Detaljni rezultati izvršavanja algoritama prikazani su u dodatku [2](#). U svrhu interpretacije rješenja prikazana u tablici [5.2](#) odgovaraju početnim uvjetima da je dopustivo maksimalno iskorištenje vozila iz skupa kombinacija maksimalno sedam vozila s maksimalnim dopustivim iskorištenjem od 70 putnika svaki spojenih u niz i da vozni red nije nužno pravilan, nego da su četiri servisa raspoređeni unutar sat vremena unaprijed definirani ovisno o potrebama putnika koji se nalaze na stanicama.

---

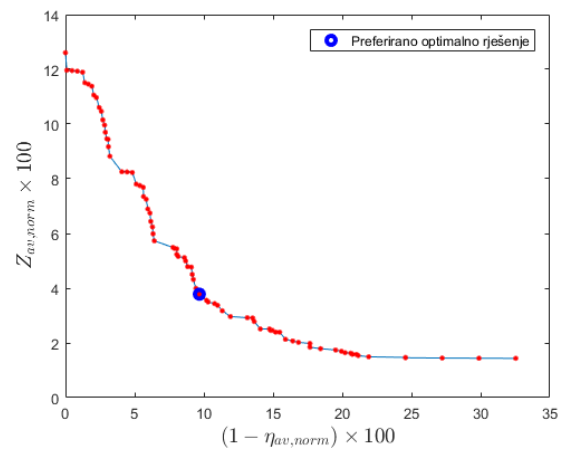
Tablica 5.2: Rezultati numeričkog primjera 2 za  $r_{a \rightarrow b}$ ,  $q=4$ 

Vrijeme polaska	[7:15, 7:25, 7:37, 7:46]
$d_o$	[70, 490, 70, 490]

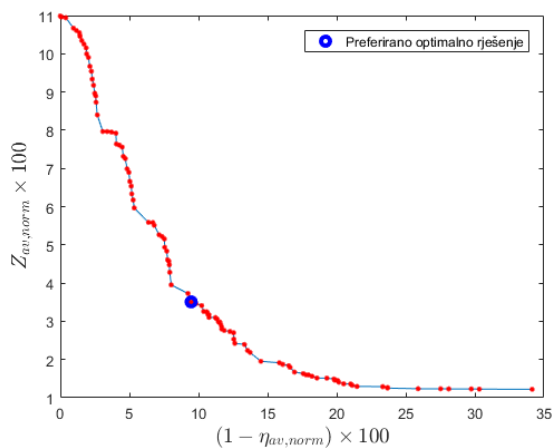
$1 - \eta_{av, norm}$	Iskoristivost vozila	Broj slobodnih mjesta	Broj putnika koji su ostali na stanici	$Z_{av, norm}$	Vrijeme čekanja	Količina PWT po stanicama i servisima
0.080	1 1 1	0 0 0	230 152 8	0.498	10 9 9	3348.39 2149.03 254.73
	1 1 0.52	0 0 236	40 136 0		12 11 0	1738.06 2386.84 209.68
	1 1 1	0 0 0	270 288 8		9 8 8	3373.55 3158.13 229.26
	1 1 0.52	0 0 236	80 272 0		90 89 0	16635.48 30141.29 1572.58



(a)

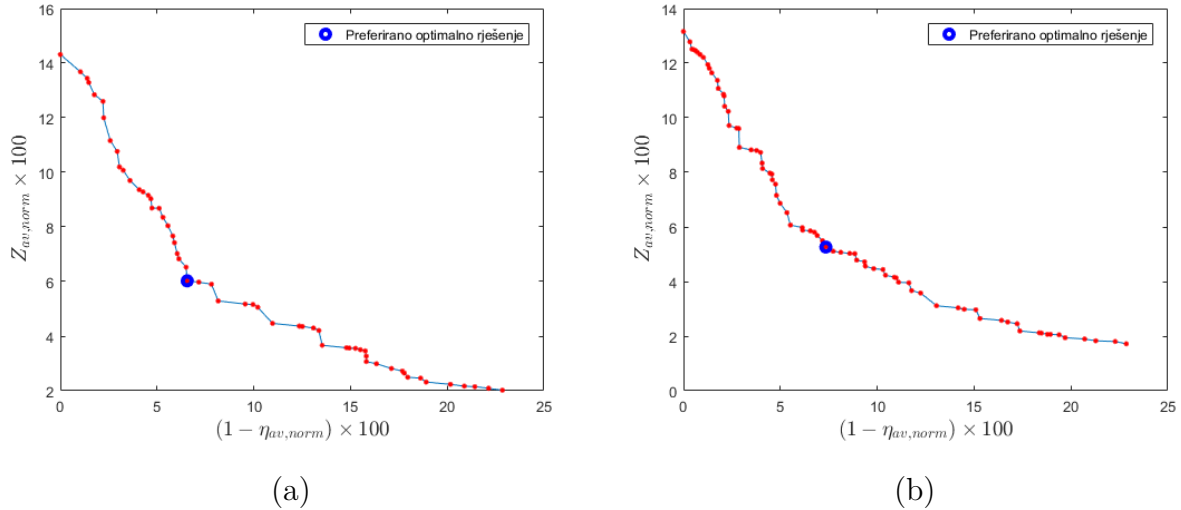


(b)



(c)

Slika 5.1: Pareto optimalan skup i preferirana optimalna rješenja za  $r_{a \rightarrow b}$ . Slike a, b, c rješenja su za  $r_{a \rightarrow b}$  i  $q = 4$ ,  $q = 5$ ,  $q = 6$  redom.



Slika 5.2: Pareto optimalan skup i preferirana optimalna rješenja za  $r_{b \rightarrow a}$ . Slike a, b rešenja su za  $r_{b \rightarrow a}$  i  $q = 4$ ,  $q = 5$  redom.

U svrhu uspoređivanja primjera 1 i primjera 2, vrijeme čekanja je prihvatljivo za nepravilni vozni red i raspored vozila koje je moguće po potrebi proširiti tako da spoje u niz. Broj putnika koji su ostali na stanici reduciran je i pretpostavlja se da će putnici čekati idući servis. Prosječan broj putnika koji su ostali na stanici za svaku stanicu i za svaki servis u numeričkom primjeru 1 na temelju tablice 5.1 je 325 putnika, dok je prosječan broj putnika koji su ostali na stanici za svaku stanicu i za svaki servis u numeričkom primjeru 2 na temelju tablice 5.2 123 putnika. Na temelju danih izračuna zaključuje se da je vrijeme čekanja putnika na sljedeći servis prihvatljivo za nepravilni vozni red i raspored vozila koje je moguće spajati u niz za svaki servis. U modelu definiranom jednadžbom (3.23) je cilj ne samo da se smanji broj putnika za svaku stanicu i za svaki servis, nego i da se smanji broj putnika koji su ostali na stanici nakon posljednjeg servisa, što iz danih rezultata možemo zaključiti da predloženi model daje bolje rezultate s takvim slučajevima u usporedbi s prethodnim primjerom danim u poglavlju 5.1.



### 5.3 Numerički primjer 3 - analiza i diskusija dobivenih preferiranih optimalnih rješenja dopustivim maksimalnim iskoristivostima vozila

Za dani numerički primjer 1 u poglavlju 5 rezultat je nepravilni vozni red, odnosno optimizirajući vozni red koristeći predloženi model uz usporedbu rješenja koji su dobili Liu i Ceder [14]. U tom slučaju prosječna normirana vrijednost čekanja putnika na stanici,  $Z_{av,norm}$ , dana jednadžbom (3.16) teži minimumu. Za numerički primjer 2 iz poglavlja 5.2 predlaže se PT linija, željeznička ili tramvajska, serijski spojenih maksimalno sedam vagona s maksimalnim dopustivim kapacitetom od 70 putnika svaki. Dobiveni rezultati predloženog modela daju poboljšanje količine PWT-a, odnosno broj putnika koji su ostali na stanici je manji što dovodi do moguće odluke putnika da će ostati na stanici pričekati idući servis.

Tablica 5.3 prikazuje rezultate dobivene čiji su ulazni parametri dostupne maksimalne iskoristivosti vozila ( $d_o$ ) dobivene numeričkim primjerom 2, poglavlje 5.2, i vremena polaska dobivena primjerom 1, poglavlje 5.1. Kao što je i očekivano  $1 - \eta_{av,norm}$  i  $Z_{av,norm}$  su smanjena, što pokazuju vrijednosti za svaki posebno u tablici 5.3. Preferirano optimalno rješenje se računa pomoću predložene metode dane u potpoglavlju 4.3.3.

Zaključuje se da za sve servise i obje rute predložena metoda daje bolje rezultate za ukupnu prosječnu normiranu količinu čekanja putnika na stanici na idući servis, što se vidi iz stupca vrijednosti  $Z_{av,norm}$ . Iako predloženi nepravilni vozni red s malim odstupanjem od pravilnog voznog reda dovoljno je značajno da se putnici ipak odluče da ostanu čekati idući servis, jer se očekuje da će biti poslano vozilo dovoljnog kapaciteta da što više putnika bude prevezeno na odredišnu stanicu. Detaljan pregled rezultata može se vidjeti u prilogu 3.

Rezultati dobiveni na temelju gornje opisanog problema dani su u tablici 5.4 za rutu  $r_{a \rightarrow b}$  u slučaju kada su moguća četiri servisa u promatranom razdoblju i mogućnost serijskog spajanja više putničkih vagona. Ukupna prosječna normirana količina čekanja putnika  $Z_{av,norm}$  iznosi 0.050, dok za ulazne veličine iz [14]  $Z_{av,norm}$  iznosi 0.064. S druge strane, suprotna ukupna prosječna normirana iskoristivost vozila ( $1 - \eta_{av,norm}$ ) iznosi 0.080 u oba slučaja, jer su predloženi maksimalni dopustivi kapaciteti servisa jednaki i zbog ulazne OD matrice ukupan omjer zauzetosti vozila je jednaka. U slučaju kada je maksimalni dopustiv kapacitet vozila fiksiran, odnosno  $d_o = 70$ ,  $Z_{av,norm}$  iznosi 0.142, za predloženi model, s druge strane  $Z_{av,norm}$  je 0.161 koristeći ulazne parametre koje su dali Liu i Ceder [14] čije vrijednosti su

prikazane u tablici 5.1.

U usporedbi dobivenih rezultata trećeg numeričkog primjera i prikazanih u tablici 5.4 s rezultatima prikazanim u tablici 5.1 zaključuje se da iako pravilni vozni red i maksimalni dopustivi kapaciteti vozila takvi da su popunjeni svi u svakom trenutku dovoljno dobri za prijevozničko poduzeće nisu zadovoljavajući za putnike koji ostaju na stanicima. Suprotno, nepravilni vozni red i promjenjivi maksimalni dopustivi kapaciteti vozila daje bolje prosječne rezultate, što se zaključuje iz tablice 5.4 za broj putnika koji su ostali na stanicima i količini čekanja putnika na sljedeći servis. Prosječan broj putnika svih stanica i servisa u promatranom razdoblju koji su ostali na stanicima za prvi numerički primjer, dan u potpoglavlju 5.1 tablicom 5.1 je 325 putnika, dok je za treći numerički primjer čiji rezultati su prikazani u tablici 5.4 123 putnika. Zaključuje se da je bolje koristiti mogućnosti proširenja kapaciteta vozila voznog parka.

---

Tablica 5.3: Količina čekanja putnika i iskoristivost vozila u slučaju kada je definirana maksimalna dopustiva iskoristivosti za svaki servis redom i vrijeme polaska sa stanice definiran iz numeričkog primjera 1

		$r_{a \rightarrow b}$				$r_{b \rightarrow a}$				
		Vrijeme polaska	$d_o$	$1 - \eta_{av,norm}$	$Z_{av,norm}$		Vrijeme polaska	$d_o$	$1 - \eta_{av,norm}$	$Z_{av,norm}$
q=4	Predložena metoda	[7:15,	70	0.080	0.050	Predložena metoda	[7:15,	70	0.066	0.061
		7:28,	490				7:28,	420		
		7:38,	70				7:38,	70		
		7:46]	490				7:46]	490		
	Rezultati prema [14]	[7:15,	70	0.080	0.064	Rezultati prema [14]	[7:15,	70	0.066	0.078
		7:30,	490				7:30,	420		
		7:45,	70				7:45,	70		
		8:00]	490				8:00]	490		
q=5	Predložena metoda	[7:12,	70	0.097	0.039	Predložena metoda	[7:12,	70	0.055	0.061
		7:24,	490				7:24,	140		
		7:35,	350				7:35,	490		
		7:43,	70				7:43,	70		
	7:49]	490	7:49]	490						
	Rezultati prema [14]	[7:12,	70	0.097	0.046	Rezultati prema [14]	[7:12,	70	0.055	0.073
		7:24,	490				7:24,	140		
		7:36,	350				7:3,	490		
7:48,		70	7:48,				70			
8:00]	490	8:00]	490							
q=6	Predložena metoda	[7:10,	70	0.095	0.036					
		7:20,	490							
		7:30,	140							
		7:40,	490							
	7:47,	70								
	7:51]	490								
	Rezultati prema [14]	[7:10,	70	0.095	0.041					
		7:20,	490							
7:30,		140								
7:40,		490								
7:50,	70									
8:00]	490									

Tablica 5.4: Rezultati trećeg numeričkog primjera i usporedba s rezultatima Liu i Ceder [14] za  $r_{a \rightarrow b}$ ,  $q=4$

	Vrijeme polaska	$d_o$	$Z_{av,norm}$	Broj putnika koji su ostali na stanicama	Vrijeme čekanja	Količina PWT po stanicama i servisima Jednadžba (3.14)
Predložena metoda	[7:15,	70	0.050	230 152 8	13 12 12	4386.45 2813.87 336.74
	7:28,	490		40 136 0	10 9 0	1474.19 2004.52 179.03
	7:38,	70		270 288 8	8 7 7	3019.35 2819.61 207.23
	7:46]	490		80 272 0	90 89 0	16867.74 30280.65 1611.29
Rezultati prema [14]	[7:15,	70	0.064	230 152 8	15 14 14	5700 3630 4955
	7:30,	490		40 136 0	15 14 0	2850 3390 375
	7:45,	70		270 288 8	15 14 14	6300 5670 495
	8:00]	490		80 272 0	90 89 0	20700 32580 2250

## 5.4 Usporedba preferiranih optimalnih rješenja dobivenih različitim metodama

Odabir metode, definirane u poglavlju 4, za određivanje preferiranog optimalnog rješenja prvenstveno ovisi o odluci eksperta koji rješava problem prijevoza putnika i kreira najbolji vozni red i raspored vozila na temelju ulaznih parametara i željenih ograničenja. Da bi preferirano optimalno rješenje zadovoljilo potrebe i zahtjeve putnika, ali i prijevoznike tvrtke zaključuje se da težinske vrijednosti ciljne funkcije moraju biti podjednake.

Rješenja dobivena metodama za određivanje preferiranog optimalnog rješenja iz skupa nedominantnih rješenja prikazana su u tablicama 5.5 i 5.6. Tablicom su prikazana vremena polaska s prve stanice linije, maksimalno opterećenje vozila svakog servisa, odnosno raspored vozila, što su i rješenja višekriterijske optimizacije. Uz to prikazana su suprotna ukupna prosječna normirana vrijednost iskoristivosti vozila  $f_1(x) = 1 - \eta_{av,norm}$  i ukupna prosječna normirana količina čekanja putnika na svim stanicama,  $Z_{av,norm}$ . Dana su rješenja za  $r_{a \rightarrow b}$  i  $r_{b \rightarrow a}$  za četiri ( $q = 4$ ), pet ( $q = 5$ ) odnosno šest ( $q = 6$ ) servisa unutar sat vremena. Iz rješenja prikazanih tablicom 5.5 i tablicom 5.6 može se zaključiti da su preferiranim optimalnim rješenjima dobivenih metoda vrijednosti ciljnih funkcija približno jednaka, ako ne i jednaka što možemo uočiti za metode TOPSIS i predloženu metodu u slučaju kada je

$q = 4$ . Razlog zbog kojeg su one jednake u ovom slučaju je manja dimenzija rješenja te se predložena metoda i TOPSIS podudaraju, jer obje proučavaju udaljenosti od tzv. idealnog rješenja. Obrazložiti će se dobiveni rezultati na temelju primjera kada je predloženo šest servisa unutar sat vremena, što je prikazano tablicom 5.6. Također, prikazani rezultati nisu dovoljni za obrazloženje najbolje dobivene metode, tako da će se dobiveni rezultati uspoređivati s dobivenim vrijenostima prikazanim matrično za svaku stanicu i za svaki servis u tablici 5.7.

U danoj usporedbi, vrijednosti ciljnih funkcija prikazanih tablicom 5.6 predložena metoda i TOPSIS metoda za određivanje preferiranog optimalnog rješenja se razlikuju. Odnosno, suprotna ukupna prosječna normirana vrijednost VOR-a predložene metode iznosi  $f_1(x) = 0.095$ , dok za TOPSIS metodu ona iznosi  $f_1(x) = 0.080$ . Dane vrijednosti se mogu interpretirati da je 9.5%, odnosno 8.0% ukupna prosječna količina slobodnih mjesta u vozilu. Za preferirano optimalno rješenje ukupna normirana vrijednost količine čekanja putnika predložena metoda daje  $f_2(x) = 0.035$ , a TOPSIS metoda daje vrijednost  $f_2(x) = 0.040$ . Iz danih vrijednosti može se zaključiti da TOPSIS metoda daje nešto bolji raspored vozila na temelju manje vrijednosti  $f_1(x)$ , dok predložena metoda daje nešto bolji vozni red u svrhu smanjenja količine čekanja putnika, što se vidi za vrijednost  $f_2(x)$ . Metoda GRA za određivanje preferiranog optimalnog rješenja daje bolju kombinaciju dopustivih maksimalnih iskoristivosti vozila, odnosno vrijednost  $f_2(x) = 0.020$ . Detaljni prikaz razlike između metoda za objašnjenje rezultata dobivenog preferiranog optimalnog rješenja prikazan je tablicom 5.7 i to za iskoristivost vozila, broj slobodnih mjesta u vozilu, broj putnika koji su ostali na stanici nakon odlaska sa stanice i vrijeme čekanja na idući servis za svaki servis (po redovima) i za svaku stanicu (po stupcima) redom. Iz dane tablice je vidljivo za svaku od svojstava sljedeće:

- Iskoristivost vozila - prosječna iskoristivost vozila za dobiveno preferirano optimalno rješenje svake metode redom je 0.91, 0.92 i 0.85 za predloženu metodu, TOPSIS metodu i GRA metodu iz čega slijedi da predložena metoda daje preferirano optimalno rješenje uz prosječnu iskoristivost vozila, 91% iskoristivosti vozila za sve stanice i za sve servise, u odnosu na druge dvije metode (92% i 85% redom TOPSIS i GRA model). Iz toga se može zaključiti da predložena metoda i TOPSIS metoda za preferirano optimalno rješenje daju zadovoljavajući raspored vozila ovisno o broju putnika koji žele putovati u promatranom razdoblju.

- 
- Broj slobodnih mjesta u vozilu - prosječan broj slobodnih mjesta u vozilu za dobiveno preferirano optimalno rješenje svake metode redom iznosi 41.7, 39.3, 71.1 za predloženu metodu, TOPSIS metodu i GRA metodu. Iz dobivenih vrijednosti se može zaključiti da predložena i TOPSIS metode daju sličan raspored vozila. Vrijednosti broja slobodnih mjesta nije dovoljna dobra ocjena usporedbe kvalitete rasporeda vozila, jer nemamo informaciju kojeg su kapaciteta vozila, te je su potrebna i druga svojstva za analizu.
  - Broj putnika koji su ostali na stanici - kako je cilj modela da što manje putnika ostane na stanici, prosječan broj putnika za sve stanice i za sve servise za svaku metodu redom iznose 131, 153, 71.2. Iz čega je vidljivo da najbolji raspored vozila u svrhu broja putnika koji su ostali na stanici za dobiveno preferirano optimalno rješenje daje GRA metoda, a nakon toga daje predložena metoda, dok za rješenje rasporeda vozila TOPSIS metoda daje najgore rješenje.
  - Vrijeme čekanja - ovisi o putnicima koji su ostali na stanici (ako nema putnika, nema ni čekanja) i voznom redu, odnosno razlika vremena između trenutka odlaska servisa sa stanice i dolaska idućeg servisa na stanicu. Prosječna vremena čekanja za sve servise i sve stanice za dobiveno preferirano optimalno rješenje svake metode redom za predloženu metodu, TOPSIS metodu i GRA metodu iznose 11.6, 11.9, 7.67 iz čega se zaključuje da je GRA metodom odabrano preferirano optimalno rješenje koje daje najkraće prosječno čekanje na idući servis.
  - Očekivano vrijeme čekanja - očekivano vrijeme čekanja na drugi servis dobiveno jednadžbom (3.11) TOPSIS metodom je 4.23 minute, predloženom metodom 4.26 minute, a GRA metodom 4.19 minuta.

Ostala detaljna rješenja i usporedbe nalaze se u dodatku 4. Iz danih rješenja i usporedbe istih slijedi da je predložena metoda dovoljno dobra određivanje preferiranog optimalnog rješenja iz skupa nedominatnih rješenja, a evaluacija rješenja je prikazana u poglavlju 5.5.

---

Tablica 5.5: Usporedba preferiranih rješenja dobivenih različitim metodama za određivanje preferiranog optimalnog rješenja za pet različitih vrsta voznog reda

		$r_{a \rightarrow b}$				$r_{b \rightarrow a}$					
		Polasci	$d_o$	$f_1(x)$	$f_2(x)$			Polasci	$d_o$	$f_1(x)$	$f_2(x)$
q=4	Predložena metoda \ TOPSIS	[7:15,	70	0.080	0.050	Predložena metoda \ TOPSIS	[7:15,	70	0.66	0.60	
		7:25,	490				7:25,	420			
7:37,	70	7:37,	70								
7:46]	490	7:46]	490								
q=4	GRA	[7:15,	350	0.160	0.024	GRA	[7:15,	70	0.066	0.060	
		7:27,	70				7:25,	420			
7:36,	490	7:37,	70								
7:46]	490	7:46]	490								
q=5	Predložena metoda	[7:12,	70	0.097	0.038	Predložena metoda	[7:12,	70	0.074	0.053	
		7:21,	490				7:22,	490			
7:31,	350	7:34,	70								
7:41,	70	7:42,	210								
q=5	TOPSIS	[7:12,	70	0.064	0.057	TOPSIS	[7:12,	70	0.055	0.061	
		7:21,	490				7:22,	140			
7:32,	70	7:31,	490								
7:40,	490	7:41,	70								
q=5	GRA	[7:12,	210	0.159	0.021	GRA	[7:12,	70	0.055	0.60	
		7:22,	490				7:22,	140			
7:32,	70	7:31,	490								
7:40,	490	7:41,	70								
		7:49]	490				7:49]	490			

Tablica 5.6: Usporedba preferiranih rješenja dobivenih različitim metodama za određivanje preferiranog optimalnog rješenja vozni red definiran:  $q = 6$  i  $r_{a \rightarrow b}$

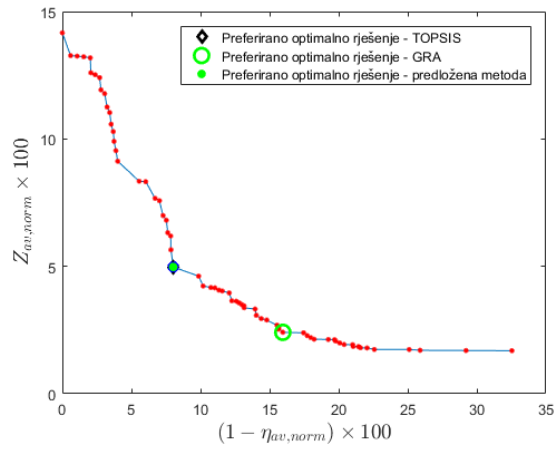
		$r_{a \rightarrow b}$			
		Polasci	$d_o$	$f_1(x)$	$f_2(x)$
q=6	Predložena metoda	[7:10,	70	0.095	0.035
		7:18,	490		
		7:29,	140		
		7:37,	490		
		7:45,	70		
		7:51]	490		
	TOPSIS	[7:10,	70	0.080	0.040
		7:19,	490		
		7:29,	70		
		7:36,	490		
		7:45,	70		
		7:51]	490		
	GRA	[7:10,	70	0.145	0.020
		7:17,	490		
		7:26,	490		
		7:36,	70		
		7:43,	490		
		7:51]	490		



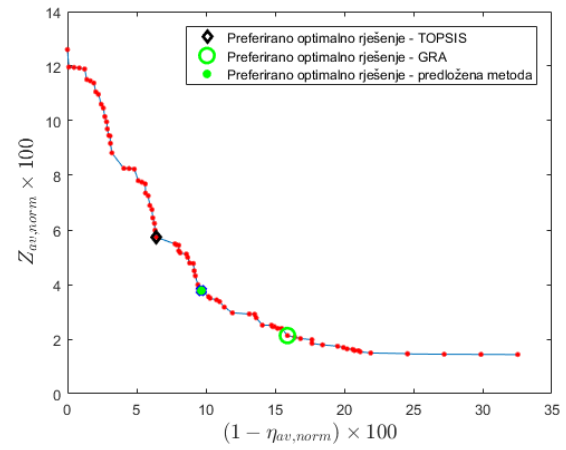
Tablica 5.7: Detaljan prikaz preferiranog rješenja za  $q = 6$ ,  $r_{a \rightarrow b}$ 

	Iskoristivost vozila			Broj slobodnih sjedala			Broj putnika koji su ostali na stanici			Vrijeme čekanja		
		1	1	1	0	0	0	230	152	8	8	7
Predložena metoda	1	1	0.52	0	0	236	40	136	0	11	10	0
	1	1	0.76	0	0	34	200	260	0	8	7	0
	1	1	0.50	0	0	244	10	244	0	8	7	0
	1	1	1	0	0	0	240	396	8	6	5	5
	1	1	0.52	0	0	236	50	380	0	60	59	0
	1	1	1	0	0	0	230	152	8	9	8	8
TOPSIS	1	1	0.52	0	0	236	40	136	0	10	9	0
	1	1	1	0	0	0	270	288	8	7	6	6
	1	1	0.52	0	0	236	80	272	0	9	8	0
	1	1	1	0	0	0	310	424	8	6	5	5
	1	1	0.52	0	0	236	120	408	0	60	59	0
	1	1	1	0	0	0	230	152	8	7	6	6
GRA	1	1	0.52	0	0	236	40	136	0	9	8	0
	0.69	1	0.48	150	0	254	0	30	0	0	9	0
	1	1	1	0	0	0	230	182	8	7	6	6
	1	1	0.52	0	0	236	40	166	0	8	7	0
	0.69	1	0.48	150	0	254	0	60	0	0	59	0

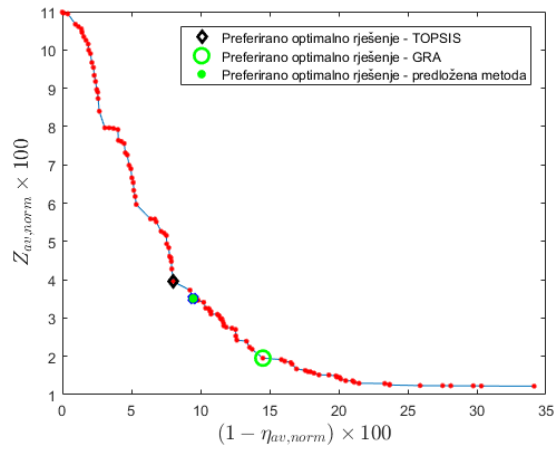
Slikama 5.3 i 5.4 prikazana su preferirana optimalna rješenja za sve tri implementirane metode definirane i objašnjene u prethodnim poglavljima. Označena su preferirana optimalna rješenja za  $r_{a \rightarrow b}$  redom za četiri, pet i šest servisa unutar sat vremena. Iz slika se može grafički zaključiti odabir preferiranog optimalnog rješenja Pareto fronte.



(a)

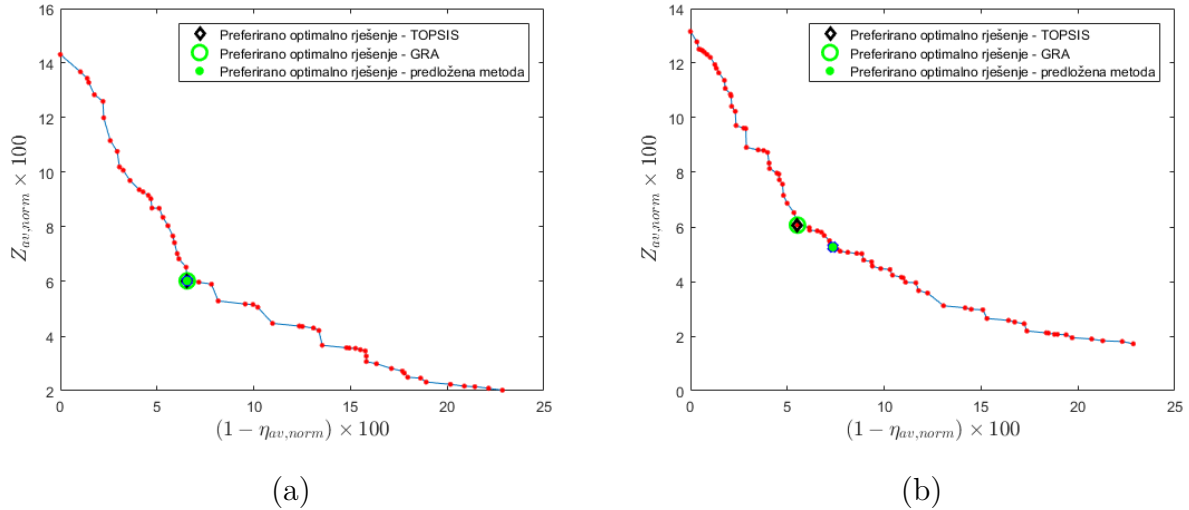


(b)



(c)

Slika 5.3: Slike (a), (b), (c) odgovaraju usporedbi preferiranih optimalnih rješenja korištenjem metoda GRA, TOPSIS i predloženom metodom za određivanje preferiranog optimalnog rješenja za  $r_{a \rightarrow b}$  i  $q = 4, q = 5, q = 6$  redom.



Slika 5.4: Slike (a), (b) odgovaraju usporedbi preferiranih optimalnih rješenja korištenjem metoda GRA, TOPSIS i predloženom metodom za određivanje preferiranog optimalnog rješenja za  $r_{b \rightarrow a}$  i  $q = 4$ ,  $q = 5$  redom.

## 5.5 Evaluacija preferiranog optimalnog rješenja

Rješenja višekriterijske optimizacije algoritmom optimizacije rojem čestica dan je skup nedominatnih rješenja. Rješenja su vektori čiji su elementi vremena polazaka servisa s prve stanice i odgovarajući maksimalni dopustivi kapaciteti vozila. Za određivanje preferiranog optimalnog rješenja predložene metode dane su u poglavlju 4 te implementirane i analizirane u poglavlju 5.4. S obzirom da algoritam višekriterijske optimizacije daje skup optimalnih rješenja, metode daju preferirano optimalno rješenje koje je nužno evaluirati. Odluka eksperta za određivanje najboljeg voznog reda smatra se najrelevantnijom metodom. S obzirom na to da nije uvijek moguće koristiti znanje čovjeka, a moguće su i pogreške za velike mreže PT-a, prijedlog je modela za evaluaciju preferiranog optimalnog rješenja kvalitativna ocjena dobivenih preferiranih rješenja predloženim metodama i njihova usporedba.

Tablica 5.8 prikazuje dobivena rješenja navedenih metoda za određivanje preferiranog optimalnog rješenja, za  $r_{a \rightarrow b}$  i  $q = 6$ , koja su bitna za detaljnu evaluaciju preferiranog optimalnog rješenja: prekoračenje željenog opterećenja vozila, relativno preopterećenje vozila dobiveno formulom (4.41) čije su vrijednosti u tablici dane za svaki servis (po redovima) i za svaku stanicu (po stupcima), prosječna relativna razina usluge RLOS dana jednadžbom (4.43), prosječno vrijeme čekanja i omjer vremenskog odstupanja (4.46). Preferiranim optimalnim

---

rješenjem teži se da relativno preopterećenje bude jednako nuli ili barem što je više moguće blizu nule. Na temelju prosječnog relativnog preopterećenja za sve servise i sve stanice metoda GRA daje najmanje prosječno relativno preopterećenje, odnosno preopterećenje od 70% što se dobilo izračunom prosjeka vrijednosti relativnog preopterećenja. Relativno preopterećenje na konkretnom primjeru govori koliki udio od trenutnog servisa je ostalo putnika. Na konkretnom primjeru možemo usporediti rezultate dobivene tablicama 5.8 i P.7. Vrijednost za relativno preopterećenje vozila za prvu stanicu prvog servisa iz tablice 5.8 iznosi 3.29 što govori da je ostalo putnika nešto više od tri puta više kapaciteta vozila koje je poslano za taj servis, a što vidimo iz tablice P.7 da je 230 apsolutni broj putnika ostalo čekati idući servis nakon što je otišao servis kapaciteta 70 putnika. Ovaj matični prikaz udjela putnika koji su ostali nakon servisa je izrazito bitan za evaluaciju rješenja, jer se može uočiti protok putnika u relativnom iznosu, koji se može smanjiti jedino ako se pošalje odgovarajući serijski spoj vozila. Može se zaključiti da je GRA metodom dovoljno dobro, u usporedbi s drugim metodama, odabrani dopustivi kapaciteti vozila, jer je ukupno prosječno preopterećenje manje u odnosu na druge metode. Prosječna relativna razina usluge se odnosi na relativni broj putnika po vozilu koji je poslan u promatranom vremenskom trenutku. Ovaj indikator predstavlja po servisima i stanicama moguće preopterećenje u slučaju da je vrijednost veća od 1, u suprotnom se govori o postotku slobodnih mjesta u vozilu, odnosno iskoristivosti vozila. Za prikazani problem predstavlja sljedeće izračune. Predložena ocjena relativna razina usluge dana jednadžbom (4.43) ako se promatra prvi servis i prva stanica u mreži čija vrijednost iznosi 4.29. Navedena vrijednost govori o omjeru putnika koji žele ući u vozilo maksimalnog kapaciteta 70 putnika, odnosno govori da je četiri puta više putnika na stanici u odnosu na poslano vozilo maksimalnog kapaciteta 70 putnika. Indikator relativne razine usluge za svaku stanicu i za svaki servis je bitan kako bi se moglo regulirati broj poslanih vozila spojenih u niz za odgovarajući servis. Proučavajući rezultate predložene metode za prvu stanicu i prvi servis u tablici 5.8 najbolje je poslati četiri vozila maksimalnog kapaciteta 70 putnika. U tom slučaju tako poslano vozilo ne bi bilo efikasno zbog zadnje stanice gdje je vrijednost relativne razine usluge jednaka 1.11, odnosno da bi se zadovoljila iskoristivost vozila potrebno je samo jedno vozilo maksimalnog kapaciteta 70 putnika. Za prikazano preferirano optimalno rješenje dano u tablici 5.8 za GRA metodu određivanja preferiranog optimalnog rješenja prosječna relativna razina iznosi 1.55 što predstavlja da je iskoristivost vozila za dano preferirano optimalno rješenje dano GRA metodom bolje od drugih metoda.

---

Predloženom metodom određivanja preferiranog optimalnog rješenja je dato sljedeće rješenje po veličini vrijednosti prosječne vrijednosti ocjene relativne razine usluge. Rezultati ostalih servisa nalaze se u prilogu 5.

Tablica 5.8: Evaluacija preferiranog optimalnog rješenja i usporedba s metodama za određivanje preferiranog optimalnog rješenja za  $r_{a \rightarrow b}$ ,  $q = 6$

	Relativno preopterećenje Jednadžba (4.41)	Prosječno relativno preopterećenje Jednadžba (4.40)	$RLOS_{i,s}(t)$ Jednadžba (4.43)	$RLOS_{av}(t)$ Jednadžba (4.44)	Prosječno vrijeme čekanja Jednadžba (3.11)	Omjer vremenskog odstupanja Jednadžba (4.47)
Predložena metoda	3.29 2.17 0.11	1.10	4.29 3.17 1.11	2.01	4.26	51.90
	0.08 0.28 0.00		1.08 1.28 0.52			
	1.43 1.86 0.00		2.43 2.86 0.76			
	0.02 0.50 0.00		1.02 1.50 0.50			
	3.43 5.66 0.11		4.43 6.66 1.11			
	0.10 0.78 0.00		1.10 1.78 0.52			
TOPSIS	3.29 2.17 0.11	1.47	4.29 3.17 1.11	2.39	4.23	51.61
	0.08 0.28 0.00		1.08 1.28 0.52			
	3.86 4.11 0.11		4.86 5.11 1.11			
	0.16 0.56 0.00		1.16 1.56 0.52			
	4.43 6.06 0.11		5.43 7.06 1.11			
	0.24 0.83 0.00		1.24 1.83 0.52			
GRA	3.29 2.17 0.11	0.70	4.29 3.17 1.11	1.55	4.18	51.01
	0.08 0.28 0.00		1.08 1.28 0.52			
	0.00 0.06 0.00		0.69 1.06 0.48			
	3.29 2.60 0.11		4.29 3.60 1.11			
	0.08 0.34 0.00		1.08 1.34 0.52			
	0.00 0.12 0.00		0.69 1.12 0.48			

Kvalitativna analiza predloženog voznog reda, vodeći računa o vremenskom razmaku između odlaska uzastopnih servisa sa stanice, definira se rabeći sljedeće indikatore: prosječno vrijeme između odlaska uzastopnih servisa sa stanice, **AH** (engl. *average headway*), i očekivano vrijeme čekanja, **EWT** (engl. *expected waiting time*), kao što je predložio Ceder [10]. Ovom doktorskom disertacijom **AH** i **EWT** proučava se za slučajni dolazak putnika za nejednaku razliku vremena odlaska dvaju uzastopnih vozila, što je u suprotnosti u literaturi gdje preferiraju pravilni vozni red i uniformni dolazak putnika na stanicu.

Vrijednosti **AH** i **EWT** za sve skupove intervala polazaka i za sve rute prikazani su tablicom 5.9. Za rutu  $r_{a \rightarrow b}$  i šest polazaka (odnosno šest servisa) unutar zadanog vremenskog intervala, očekivano **PWT** za korištenje predloženog modela je 4.45 i 4.23 za numeričke primjere 1 i 2,

za svako posebno, dok očekivano PWT iznosi 5, prilikom korištenja parametara i procedura iz [14].

Tablica 5.9: Prosječna razlika vremena polaska između dva uzastopna vozila i očekivano vrijeme čekanja sljedećeg vozila za numerički primjer 1 (NP1) i numerički primjer 2 (NP2)

			Prosječna razlika vremena polaska između dva uzastopna vozila	Očekivano vrijeme čekanja sljedećeg vozila
$r_{a \rightarrow b}$	q=4	Predložena metoda NP1 / NP2	10.33	5.37/5.24
		[14] – NP1	15	7.5
	q=5	Predložena metoda NP1 / NP2	9.25	4.93/4.68
		[14] – NP1	12	6
	q=6	Predložena metoda NP1 / NP2	8.2	4.45/4.23
		[14] – NP1	10	5
$r_{b \rightarrow a}$	q=4	Predložena metoda NP1 / NP2	10.33	5.37/5.24
		[14] – NP1	15	7.5
	q=5	Predložena metoda NP1 / NP2	9.25	4.93/4.66
		[14] – NP1	12	6

Predložena kvalitativna analiza dokazuje da je vozni red koji nije pravilan i koji je dobiven koristeći se predloženim modelom i optimiziran koristeći MOPSO je prikladniji uspoređujući ga s voznim redom dobivenim iz literature u [14].

# 6

## Zaključak

Problem prijevoza putnika u mreži javnog prijevoza kompleksni je problem u kojem je nužno voditi računa o zahtjevima i zadovoljstvu putnika s jedne strane, i zahtjevima prijevozničkog poduzeća s druge strane. Posljednjih godina rješavaju se problemi prijevoza putnika s ciljem da se zadovolje zahtjevi putnika i zahtjevi prijevozničkog poduzeća.

U modernom transportnom sustavu putnika najveći je izazov minimizirati potrošnju energije i maksimizirati ekonomske, tehnološke i društvene ciljeve. Zadnjih godina proučava se tzv. problem generiranja voznog reda u željezničkom prometu kojem je osnovni cilj određivanje periodičnog ili neperiodičnog voznog reda koji se drže kapaciteta vozila. Veliki značaj dan je i optimalnom broju vozila, minimiziranju vremena prosječnog putovanja eksperimentalnim postupkom optimizacije i minimiziranju puta. Iako je problem optimiziranja i pronalaska najboljeg voznog reda za vozila gradskog prijevoza poznat već godinama, posljednjih godina znanstvenici pokušavaju doći do što boljeg algoritma modificirajući prijašnje matematičke modele i postići bolje rezultate uporabom raznih metoda i već poznatih algoritmima, kao i korištenjem metoda umjetne inteligencije.

U dosadašnjoj literaturi mnogi su autori kreirali vlastite modele s dodatnim ograničenjima i rješavali definirane probleme već postojećim algoritmima. Odabir odgovarajućeg algoritma za rješavanje problema transporta putnika ovisi o vremenu izvršavanja i stupnju preciznosti algoritma. Često se u literaturi promatraju rasčlanjene dvije faze: minimalno vrijeme čekanja putnika na stanici i optimalan broj vozila. Minimizaciju vremena čekanja putnika na stanici u cijeloj mreži može se promatrati s različitih stajališta: pravilni/nepravilni vremenski razmak između dvaju uzastopnih vozila, redovno zaustavljanje na svakoj stanici ili zaustavljanje samo na nekim stanicama u vršnim vremenima.

Algoritme koje u literaturi najčešće upotrebljavaju za rješavanje problema kašnjenja vozila u svrhu minimizacije vremena čekanja putnika na stanici, minimizacije ukupnog vremena putovanja, ali prvenstveno određivanja najboljeg voznog reda kako bi se minimiziralo ukupno

---

kašnjenje vozila metaheuristički su i egzaktni algoritami. Proučava li se optimizacijski problem u prijevozu putnika ciljne funkcije kao problem linearnog planiranja, definira se problem ovisan o trošku ili problem ovisan o usluzi. Problem linearnog planiranja odnosi se na prijevozu infrastrukturu, vrijeme putovanja putnika, odabir najpovoljnijeg smjera putovanja i/ili njihova frekvencija korištenja. Definira li se problem kao orijentirana usluga linijskog planiranja i problem rasporeda moguće ga je riješiti heurističkim pristupom. Problem linearnog planiranja također je moguće formulirati kao mješovito cjelobrojno linearno programiranje i upotrijebiti egzaktna metode kao što su B & B i B & C. Prema literaturi se zaključuje da je problem prijevoza putnika jednokriterijska optimizacija ili višekriterijska. Ovisno o broju funkcija cilja koje se promatraju diskretna je optimizacija, a prema vrsti funkcije cilja problem se rješava kao nelinearno programiranje koje se može riješiti egzaktnim ili aproksimativnim metodama. Problemi mješovitog cjelobrojnog linearnog programiranja najčešće se rješavaju heurističkim algoritmima jer oni često daju najbrže približna rješenja stvarnom rješenju. Iako je definiranje voznog reda vrlo kompleksan posao, može se zaključiti da su zahtjevi i zadovoljstvo putnika, čekanje vozila na stanici i kapacitet vozila osnovni ciljevi pri kreiranju voznog reda. U svakom od modela prikazanih u dostupnoj literaturi moguća su poboljšanja. Također, moguće je uzeti u obzir i višekriterijsku optimizaciju, odnosno promatrati istovremeno zadovoljstvo putnika (maksimizirati zadovoljstvo) i troškove poslovanja (minimizirati rashode).

Ovim je doktorskom disertacijom predložen novi model za generiranje **PT** voznog reda. Model je definiran na temelju višekriterijske optimizacije jer se istovremeno optimizira zadovoljstvo putnika i troškovi poslovanja. Za rješavanje optimizacijskog modela implementirao se algoritam za optimizaciju rojem čestica **MOPSO**, a parametri prilagodili danom problemu.

Predloženi model uz višekriterijsku optimizaciju uzima u obzir prosječno pristizanje na stanicu u ovisnosti o vremenu između dvaju vozila. U dosadašnjoj literaturi većina autora pretpostavlja uniformno stizanje putnika na stanicu neovisno od dolaska vozila, odnosno vrijeme čekanja na sljedeće vozilo polovica je vremena između dvaju uzastopnih odlazaka vozila. Predloženim se modelom pokazalo da, iako je pravilni vozni red lakše za zapamtiti, nepravilni vozni red zadovoljava zahtjeve putnika da što kraće čekaju na sljedeće vozilo.

Praktični primjeri predloženog modela rabe vrijednosti **PWT**-a i **VOR**-a prikazivanja performansi predloženog modela i usporedili su se s relevantnim rezultatima iz literature.

Predloženi algoritam za optimizaciju modela daje skup optimalnih rješenja, iz kojih je nu-

---



---

žno odabrati preferirano optimalno rješenje. Uspoređivane su tri metode, TOPSIS, GRA i predložena metoda na temelju kompromisnog programiranja. Predložena metoda za određivanje preferiranog optimalnog rješenja daje dovoljno dobra rješenja u usporedbi s druge dvije metode, jer se rješenja analize nalaze unutar intervala čije su krajnje vrijednosti vrijednosti rješenja druge dvije metode.

Predloženi model i metode za određivanje skupa optimalnih rješenja i metode za određivanje preferiranog optimalnog rješenja implementirane su u MALTABu i riješena su tri numerička primjera te su rezultati uspoređeni s rezultatima dobivenim na temelju ulaznih parametara iz relevantne literature iz područja prijevoza putnika. Numerički primjer 1 rabi jednostavnu liniju za prijevoz putnika koristeći tri skupa intervala mogućih polazaka servisa ( $q = 4$ ,  $q = 5$ ,  $q = 6$ ) za rutu  $r_{a \rightarrow b}$  s četiri stanice i dva skupa broja mogućih polazaka ( $q = 4$ ,  $q = 5$ ) za rutu  $r_{b \rightarrow a}$ . Numerički primjer 2 ima iste uvjete i parametre kao numerički primjer 1 kao i dodatna pretpostavka da je PT linija željeznička ili tramvajska i da su vozila putnička vozila ili vagoni. Za oba primjera predloženi model koristeći MOPSO algoritam daje bolje vrijednosti ciljnih funkcija, odnosno kraći PWT i veći VOR. Numerički primjer 3 prikazuje kombinaciju preferiranih optimalnih rješenja iz numeričkog primjera 1 i numeričkog primjera 2.

Analiza slučaja temeljena na podacima iz dosadašnje literature pokazuje da predloženi pristup na temelju usporedbe prosječnih vremena čekanja putnika na stanici numeričkog primjera 1 i prosječnih vremena čekanja putnika danih formulom (3.11) reducira se prosječno vrijeme čekanja putnika na stanici za 10.54% za sve kombinacija servisa  $q = 4, q = 5$  i  $q = 6$  za rutu  $r_{a \rightarrow b}$  i  $q = 4$  i  $q = 5$  za rutu  $r_{b \rightarrow a}$  u danom razdoblju.

Predložen je model evaluacije rješenja na temelju modela evaluacije prikazane iz literature. U praksi ekspert određuje najbolji vozni red u promatranom trenutku. Ovim se doktorskom disertacijom rješava višekriterijska optimizacija i opseg skupa optimalnih rješenja je velik te se ekspertu ovim prijedlozima rješenja daje prijedlog preferiranih optimalnih rješenja, ovisno o metodi koja se koristi, a na temelju evaluacije rješenja može odlučiti odgovara li mu preferirano optimalno rješenje ili ne. Predložena metoda evaluacije preferiranog optimalnog rješenja temelji se na zakonitostima iz literature i kvalitativnoj analizi dobivenih rješenja.

Temeljem prikazanih rezultata, može se zaključiti da predloženi višekriterijski model, koji se rješava MOPSO algoritmom za izračunavanje optimalnog voznog reda, uz predloženu metodu za određivanje preferiranog optimalnog rješenja iz skupa optimalnih rješenja, potvr-

---

đuje prednost u odnosu na postojeće modele u znanstvenoj literaturi i čini se prikladnim za znanstvenike i stručnjake iz područja prijevoza putnika.

---

# Literatura

- [1] A. Ceder, “Bus frequency determination using passenger count data,” *Transportation Research Part A: General*, vol. 18, no. 5-6, pp. 439–453, 1984.
- [2] A. Ceder i N. H. Wilson, “Bus network design,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 20, no. 4, pp. 331–344, 1986.
- [3] A. Ceder, “Methods for creating bus timetables,” *Transportation Research Part A: General*, vol. 21, no. 1, pp. 59–83, 1987.
- [4] A. Caprara, M. Fischetti, i P. Toth, “Modeling and solving the train timetabling problem,” *Operations research*, vol. 50, no. 5, pp. 851–861, 2002.
- [5] M. Siebert i M. Goerigk, “An experimental comparison of periodic timetabling models,” *Computers & Operations Research*, vol. 40, no. 10, pp. 2251–2259, 2013.
- [6] M. A. Shafia, S. J. Sadjadi, A. Jamili, R. Tavakkoli-Moghaddam, i M. Pourseyed-Aghaee, “The periodicity and robustness in a single-track train scheduling problem,” *Applied Soft Computing*, vol. 12, no. 1, pp. 440–452, 2012.
- [7] M. R. Bussieck, P. Kreuzer, i U. T. Zimmermann, “Optimal lines for railway systems,” *European Journal of Operational Research*, vol. 96, no. 1, pp. 54–63, 1997.
- [8] Ö. Yalcinkaya i G. M. Bayhan, “Modelling and optimization of average travel time for a metro line by simulation and response surface methodology,” *European Journal of Operational Research*, vol. 196, no. 1, pp. 225–233, 2009.
- [9] A. Ceder, B. Golany, i O. Tal, “Creating bus timetables with maximal synchronization,” *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, vol. 35, pp. 913–928, 2001.
- [10] A. Ceder, *Public transit planning and operation: Modeling, Practice and Behavior*. Boca Raton, USA: CRC press, 2016.
- [11] J. Jonaitis, “Planning of the amount of trains needed for transportation by rail,” *Transport*, vol. 22, no. 2, pp. 83–89, 2007.

- 
- [12] K. M. Curtin i S. Biba, “The transit route arc-node service maximization problem,” *European Journal of Operational Research*, vol. 208, no. 1, pp. 46–56, 2011.
- [13] A. Caprara, L. Kroon, i P. Toth, “Optimization problems in passenger railway systems,” *Wiley encyclopedia of operations research and management science*, 2010.
- [14] T. Liu i A. A. Ceder, “Integrated public transport timetable synchronization and vehicle scheduling with demand assignment: A bi-objective bi-level model using deficit function approach,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 117, pp. 935–955, 2018.
- [15] I. Hartmann Tolić, G. Martinović, i D. Crnjac Milić, “Optimization methods in modern transportation systems,” *Tehnički vjesnik*, vol. 25, no. 2, pp. 627–634, 2018.
- [16] S. J. Chang i S. C. Hsu, “Modeling of passenger waiting time in intermodal station with constrained capacity on intercity transit,” *International Journal of Urban Sciences*, vol. 8, no. 1, pp. 51–60, 2004.
- [17] F. Baita, R. Pesenti, W. Ukovich, i D. Favaretto, “A comparison of different solution approaches to the vehicle scheduling problem in a practical case,” *Computers & Operations Research*, vol. 27, no. 13, pp. 1249–1269, 2000.
- [18] A. Herbon i Y. Hadas, “Determining optimal frequency and vehicle capacity for public transit routes: A generalized newsvendor model,” *Transportation research part B: methodological*, vol. 71, pp. 85–99, 2015.
- [19] Y. Hamdouch, H. Ho, A. Sumalee, i G. Wang, “Schedule-based transit assignment model with vehicle capacity and seat availability,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 45, no. 10, pp. 1805–1830, 2011.
- [20] Y. Wang, T. Tang, B. Ning, T. J. van den Boom, i B. De Schutter, “Passenger-demands-oriented train scheduling for an urban rail transit network,” *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 60, pp. 1–23, 2015.
- [21] P. Vansteenwegen i D. Van Oudheusden, “Developing railway timetables which guarantee a better service,” *European Journal of Operational Research*, vol. 173, no. 1, pp. 337–350, 2006.
-

- 
- [22] —, “Decreasing the passenger waiting time for an intercity rail network,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 41, no. 4, pp. 478–492, 2007.
- [23] F. Corman, A. D’Ariano, D. Pacciarelli, i M. Pranzo, “Bi-objective conflict detection and resolution in railway traffic management,” *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 20, no. 1, pp. 79–94, 2012.
- [24] J. Parbo, O. A. Nielsen, i C. G. Prato, “User perspectives in public transport timetable optimisation,” *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 48, pp. 269–284, 2014.
- [25] X. Sun, S. Zhang, H. Dong, Y. Chen, i H. Zhu, “Optimization of metro train schedules with a dwell time model using the lagrangian duality theory,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 16, no. 3, pp. 1285–1293, 2014.
- [26] S. J. Berrebi, K. E. Watkins, i J. A. Laval, “A real-time bus dispatching policy to minimize passenger wait on a high frequency route,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 81, pp. 377–389, 2015.
- [27] D. T. Aksu i U. Akyol, “Transit coordination using integer-ratio headways,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 15, no. 4, pp. 1633–1642, 2014.
- [28] L. Sun, J. G. Jin, D.-H. Lee, K. W. Axhausen, i A. Erath, “Demand-driven timetable design for metro services,” *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 46, pp. 284–299, 2014.
- [29] A. Ceder, S. Hassold, i B. Dano, “Approaching even-load and even-headway transit timetables using different bus sizes,” *Public Transport*, vol. 5, no. 3, pp. 193–217, 2013.
- [30] J. Li, J. Hu, i Y. Zhang, “Optimal combinations and variable departure intervals for micro bus system,” *Tsinghua Science and Technology*, vol. 22, no. 3, pp. 282–292, 2017.
- [31] S. Hassold i A. Ceder, “Multiobjective approach to creating bus timetables with multiple vehicle types,” *Transportation Research Record*, vol. 2276, no. 1, pp. 56–62, 2012.
- [32] —, “Public transport vehicle scheduling featuring multiple vehicle types,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 67, pp. 129–143, 2014.
-

- 
- [33] O. J. Ibarra-Rojas i Y. A. Rios-Solis, “Synchronization of bus timetabling,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 46, no. 5, pp. 599–614, 2012.
- [34] R. C. W. Wong, T. W. Y. Yuen, K. W. Fung, i J. M. Y. Leung, “Optimizing Timetable Synchronization for Rail Mass Transit,” *Transportation Science*, vol. 42, no. 1, pp. 57–69, 2008.
- [35] Y. Shafahi i A. Khani, “A practical model for transfer optimization in a transit network: Model formulations and solutions,” *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, vol. 44, no. 6, pp. 377–389, 2010.
- [36] J.-H. Zhong, M. Shen, J. Zhang, H. S.-H. Chung, Y.-H. Shi, i Y. Li, “A differential evolution algorithm with dual populations for solving periodic railway timetable scheduling problem,” *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, vol. 17, no. 4, pp. 512–527, 2012.
- [37] Y. Wu, J. Tang, Y. Yu, i Z. Pan, “A stochastic optimization model for transit network timetable design to mitigate the randomness of traveling time by adding slack time,” *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 52, pp. 15–31, 2015.
- [38] J. Wu, M. Liu, H. Sun, T. Li, Z. Gao, i D. Z. Wang, “Equity-based timetable synchronization optimization in urban subway network,” *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 51, pp. 1–18, 2015.
- [39] H. Niu i M. Zhang, “An optimization to schedule train operations with phase-regular framework for intercity rail lines,” *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol. 2012, 2012.
- [40] E. Barrena, D. Canca, L. C. Coelho, i G. Laporte, “Exact formulations and algorithm for the train timetabling problem with dynamic demand,” *Computers & Operations Research*, vol. 44, pp. 66–74, 2014.
- [41] —, “Single-line rail rapid transit timetabling under dynamic passenger demand,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 70, pp. 134–150, 2014.
- [42] K. Nachtigall i S. Voget, “Minimizing waiting times in integrated fixed interval timetables by upgrading railway tracks,” *European journal of operational research*, vol. 103, no. 3, pp. 610–627, 1997.
-

- 
- [43] —, “A genetic algorithm approach to periodic railway synchronization,” *Computers & Operations Research*, vol. 23, no. 5, pp. 453–463, 1996.
- [44] X. Yang, B. Ning, X. Li, i T. Tang, “A two-objective timetable optimization model in subway systems,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 15, no. 5, pp. 1913–1921, 2014.
- [45] H. Sun, J. Wu, H. Ma, X. Yang, i Z. Gao, “A bi-objective timetable optimization model for urban rail transit based on the time-dependent passenger volume,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 20, no. 2, pp. 604–615, 2019.
- [46] H. Niu, X. Zhou, i R. Gao, “Train scheduling for minimizing passenger waiting time with time-dependent demand and skip-stop patterns: Nonlinear integer programming models with linear constraints,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 76, pp. 117–135, 2015.
- [47] M. R. Amin-Naseri i V. Baradaran, “Accurate estimation of average waiting time in public transportation systems,” *Transportation Science*, vol. 49, no. 2, pp. 213–222, 2014.
- [48] F. Corman, A. D’Ariano, D. Pacciarelli, i M. Pranzo, “A tabu search algorithm for re-routing trains during rail operations,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 44, no. 1, pp. 175–192, 2010.
- [49] G. Heilporn, L. De Giovanni, i M. Labbé, “Optimization models for the single delay management problem in public transportation,” *European Journal of Operational Research*, vol. 189, no. 3, pp. 762–774, 2008.
- [50] T. Dollevoet, D. Huisman, M. Schmidt, i A. Schöbel, “Delay management with rerouting of passengers,” *Transportation science*, vol. 46, no. 1, pp. 74–89, 2012.
- [51] A. Ginkel i A. Schöbel, “To wait or not to wait? the bicriteria delay management problem in public transportation,” *Transportation Science*, vol. 41, no. 4, pp. 527–538, 2007.
- [52] S. Mu i M. Dessouky, “Scheduling freight trains traveling on complex networks,” *Transportation Research Part B: Methodological*, vol. 45, no. 7, pp. 1103–1123, 2011.
-

- 
- [53] M. Schachtebeck i A. Schöbel, “To wait or not to wait—and who goes first? delay management with priority decisions,” *Transportation Science*, vol. 44, no. 3, pp. 307–321, 2010.
- [54] M. Kaspi i T. Raviv, “Service-oriented line planning and timetabling for passenger trains,” *Transportation Science*, vol. 47, no. 3, pp. 295–311, 2013.
- [55] I. Hartamnn Tolić, E. K. Nyarko, i A. A. Ceder, “Optimization of public transport services to minimize passengers’ waiting times and maximize vehicles’ occupancy ratios,” *Electronics*, vol. 9, no. 2, pp. 1–19, 2020.
- [56] C. C. Coello, S. Dehuri, i S. Ghosh, *Swarm intelligence for multi-objective problems in data mining*. Springer, 2009, vol. 242.
- [57] L. Thu Bui, *Multi-Objective Optimization in Computational Intelligence: Theory and Practice: Theory and Practice*. IGI global, 2008.
- [58] C.-K. Goh i K. C. Tan, *Evolutionary multi-objective optimization in uncertain environments*. Springer, 2009.
- [59] S. Mirjalili i J. S. Dong, *Multi-Objective Optimization using Artificial Intelligence Techniques*. Springer, 2020.
- [60] S. S. Rao, *Engineering optimization: theory and practice*. John Wiley & Sons, 2019.
- [61] S. Dehuri, A. K. Jagadev, i M. Panda, *Multi-objective swarm intelligence: theoretical advances and applications*. Springer, 2015, vol. 592.
- [62] M. Cupić. Prirodom inspirirani optimizacijski algoritmi-metaheuristike. Pristupljeno: 29.01.2020. [Online]. Dostupno: <http://java.zemris.fer.hr/nastava/pioa/knjiga-0.1.2013-12-30.pdf>
- [63] K. Sharma, V. Chhamunya, P. C. Gupta, H. Sharma, i J. C. Bansal, “Fitness based particle swarm optimization,” *International Journal of System Assurance Engineering and Management*, vol. 6, no. 3, pp. 319–329, Sep 2015. [Online]. Dostupno: <https://doi.org/10.1007/s13198-015-0372-4>
-



- 
- [64] J. Xin, S. Li, J. Sheng, Y. Zhang, i Y. Cui, “Application of improved particle swarm optimization for navigation of unmanned surface vehicles,” *Sensors*, vol. 19, p. 3096, 07 2019.
- [65] C. A. C. Coello, G. B. Lamont, D. A. Van Veldhuizen *et al.*, *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. Springer, 2007, vol. 5.
- [66] C. Kahraman, *Computational intelligence systems in industrial engineering: With recent theory and applications*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [67] C. C. Coello i M. S. Lechuga, “Mopso: A proposal for multiple objective particle swarm optimization,” in *Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation. CEC’02 (Cat. No. 02TH8600)*, vol. 2. IEEE, 2002, pp. 1051–1056.
- [68] C. A. C. Coello, G. T. Pulido, i M. S. Lechuga, “Handling multiple objectives with particle swarm optimization,” *IEEE Transactions on evolutionary computation*, vol. 8, no. 3, pp. 256–279, 2004.
- [69] Z. Wang i G. P. Rangaiah, “Application and analysis of methods for selecting an optimal solution from the pareto-optimal front obtained by multiobjective optimization,” *Industrial & Engineering Chemistry Research*, vol. 56, no. 2, pp. 560–574, 2017.
- [70] M. Behzadian, S. K. Otaghsara, M. Yazdani, i J. Ignatius, “A state-of-the-art survey of topsis applications,” *Expert Systems with applications*, vol. 39, no. 17, pp. 13 051–13 069, 2012.
- [71] G.-H. Tzeng i J.-J. Huang, *Multiple attribute decision making: methods and applications*. Chapman and Hall/CRC, 2011.
- [72] C.-L. Hwang i K. Yoon, “Methods for multiple attribute decision making,” in *Multiple attribute decision making*. Springer, 1981, pp. 58–191.
- [73] F. Razi, “A supplier selection using a hybrid grey based hierarchical clustering and artificial bee colony,” *Decision Science Letters*, vol. 3, no. 3, pp. 259–268, 2014.
- [74] A. R. Ravindran, *Operations research methodologies*. Crc Press, 2008.
- [75] R. Galić, D. C. Milić, I. Galić, i A. Katić, “Matematika 1,” 2008.
-

# Popis slika

1.1	Primjer mreže javnog prijevoza putnika . . . . .	2
2.1	Klasifikacija metoda optimizacija . . . . .	19
3.1	Iskoristivost vozila po jedinici vremena . . . . .	27
4.1	Koncept višekriterijske optimizacije . . . . .	34
4.2	Pareto optimalne fronte . . . . .	36
4.3	Pareto fronta . . . . .	37
4.4	PSO dijagram shema . . . . .	41
4.5	Idealna rješenja TOPSIS metode . . . . .	45
5.1	Pareto optimalan skup i preferirana optimalna rješenja za $r_{a \rightarrow b}$ . . . . .	56
5.2	Pareto optimalan skup i preferirana optimalna rješenja za $r_{b \rightarrow a}$ . . . . .	57
5.3	Usporedba preferiranih optimalnih rješenja korištenjem različitih metoda za $r_{a \rightarrow b}$ . . . . .	67
5.4	Usporedba preferiranih optimalnih rješenja korištenjem različitih metoda za $r_{b \rightarrow a}$ . . . . .	68

# Popis tablica

1.1	OD matrica broja putnika . . . . .	2
1.2	Zbroj putnika na temelju OD matrice za obje rute . . . . .	3
1.3	Broj putnika za dva uzastopna servisa . . . . .	5
2.1	Pregled i usporedba literature . . . . .	20
2.1	Pregled i usporedba literature . . . . .	21
2.1	Pregled i usporedba literature . . . . .	22
3.1	Notacija . . . . .	23
5.1	Rezultati numeričkog primjera 1 i usporedba za $q=4$ . . . . .	54
5.2	Rezultati numeričkog primjera 2 za $q=4$ . . . . .	56
5.3	Rješenja trećeg numeričkog primjera . . . . .	60
5.4	Rezultati trećeg numeričkog primjer i usporedba za $r_{a \rightarrow b}$ , $q=4$ . . . . .	61
5.5	Usporedba preferiranih rješenja dobivenih različitim metodama . . . . .	64
5.6	Usporedba preferiranih rješenja dobivenih različitim metodama za $q = 6$ i $r_{a \rightarrow b}$ . . . . .	65
5.7	Detaljan prikaz preferiranog rješenja za $q = 6$ . . . . .	66
5.8	Evaluacija preferiranog optimalnog rješenja . . . . .	70
5.9	Prosječna razlika vremena polaska između dva uzastopna vozila i očekivano vrijeme čekanja sljedećeg vozila . . . . .	71
P.1	Rezultati numeričkog primjera 1 i usporedba za $q=5$ . . . . .	91
P.2	Rezultati numeričkog primjera 1 i usporedba za $q=6$ . . . . .	92
P.3	Rezultati numeričkog primjera 1 i usporedba za $q=4$ . . . . .	92
P.4	Rezultati numeričkog primjera 1 i usporedba za $q=5$ . . . . .	93
P.6	Rezultati numeričkog primjera 2 za $q=5$ . . . . .	94
P.7	Rezultati numeričkog primjera 2 za $q=6$ . . . . .	94
P.8	Rezultati numeričkog primjera 2 za $q=4$ . . . . .	95
P.9	Rezultati numeričkog primjera 2 za $q=5$ . . . . .	95
P.10	Rezultati trećeg numeričkog primjer i usporedba za $r_{a \rightarrow b}$ , $q=5$ . . . . .	96
P.11	Rezultati trećeg numeričkog primjer i usporedba za $r_{a \rightarrow b}$ , $q=6$ . . . . .	97

---

P.12	Rezultati trećeg numeričkog primjer i usporedba za $r_{b \rightarrow a}$ , $q=4$	97
P.13	Rezultati trećeg numeričkog primjer i usporedba za $r_{b \rightarrow a}$ , $q=5$	98
P.14	Detaljan prikaz preferiranog optimalnog rješenja za $q = 4$ , $r_{a \rightarrow b}$	99
P.15	Detaljan prikaz preferiranog optimalnog rješenja za $q = 5$ , $r_{a \rightarrow b}$	99
P.16	Detaljan prikaz preferiranog optimalnog rješenja za $q = 4$ , $r_{b \rightarrow a}$	100
P.17	Detaljan prikaz preferiranog optimalnog rješenja za $q = 5$ , $r_{b \rightarrow a}$	100
P.18	Evaluacija preferiranog optimalnog rješenja za $r_{a \rightarrow b}$ , $q = 4$	101
P.19	Evaluacija preferiranog optimalnog rješenja za $r_{a \rightarrow b}$ , $q = 5$	102
P.20	Evaluacija preferiranog optimalnog rješenja za $r_{b \rightarrow a}$ , $q = 4$	102
P.21	Evaluacija preferiranog optimalnog rješenja za $r_{b \rightarrow a}$ , $q = 5$	103

---

## Popis pokrata

LP	Linearno programiranje, engl. <i>linear programming</i> .....	9
AH	Prosječno vrijeme između odlaska uzastopnih servisa sa stanice, engl. <i>average headway</i> .....	70
ALNS	Algoritam prilagodljivog pretraživanja velikog susjedstva, engl. <i>adaptive large neighborhood search algorithm</i> .....	16
APW	Prosječno vrijeme čekanja putnika, engl. <i>average passenger wait</i> .....	10
APWT	Prosječno vrijeme čekanja putnika, engl. <i>average passenger waiting time</i> .....	8
B & B	Grananje i ograničavanje, engl. <i>branch and bound</i> .....	11
B & C	Grananja i rezanja, engl. <i>branch and cut</i> .....	16
CP	Kompromisno programiranje, engl. <i>Compromise programming</i> .....	46
DE	Diferencijska evolucija, engl. <i>differential evolution</i> .....	14
DM	Upravljanje kašnjenjem, engl. <i>delay management</i> .....	18
EWT	Očekivano vrijeme čekanja, engl. <i>expected waiting time</i> .....	70
GA	Genetski algoritam, engl. <i>genetic algorithm</i> .....	14

---

GAMS	Generalni sustav za algebarsko modeliranje, engl. <i>general algebraic modeling system</i> .....	18
GRA	Siva relacijska analiza, engl. <i>gray relational analysis</i> .....	43
MILP	Mješovito cjelobrojno linearno programiranje, engl. <i>mixed integer linear programming</i> .....	14
MIP	Mješovito cjelobrojno programiranje, engl. <i>Mixed Integer Programming</i> .....	11
MOPSO	Višekriterijska optimizacija rojem čestica engl. <i>multiobjective particle swarm optimization</i> .....	32
NIS	Negativno idealno rješenje, engl. <i>negative ideal solution</i> .....	43
OD	Polazište-odredište, engl. <i>origin-destination</i> .....	2
OHM	Optimizacijska metoda temeljena na heuristikama, engl. <i>optimization based heuristic method</i> .....	12
PIS	Pozitivno idealno rješenje engl. <i>positive ideal solution</i> .....	43
PRS	Metoda za po dijelovima regularan raspored vozila, engl. <i>phase-regular scheduling</i> .....	15
PRTS	Periodični željeznički vozni red, engl. <i>periodic railway timetable scheduling problem</i> .....	14
PSO	Optimizacija rojem čestica, engl. <i>particle swarm optimization</i> .....	32
PT	Javni prijevoz putnika, engl. <i>public transportation</i> .....	1

---

PWT	Vrijeme čekanja putnika, engl. <i>passenger waiting time</i> .....	1
SOLPTP	Orijentirana usluga ka problemu linijskog planiranja i voznog reda, engl. <i>service-oriented line planning and timetabling problem</i> .....	19
SQP	Sekvencijalno kvadratno programiranje, engl. <i>sequential quadratic programming</i> .....	9
TOPSIS	Tehnika određivanja preformansi po sličnosti idealnom rješenju, engl. <i>technique for order of preference by similarity to ideal solution</i> .....	43
TRANSMax	Maksimizacija usluge prijevoza rute brid-čvor, engl. <i>transit route arc-node service maximization</i> .....	18
TTP	Problem željezničkog voznog reda, engl. <i>train timetabling problem</i> .....	1
TTSP	Problem sinkroniziranog voznog reda, engl. <i>timetable synchronization problem</i> .....	12
VOR	Omjer zauzetosti vozila, engl. <i>the vehicles' occupancy ratio</i> .....	2

## Popis oznaka modela

$K_{i,s}$	količina čekanja putnika koji pristižu na stanicu u vremenu između servisa .....	24
$\eta$	ukupna iskoristivost vozila .....	25
$\eta_{av,norm}$	ukupna prosječna normirana iskoristivost vozila .....	25
$\tau_{v,s}$	prosječna iskoristivost vozila za servis $s$ .....	25
$d_o$	željena maksimalna popunjenost vozila engl. <i>the desired occupancy</i> .....	24
$dwell_{s,i}$	vrijeme stanja servisa $s$ na stanici $i$ .....	24

---

$H_{i,s}$	razlika vremena odlaska sa stanice $i$ dvaju uzastopnih servisa engl. <i>headway</i> .....	24
$k_i$	prosječni broj putnika po vremenu .....	24
$L$	skup linija .....	23
$N$	skup stanica .....	23
$N$	skup vozila .....	23
$OD_s$	skup OD parova za servis $s$ .....	23
$P(v_{s,c}, i)$	ukupan broj putnika u vozilu $v$ na stanici $i$ .....	24
$P(v_{s,c}, kj)$	broj putnika u vozilu s $kj$ parom stanica .....	24
$P^{curr}(v_{s,c}, i)$	broj putnika koji se nalaze u vozilu .....	24
$P^{in}(v_{s,c}, i)$	broj putnika koji su ušli u vozilo .....	24
$P^{out}(v_{s,c}, i)$	broj putnika koji izlaze iz vozila .....	24
$P^{stay}(v_{s,c}, i)$	broj putnika koji ostaju na stanici .....	24
$P_{ij}$	broj putnika koji žele ući u vozilo s OD parom stanica .....	24
$run_{s,i}$	vrijeme putovanja servisa $s$ između dviju susjednih stanica za promatranu liniju engl. <i>running time</i> .....	24
$S_{OD}$	skup servisa za zadani OD par .....	23
$T_i$	ukupno promatrano vrijeme od prvog do posljednjeg servisa za stanicu $i$ engl. <i>time horizon</i> .....	24
$T_{s,i}$	razlika između vremena odlaska servisa $s$ s dvije uzastopne stanice na liniji $l$ .....	24
$t_{s,i}^d$	vrijeme dolaska servisa $s$ na stanicu $i$ .....	24
$t_{s,i}^d$	vrijeme polaska servisa $s$ sa stanice $i$ .....	24

---



---

$v_{s,c}$	vozilo $v$ s kapacitetom $c$ i servisom $s$ .....	24
$w_i$	prosječno vrijeme čekanja na stanici $i$ .....	24
$Z_{av,norm}$	ukupna prosječna normirana količina čekanja putnika .....	25
$Z_{i,s}$	količina čekanja putnika na stanici $i$ na servis $s$ .....	24
$Z_{i,s}^{norm}$	normirana količina čekanja putnika na stanici $i$ na servis $s$ .....	24

## Popis ostalih oznaka

$\gamma_j$	faktor ulaska putnika u periodu $j$ .....	7
$A_j$	opterećenje vozila tijekom perioda $j$ .....	7
$c$	kapacitet vozila .....	7
$d_j$	željena popunjenost vozila tijekom perioda $j$ .....	7
$f_j$	broj vozila potrebnih u periodu $j$ .....	7
$H$	vremenski razmak između dvaju uzastopnih međugradskih vozila .....	8
$L$	duljina rute .....	7
$m_r$	postotak propuštenih vozila u $r$ -tom periodu čekanja .....	8
$N(t)$	funkcija gustoće dolaska putnika na stanicu po rasporedu .....	8
$P_j$	prosječna maksimalna popunjenost vozila tijekom perioda $j$ .....	7

---

# Sažetak

Problem prijevoza putnika u mreži javnog prijevoza kompleksan je problem. Jedan od segmenata problema prijevoza putnika je i određivanje voznog reda za vozila u mreži javnog prijevoza putnika. Za određivanje najboljeg voznog reda nužno je voditi računa o zahtjevima i zadovoljstvu putnika, ali i o zahtjevima prijevozničkog poduzeća.

Posljednjih godina rješavaju se problemi prijevoza putnika s ciljem da se zadovolje zahtjevi putnika i zahtjevi prijevozničkog poduzeća. U ovoj disertaciji opisana je višekriterijska optimizacija prijevoza putnika koja uzima u obzir vrijeme čekanja putnika na stanici i iskoristivost vozila. Ovo je istraživanje usmjereno ka konkretnom rješenju problema voznog reda i raspoređivanja vozila na temelju konkretnog testnog primjera iz referentne literature.

Osim pregleda već postojećih metoda detaljno je opisan novorazvijeni optimizacijski model za rješavanje problema vremenskog raspoređivanja vozila zasnovanog na višekriterijskoj optimizaciji uz odgovarajući postupak stvaranja voznog reda i vremenskog raspoređivanja vozila u mreži javnog prijevoza.

Postupci stvaranja voznog reda i vremenskog raspoređivanja vozila u mreži javnog prijevoza putnika temelje se na heurističkoj metodi optimizacijom roja čestica. Višekriterijska optimizacija ovisno o parametrima za rješenje daje skup optimalnih rješenja, Pareto fronte, iz kojih je nužno odabrati jedno preferirano optimalno rješenje. Kako zbog opsega skupa optimalnih rješenja nije moguće u razumnom vremenu odabrati preferirano optimalno rješenje, predložena je učinkovitija metoda za određivanje preferiranog optimalnog rješenja. Dobiveno preferirano optimalno rješenje uspoređeno je s dodatnim dvjema metodama koje odgovaraju zadanom problemu i zaključeno je da je predložena metoda dovoljno dobra za određivanje preferiranog optimalnog rješenja.

U svrhu evaluacije rješenja predložena je metoda koja se temelji na kvalitativnoj analizi rješenja. Testiranjem predloženih metoda pokazane su prednosti višekriterijske optimizacije u odnosu na postojeće metode po pitanju odabiranja kriterijskih funkcija, definiranih ograničenja i izvođenja u realnom vremenu što je iznimno važno zbog dinamike cijelog sustava prijevoza putnika.

U budućem istraživanju analizirat će se rješenja modela korištenjem podataka iz stvarne mreže prijevoza putnika. Uvest će se varijabla vremena potrebna za ulazak i za izlazak iz vozila. Također, da bi se kreirao kompleksniji vozni red, potrebno je uzeti u obzir stanicu

presjedanja i uskladiti vozne redove više linija. Postojeći algoritam za rješavanje višekriterijske optimizacije potrebno je poboljšati u korist stabilnosti algoritma i prilagoditi parametre predloženog algoritma.

Temeljem prikazanih rezultata, višekriterijski model koji se rješava MOPSO algoritmom za izračunavanje optimalnog voznog reda i raspoređivanja vozila, uz predloženu metodu za određivanje preferiranog optimalnog rješenja iz skupa optimalnih rješenja, potvrđuje prednost u odnosu na postojeće modele u znanstvenoj literaturi i prikladan je za znanstvenike i stručnjake iz područja prijevoza putnika.

Ključne riječi: operacijska istraživanja, matematički model, višekriterijska optimizacija, problemi kombinatorne optimizacije, heurističke metode, vremensko raspoređivanje vozila, generiranje voznog reda, vrijeme čekanja putnika

---

## **Timetable development in the public transportation network using multiobjective optimization in order to minimize waiting time and maximize vehicle efficiency**

The problem of passengers transportation in a public transportation network is a complex problem. One of the segments of the problem of passengers transportation is determining the timetable for vehicles in a public transportation network. For determining the best timetable, it is unavoidable to consider the requirements and satisfaction of passengers as well as requirements of transportation companies.

In recent years, the PT problem has been solved in the literature with different perspectives on the passenger requirements and transportation companies' requirements. In this PhD dissertation, a model of the PT timetabling problem, which takes into consideration the passenger waiting time (PWT) at the stations and the vehicles occupancy ratio (VOR) is proposed. The solution aims to minimize PWT and maximize VOR. The results of the proposed method are compared to similar results from the existing literature.

In addition to the review of the existing methods, the proposed optimization model for solving vehicles scheduling process based on multi-objective optimization is described in detail. An appropriate procedure for creating a timetable and vehicles schedule in public transportation is proposed.

Timetabling and vehicle scheduling procedures in PT network are based on a heuristic algorithm. Due to the large search space of the problem, a multi-objective particle swarm optimization (MOPSO) algorithm is used to arrive at the solution of the problem. The solution of the problem is a set of optimal solutions, i.e. Pareto front, from which it is necessary to select one preferred optimal solution. Since the selection of one optimal solution is a time consuming process, a more appropriate method for determining the preferred optimal solution is proposed. The proposed method is compared to other two methods for solving the particular problem and it is concluded that the proposed method is more appropriate.

For the purpose of evaluating the obtained solutions, a method based on qualitative analysis is proposed. The proposed multi-objective optimization method shows the advantages over existing methods regarding selection of the objective functions, defined constraints and real-time execution, which is extremely important because of the dynamics of the entire PT.

---

Further research will involve verification of the model using data from a real network scenario. It is also plan to take into consideration boarding and alighting times, transfer stations and scheduling several lines. Furthermore, it is plan to improve the existing multi-criteria optimization algorithm in favor of the stability of the algorithm by adjusting parameters of the proposed algorithm.

Based on the presented results, a multi-objective model solved by the proposed algorithm for determining an optimal timetable and vehicle schedule, with the proposed method for determining the preferred optimal solution from the set of optimal solutions, confirms the advantage over existing models in the scientific literature and it is appropriate for scientists and experts in the field of public transportation.

**Keywords::** operation research, mathematical model, multi-objective optimization, combinatorial optimization, heuristic methods, timetabling, vehicle scheduling, passenger waiting time.

---

# Životopis

Ivana Hartmann Tolić, rođena 4. travnja 1985. u Osijeku, diplomirala je 2010. na Odjelu za matematiku, Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku i stekla zvanje magistra edukacije matematike i informatike. Iste godine upisala je poslijediplomski doktorski studij Elektrotehnike, smjer komunikacije i informatika. Od 2011. godine izabrana je na Elektrotehničkom fakultetu Osijek u naslovno suradničko zvanje asistenta za znanstveno područje Prirodnih znanosti, znanstveno polje matematika. Radila je u više osnovnih i srednjih škola Osječko-baranjske županije te je položila stručni ispit za zanimanje učitelja matematike 2011. i time dokazala svoje nastavničke kompetencije. Od 2013. godine izabrana je za suradnika u suradničko zvanje asistenta na Zavodu za programsko inženjerstvo Fakulteta elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek. Sudjelovala je na Festivalima znanosti, Zimskim matematičkim školama i članica je Matematičkog kluba Osijek.

Tijekom studiranja na poslijediplomskom studiju boravila je na stranoj instituciji Katholieke Universiteit Leuven, Department of Mechanical Engineering/ Center for Industrial Management/Traffic and Infrastructure, Belgium.

Objavila je kao autor i koautor šest radova u znanstvenim časopisima, od toga pet radova u području tehničkih znanosti od čega jedan CC rad u časopisu A kategorije u trećem kvartilu, a objavila je i dva rada u zbornicima međunarodne znanstvene konferencije i jedan rad u zborniku domaće konferencije.

Trenutna su područja istraživanja operacijska istraživanja i kombinatorna optimizacija s primjenama u javnom prijevozu putnika.

# 1 Prilog: rezultati istraživanja numeričkog primjera 1

Prikaz rezultata za  $q = 4$  i  $r_{a \rightarrow b}$  prikazan je u poglavlju 5, i odgovara tablici 5.1

Tablica P.1: Rezultati numeričkog primjera 1 i usporedba s rezultatima Liu i Ceder [14] za

$r_{a \rightarrow b}, q=5$

$d_o = 70$	Vrijeme polaska	$Z_{av,norm}$	Broj putnika koji su ostali na stanici	Vrijeme čekanja	Količina PWT po stanicama i servisima Jednadžba (3.14)
Predložena metoda	[7:12,	0.126	230 152 8	12 11 11	4239.73 2711.84 342.62
	7:24,		460 304 16	11 10 10	6416.42 4157.85 402.07
	7:35,		690 456 24	8 7 7	6506.49 4239.89 356.41
	7:43,		920 608 32	6 5 5	6259.86 4091.92 315.31
	7:49]		1150 760 40	72 71 71	91678.38 60047.03 4359.73
Rezultati prema [14]	[7:12,	0.141	230 152 8	12 11 11	4560 2904 396
	7:24,		460 304 16	12 11 11	7320 4728 492
	7:36,		690 456 24	12 11 11	10080 6552 588
	7:48,		920 608 32	12 11 11	12840 8376 684
	8:00]		1150 760 40	72 71 71	93600 61200 4680

Tablica P.2: Rezultati numeričkog primjera 1 i usporedba s rezultatima Liu i Ceder [14] za  $r_{a \rightarrow b}$ ,  $q=6$

$d_o = 70$	Vrijeme polaska	$Z_{av,norm}$	Broj putnika koji su ostali na stanici	Vrijeme čekanja	Količina PWT po stanicama i servisima Jednadžba (3.14)
Predložena metoda	[7:10,	0.114	230 152 8	10 9 9	3635.37 2321.22 302.56
	7:20,		460 304 16	10 9 9	5935.37 3841.22 382.56
	7:30,		690 456 24	10 9 9	8235.37 5361.22 462.56
	7:40,		920 608 32	7 6 6	7374.76 4816.85 379.79
	7:47,		1150 760 40	4 3 3	5134.15 3360.49 249.02
	7:51]		1380 912 48	60 59 59	90812.20 59527.32 4215.37
Rezultati prema [14]	[7:10,	0.127	230 152 8	10 9 9	3800 2420 330
	7:20,		460 304 16	10 9 9	6100 3940 410
	7:30,		690 456 24	10 9 9	8400 5460 490
	7:40,		920 608 32	10 9 9	10700 6980 570
	7:50,		1150 760 40	10 9 9	13000 8500 650
	8:00]		1380 912 48	60 59 59	91800 60120 4380

Tablica P.3: Rezultati numeričkog primjera 1 i usporedba s rezultatima Liu i Ceder [14] za  $r_{b \rightarrow a}$ ,  $q=4$

$d_o = 70$	Vrijeme polaska	$Z_{av,norm}$	Broj putnika koji su ostali na stanici	Vrijeme čekanja	Količina PWT po stanicama i servisima Jednadžba (3.14)
Predložena metoda	[7:15,	0.169	190 178 21	13 12 12	3680.26 3291.52 552.29
	7:28,		380 355 41	10 9 9	4730.97 4301.94 624.84
	7:38,		570 533 62	8 7 7	5304.77 4865.55 667.87
	7:46]		760 711 83	90 89 89	76778.71 70757.42 9403.55
Rezultati prema [14]	[7:15,	0.192	190 178 21	15 14 14	4800 4245 765
	7:30,		380 355 41	15 14 14	7650 6900 1065
	7:45,		570 533 62	15 14 14	10500 9570 1380
	8:00]		760 711 83	90 89 89	80100 73440 10170



Tablica P.4: Rezultati numeričkog primjera 1 i usporedba s rezultatima Liu i Ceder [14] za  $r_{b \rightarrow a}$ ,  $q=5$

$d_o = 70$	Vrijeme polaska	$Z_{av,norm}$	Broj putnika koji su ostali na stanici	Vrijeme čekanja	Količina PWT po stanicama i servisima Jednadžba (3.14)
Predložena metoda	[7:12,	0.150	190 178 21	12 11 11	3562.43 3171.81 547.95
	7:24,		380 355 41	11 10 10	5355.56 4854.49 722.28
	7:35,		570 533 62	8 7 7	5414.95 4954.54 693.30
	7:43,		760 711 83	6 5 5	5201.22 4783.91 645.97
	7:49]		950 888 103	72 71 71	76094.59 70150.86 9191.68
Rezultati prema [14]	[7:12,	0.168	190 178 21	12 11 11	3840 3396 612
	7:24,		380 355 41	12 11 11	6120 5520 852
	7:36,		570 533 62	12 11 11	8400 7656 1104
	7:48,		760 711 83	12 11 11	10680 9792 1356
	8:00]		950 888 103	72 71 71	77760 71496 9576

## 2 Prilog: rezultati istraživanja numeričkog primjera 2

Prikaz rezultata za  $q = 4$  i  $r_{a \rightarrow b}$  prikazan je u poglavlju 5, i odgovara tablici (5.2).

Tablica P.6: Rezultati numeričkog primjera 2 za  $r_{a \rightarrow b}$ ,  $q=5$

Vrijeme polaska	[7:12, 7:21, 7:31, 7:41, 7:49]
$d_o$	[70, 490, 350, 70, 490]

$1 - \eta_{av,norm}$	Iskoristivost vozila	Broj slobodnih mjesta	Broj putnika koji su ostali na stanici	$Z_{av,norm}$	Vrijeme čekanja	Količina PWT po stanicama i servisima
0.097	1 1 1	0 0 0	230 152 8	0.038	9 8 8	3118.99 1997.39 246.83
	1 1 0.52	0 0 236	40 136 0		10 9 0	1565.54 2059.32 194.26
	0.97 1 0.54	10 0 160	0 170 0		0 9 0	1165.54 2399.32 194.26
	1 1 1	0 0 0	230 322 8		8 7 7	2772.43 3135.46 219.41
	1 1 0.52	0 0 237	40 306 0		72 71 0	11271.89 27067.14 1398.65

Tablica P.7: Rezultati numeričkog primjera 2 za  $r_{a \rightarrow b}$ ,  $q=6$

Vrijeme polaska	[7:10, 7:18, 7:29, 7:37, 7:45, 7:51]
$d_o$	[70, 490, 140, 490, 70, 490]

$1 - \eta_{av,norm}$	Iskoristivost vozila	Broj slobodnih mjesta	Broj putnika koji su ostali na stanici	$Z_{av,norm}$	Vrijeme čekanja	Količina PWT po stanicama i servisima
0.095	1 1 1	0 0 0	230 152 8	0.035	8 7 7	2861.46 1828.88 234.24
	1 1 0.52	0 0 236	40 136 0		11 10 0	1844.51 2338.71 234.09
	1 1 0.76	0 0 34	200 260 0		8 7 0	2621.46 2692.88 170.24
	1 1 0.50	0 0 244	10 244 0		8 7 0	1101.46 2564.88 170.24
	1 1 1	0 0 0	240 396 8		6 5 5	2206.10 2835.66 175.68
	1 1 0.52	0 0 236	50 380 0		60 59 0	10660.98 27396.59 1276.83

Tablica P.8: Rezultati numeričkog primjera 2 za  $r_{a \rightarrow b}$ ,  $q=4$ 

Vrijeme polaska	[7:15, 7:25, 7:37, 7:46]
$d_o$	[70, 490, 70, 490]

$1 - \eta_{av,norm}$	Iskoristivost vozila	Broj slobodnih mjesta	Broj putnika koji su ostali na stanici	$Z_{av,norm}$	Vrijeme čekanja	Količina PWT po stanicama i servisima
0.066	1 1 1	0 0 0	190 178 21	0.060	10 9 9	2808.60 2513.87 419.68
	1 1 0.63	0 0 154	30 194 0		12 11 0	1450.32 3208.65 251.61
	1 1 1	0 0 0	220 371 20		9 8 8	2797.74 3999.48 368.71
	0.98 1 0.6	10 0 196	0 350 0		0 89 0	8177.42 38104.84 1887.10

Tablica P.9: Rezultati numeričkog primjera 2 za  $r_{b \rightarrow a}$ ,  $q=5$ 

Vrijeme polaska	[7:12, 7:22, 7:34 7:42, 7:49]
$d_o$	[70, 490, 70, 210, 490]

$1 - \eta_{av,norm}$	Iskoristivost vozila	Broj slobodnih mjesta	Broj putnika koji su ostali na stanici	$Z_{av,norm}$	Vrijeme čekanja	Količina PWT po stanicama i servisima
0.074	1 1 1	0 0 0	190 178 21	0.053	10 9 9	2945.27 2624.26 451.22
	0.92 1 0.59	40 0 200	0 140 0		0 11 0	1254.32 2693.11 289.46
	1 1 1	0 0 0	190 318 21		8 7 7	2356.22 3219.41 360.97
	1 1 0.82	0 0 37	240 431 0		7 6 0	2411.69 3607.98 168.85
	1 1 0.56	0 0 214	10 415 0		72 71 0	8245.95 35958.65 1736.76

### 3 Prilog: rezultati istraživanja numeričkog primjera 3

Prikaz rezultata za  $q = 4$  i  $r_{a \rightarrow b}$  prikazan je u poglavlju 5, i odgovara tablici 5.4

Tablica P.10: Rezultati trećeg numeričkog primjera i usporedba s rezultatima Liu i Ceder [14] za  $r_{a \rightarrow b}$ ,  $q=5$

	Vrijeme polaska	$d_o$	$Z_{av,norm}$	Broj putnika koji su ostali na stanici	Vrijeme čekanja	Količina PWT po stanicama i servisima Jednadžba (3.14)
Predložena metoda	[7:12,	70	0.039	230 152 8	12 11 11	4239.73 2711.84 342.62
	7:24,	490		40 136 0	11 10 0	1796.42 2309.85 226.07
	7:35,	350		0 170 0	0 7 0	986.49 1951.89 164.41
	7:43,	70		230 322 8	6 5 5	2119.86 2375.92 171.31
	7:49 ]	490		40 306 0	72 71 0	11758.38 27359.03 1479.73
Rezultati prema [14]	[7:12,	70	0.046	230 152 8	12 11 11	4560 2904 396
	7:24,	490		40 136 0	12 11 0	2280 2712 300
	7:36,	350		0 170 0	0 11 0	1800 3120 300
	7:48	70		230 322 8	12 11 11	4560 4944 396
	8:00]	490		40 306 0	72 71 0	13680 28512 1800

Tablica P.11: Rezultati trećeg numeričkog primjera i usporedba s rezultatima Liu i Ceder [14] za  $r_{a \rightarrow b}$ ,  $q=6$

	Vrijeme polaska	$d_o$	$Z_{av,norm}$	Broj putnika koji su ostali na stanici	Vrijeme čekanja	Količina PWT po stanicama i servisima Jednadžba (3.14)
Predložena metoda	[7:10,	70	0.036	230 152 8	10 9 9	3635.37 2321.22 302.56
	7:20,	490		40 136 0	10 9 0	1735.37 2161.22 222.56
	7:30,	140		200 260 0	10 9 0	3335.37 3401.22 222.56
	7:40,	490		10 244 0	7 6 0	1004.76 2268.85 155.79
	7:47,	70		240 396 8	4 3 3	1494.15 1904.49 121.02
	7:51 ]	490		50 380 0	60 59 0	11012.20 27607.32 1335.37
Rezultati prema [14]	[7:10,	70	0.041	230 152 8	10 9 9	3800 2420 330
	7:20,	490		40 136 0	10 9 0	1900 2260 250
	7:30,	140		200 260 0	10 9 0	3500 3500 250
	7:40,	490		10 244 0	10 9 0	1600 3340 250
	7:50,	70		240 396 8	10 9 9	3900 4860 330
	8:00]	490		50 380 0	60 59 0	12000 28200 1500

Tablica P.12: Rezultati trećeg numeričkog primjera i usporedba s rezultatima Liu i Ceder [14] za  $r_{b \rightarrow a}$ ,  $q=4$

	Vrijeme polaska	$d_o$	$Z_{av,norm}$	Broj putnika koji su ostali na stanici	Vrijeme čekanja	Količina PWT po stanicama i servisima Jednadžba (3.14)
Predložena metoda	[7:15,	70	0.061	190 178 21	13 12 12	3680.26 3291.52 552.29
	7:28,	420		30 194 0	10 9 0	1230.97 2691.94 214.84
	7:38,	70		220 371 20	8 7 7	2504.77 3569.55 331.87
	7:46]	490		0 350 0	0 89 0	8378.71 38267.42 1933.55
Rezultati prema [14]	[7:15,	70	0.078	190 178 21	15 14 14	4800 4245 765
	7:30,	420		30 194 0	15 14 0	2400 4485 450
	7:45,	70		220 371 20	15 14 14	5250 7140 750
	8:00]	490		0 350 0	0 89 0	11700 40950 2700

Tablica P.13: Rezultati trećeg numeričkog primjera i usporedba s rezultatima Liu i Ceder [14] za  $r_{b \rightarrow a}$ ,  $q=5$

	Vrijeme polaska	$d_o$	$Z_{av,norm}$	Broj putnika koji su ostali na stanici	Vrijeme čekanja	Količina PWT po stanicama i servisima Jednadžba (3.14)
Predložena metoda	[7:12,	70	0.061	190 178 21	12 11 11	3562.43 3171.81 547.95
	7:24,	140		310 323 3	11 10 10	4585.56 4502.49 304.28
	7:35,	490		80 306 0	8 7 0	1494.95 3138.54 197.30
	7:43,	70		270 484 21	6 5 5	2261.22 3421.91 273.97
	7:49 ]	490		40 469 0	72 71 0	10574.59 39982.86 1775.68
Rezultati prema [14]	[7:12,	70	0.073	190 178 21	12 11 11	3840 3396 612
	7:24,	140		310 323 3	12 11 11	5280 5136 396
	7:36,	490		80 306 0	12 11 0	2520 4932 360
	7:48	70		270 484 21	12 11 11	4800 7068 612
	8:00]	490		40 469 0	72 71 0	12240 41328 2160

## 4 Prilog: rezultati detaljnog prikaza rješenja određivanja optimalnog rješenja različitim metodama

Tablica P.14: Detaljan prikaz preferiranog optimalnog rješenja za  $q = 4$ ,  $r_{a \rightarrow b}$

	Iskoristivost vozila			Broj slobodnih sjedala			Broj putnika koji su ostali na stanici			Vrijeme čekanja		
	Predložena metoda	1	1	1	0	0	0	230	152	8	10	9
	1	1	0.52	0	0	236	40	136	0	12	11	0
TOPSIS	1	1	1	0	0	0	270	288	8	9	8	8
	1	1	0.52	0	0	236	80	272	0	90	89	0
GRA	1	1	1	0	0	0	230	152	8	9	8	8
	1	1	0.52	0	0	236	40	136	0	10	9	0
	0.69	1	0.48	150	0	254	0	30	0	0	11	0
	0.86	1	0.53	50	0	163	0	40	0	0	89	0

Tablica P.15: Detaljan prikaz preferiranog optimalnog rješenja za  $q = 5$ ,  $r_{a \rightarrow b}$

	Iskoristivost vozila			Broj slobodnih sjedala			Broj putnika koji su ostali na stanici			Vrijeme čekanja		
	Predložena metoda	1	1	1	0	0	0	230	152	8	9	8
	1	1	0.52	0	0	236	40	136	0	11	10	0
	1	1	1	0	0	0	270	288	8	8	7	7
TOPSIS	1	1	0.52	0	0	236	80	272	0	9	8	0
	1	1	0.54	0	0	160	30	312	0	72	71	0
GRA	1	1	0.64	0	0	76	90	96	0	9	8	0
	0.80	1	0.49	100	0	251	0	20	0	0	10	0
	1	1	1	0	0	0	230	172	8	8	7	7
	1	1	0.52	0	0	236	40	156	0	9	8	0
	0.69	1	0.48	150	0	254	0	50	0	0	71	0

Tablica P.16: Detaljan prikaz preferiranog optimalnog rješenja za  $q = 4$ ,  $r_{b \rightarrow a}$ 

	Iskoristivost vozila			Broj slobodnih sjedala			Broj putnika koji su ostali na stanici			Vrijeme čekanja		
Predložena metoda	1	1	1	0	0	0	230	152	8	10	9	9
	1	1	0.52	0	0	236	40	136	0	12	11	0
TOPSIS	1	1	1	0	0	0	270	288	8	9	8	8
	1	1	0.52	0	0	236	80	272	0	90	89	0
GRA	1	1	1	0	0	0	230	152	8	9	8	8
	1	1	0.52	0	0	236	40	136	0	10	9	0
	0.69	1	0.48	150	0	254	0	30	0	0	11	0
	0.86	1	0.53	50	0	163	0	40	0	0	89	0

Tablica P.17: Detaljan prikaz preferiranog optimalnog rješenja za  $q = 5$ ,  $r_{b \rightarrow a}$ 

	Iskoristivost vozila			Broj slobodnih sjedala			Broj putnika koji su ostali na stanici			Vrijeme čekanja		
Predložena metoda	1	1	1	0	0	0	230	152	8	9	8	8
	1	1	0.52	0	0	236	40	136	0	10	9	0
	0.97	1	0.54	10	0	160	0	170	0	0	9	0
TOPSIS	1	1	1	0	0	0	230	322	8	8	7	7
	1	1	0.56	0	0	217	0	310	0	0	71	0
GRA	1	1	1	0	0	0	230	152	8	8	7	7
	1	1	0.52	0	0	236	40	136	0	10	9	0
	0.69	1	0.48	150	0	254	0	30	0	0	10	0
	1	1	1	0	0	0	230	182	8	8	7	7
	1	1	0.55	0	0	219	0	170	0	0	71	0



## 5 Prilog: rezultati detaljnog prikaza rješenja određivanja optimalnog rješenja različitim metodama

Tablica P.18: Evaluacija preferiranog optimalnog rješenja i usporedba s metodama za određivanje preferiranog optimalnog rješenja za  $r_{a \rightarrow b}$ ,  $q = 4$

	Relativno preopterećenje Jednadžba (4.41)			Prosječno relativno preopterećenje Jednadžba (4.40)	<i>RLOS</i> Jednadžba (4.43)			Prosječan RLOS Jednadžba (4.44)	Prosječno vrijeme čekanja Jednadžba (3.11)	Omjer vremenskog odstupanja Jednadžba (4.47)
Predložena metoda	3.29	2.17	0.11	1.23	4.29	3.17	1.11	2.15	5.24	50.73
	0.08	0.28	0		1.08	1.28	0.52			
	3.86	4.11	0.11		4.86	5.11	1.11			
	0.16	0.56	0.00		1.16	1.56	0.52			
TOPSIS	3.29	2.17	0.11	0.92	4.29	3.17	1.11	2.39	5.24	50.73
	3.86	4.11	0.11		4.86	5.11	1.11			
	0.16	0.56	0.00		1.16	1.56	0.52			
GRA	0	0.03	0	0.52	0.86	1.03	0.53	1.36	5.24	50.73
	3.29	2.31	0.11		4.29	3.31	1.11			
	0.08	0.30	0		1.08	1.30	0.52			
	0	0.08	0		0.69	1.08	0.48			

Tablica P.19: Evaluacija preferiranog optimalnog rješenja i usporedba s metodama za određivanje preferiranog optimalnog rješenja za  $r_{a \rightarrow b}$ ,  $q = 5$

	Relativno preopterećenje Jednadžba (4.41)			Prosječno relativno preopterećenje Jednadžba (4.40)	<i>RLOS</i> Jednadžba (4.43)			Prosječan RLOS Jednadžba (4.44)	Prosječno vrijeme čekanja Jednadžba (3.11)	Omjer vremenskog odstupanja Jednadžba (4.47)
Predložena metoda	3.29	2.17	0.11	1.01	4.29	3.17	1.11	1.91	4.66	50.40
	0.08	0.28	0		1.08	1.28	0.52			
	0	0.49	0		0.97	1.49	0.54			
	3.29	4.60	0.11		4.29	5.60	1.11			
	0.08	0.62	0		1.08	1.62	0.52			
TOPSIS	3.29	2.17	0.11	1.69	4.29	3.17	1.11	2.62	4.69	50.69
	0.08	0.28	0		1.08	1.28	0.52			
	3.86	4.11	0.11		4.86	5.11	1.11			
	0.16	0.56	0		1.16	1.56	0.52			
	4.43	6.06	0.11		5.43	7.06	1.11			
GRA	0.43	0.46	0	0.49	1.43	1.46	0.64	1.33	4.66	50.40
	0	0.04	0		0.80	1.04	0.49			
	3.29	2.46	0.11		4.29	3.46	1.11			
	0.08	0.32	0		1.08	1.32	0.52			
	0	0.10	0		0.69	1.10	0.48			

Tablica P.20: Evaluacija preferiranog optimalnog rješenja i usporedba s metodama za određivanje preferiranog optimalnog rješenja za  $r_{b \rightarrow a}$ ,  $q = 4$

	Relativno preopterećenje Jednadžba (4.41)			Prosječno relativno preopterećenje Jednadžba (4.40)	<i>RLOS</i> Jednadžba (4.43)			Prosječan RLOS Jednadžba (4.44)	Prosječno vrijeme čekanja Jednadžba (3.11)	Omjer vremenskog odstupanja Jednadžba (4.47)
Predložena metoda	2.71	2.54	0.30	1.29	3.71	3.54	1.30	2.23	5.24	50.73
	0.07	0.46	0		1.07	1.46	0.63			
	3.14	5.30	0.29		4.14	6.30	1.29			
	0	0.71	0		0.98	1.71	0.60			
TOPSIS	2.71	2.54	0.30	1.29	3.71	3.54	1.30	2.23	5.24	50.73
	0.07	0.46	0		1.07	1.46	0.63			
	3.14	5.30	0.29		4.14	6.30	1.29			
	0	0.71	0		0.98	1.71	0.60			
GRA	0	0.03	0	0.52	0.86	1.03	0.53	1.36	5.24	50.73
	3.29	2.31	0.11		4.29	3.31	1.11			
	0.08	0.30	0		1.08	1.30	0.52			
	0	0.08	0		0.69	1.08	0.48			

Tablica P.21: Evaluacija preferiranog optimalnog rješenja i usporedba s metodama za određivanje preferiranog optimalnog rješenja za  $r_{b \rightarrow a}$ ,  $q = 5$

	Relativno preopterećenje Jednadžba (4.41)			Prosječno relativno preopterećenje Jednadžba (4.40)	<i>RLOS</i> Jednadžba (4.43)			Prosječan RLOS Jednadžba (4.44)	Prosječno vrijeme čekanja Jednadžba (3.11)	Omjer vremenskog odstupanja Jednadžba (4.47)
Predložena metoda	2.71	2.54	0.30	1.16	3.71	3.54	1.30	2.09	4.82	52.15
	0	0.29	0		0.92	1.29	0.59			
	2.71	4.54	0.30		3.71	5.54	1.30			
	1.14	2.05	0		2.14	3.05	0.82			
	0.02	0.85	0		1.02	1.85	0.56			
TOPSIS	2.71	2.54	0.30	1.53	3.71	3.54	1.30	2.48	4.66	50.40
	2.21	2.31	0.02		3.21	3.31	1.02			
	0.16	0.62	0		1.16	1.62	0.57			
	3.86	6.91	0.30		4.86	7.91	1.30			
	0.08	0.96	0		1.08	1.96	0.60			
GRA	2.71	2.54	0.30	1.53	3.71	3.54	1.30	2.48	4.66	50.40
	2.21	2.31	0.02		3.21	3.31	1.02			
	0.16	0.62	0		1.16	1.62	0.57			
	3.86	6.91	0.30		4.86	7.91	1.30			
	0.08	0.96	0		1.08	1.96	0.60			