SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA

Diplomski studij

DESKTOP APLIKACIJA ZA RJEŠAVANJE ODREĐENIH INTEGRALA I IZRAČUNA DERIVACIJE FUNKCIJE METODAMA NUMERIČKE MATEMATIKE

Diplomski rad

Mateo Miličić

Osijek, 2018.

Predgovor

Zahvaljujem se svojem mentoru doc.dr.sc. Alfonzu Baumgartner na savjetima, strpljenju i pomoći prilikom pisanja ovog rada. Također, ovim putem želio bih se zahvaliti svim profesorima i kolegama sa Elektrotehničkog fakulteta te svima koji su na bilo koji način bili dijelom mojeg visokoškolskog obrazovanja. Posebno bih se zahvalio obitelji i prijateljima na savjetima, strpljenju te pružanju nemjerljive podrške.

Sadržaj

1. UVOD

Nakon pojave prvog programabilnog računala za vrijeme Drugog svjetskog rata, kada su Englezi stvorili Colossus[1], postupnim poboljšanjem tehnologije proizvodnje te minijaturizacije, krajem 20. stoljeća, računala su postala sve dostupnija i nezaobilaznim dijelom današnje civilizacije. Razvoj znanosti i tehnike, posebice računalne tehnike, za vrijeme i nakon drugog svjetskog rata, uvjetovao je i brzi razvoj numeričke matematike, koja omogućuje rješavanje veoma kompleksnih matematičkih problema uz pomoć računala mnogo brže i jednostavnije, a u nekim slučajevima i točnije od klasičnih matematičkih metoda. Ključ ove teze leži u sposobnosti računala da u realnom vremenu obavi veliki broj računskih operacija. Sve ove činjenice daju metodama numeričke matematike ogromnu prednost u odnosu na klasično rješavanje matematičkih problema. Tako je numerička matematika imala značajan utjecaj u razvoju novih tehnologija, gospodarstva i razvoju nauke uopće. Glavni zadatak numeričke matematike je oblikovanje i analiza algoritama te izgradnja softvera, koji omogućuju korisnicima brzo rješavanje problema sa odgovarajućom točnošću.

Zadatak ovog diplomskog rada je realizirati jednostavnu aplikaciju za rješavanje integrala i derivacija funkcije pomoću različitih numeričkih metoda za rješavanje istih.

Glavni dio rada podijeljen je u četiri cjeline. U prvoj cjelini razrađen je problem integracije funkcije, prikazan je numerički pristup rješavanju integrala te ukratko opisane najčešće numeričke metode za aproksimaciju integracije funkcije. U drugoj cjelini sažeta je kratka teorijska osnova derivacije funkcije te numeričkih metoda za derivaciju funkcije.

U trećoj cjelini prikazane su mogućnosti aplikacije te kratke upute za korištenje, sa ponekim primjerima.Četvrta cjelina sadrži prikaz, usporedbu, kao i analizu rezultata putem grafova različitih numeričkih metoda te je napravljena usporedba rezultata sa teorijskim tvrdnjama. U zaključku se apsolvira uspješnost i moguća poboljšanja i dorade do tada urađene aplikacije.

1.1 Zadatak diplomskog rada

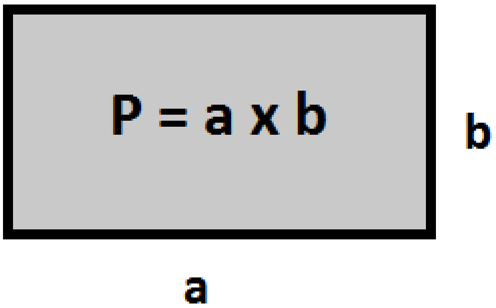
Korištenjem kvadratne, trapezne i Simpsonove metode na više različitih primjera funkcije napraviti numeričku integraciju. Na isitm tim funkcijama potrebno je napraviti i numeričku derivaciju.

[1] prvo programabilno računalo koje je korišteno za dešifririranje njemačke Enigme, stroja koji je kodirao njemačke vojne i diplomatske poruke

2. ODREĐENI INTEGRALI

2.1 Problem određivanja površine

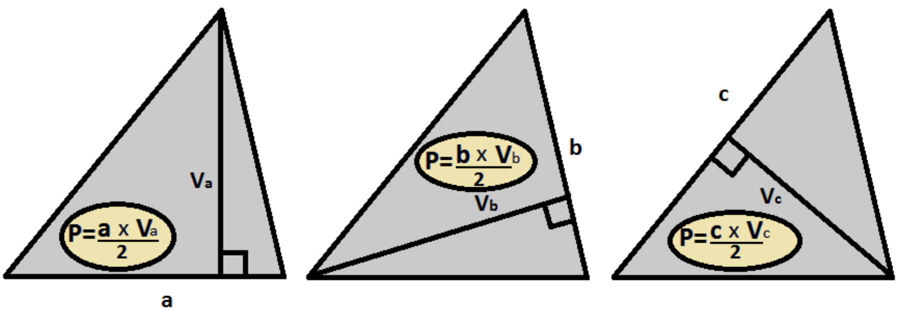
Još od najstarijih vremena, u samim začecima matematike, pojavio se problem računanja površine. Matematičari su lako riješili problem računanja površine pravokutnika produktom njegovih stranica, odnosno formulom $P = a \times b$. (2-1)



Sl. 2.1 *Površina pravokutnika*

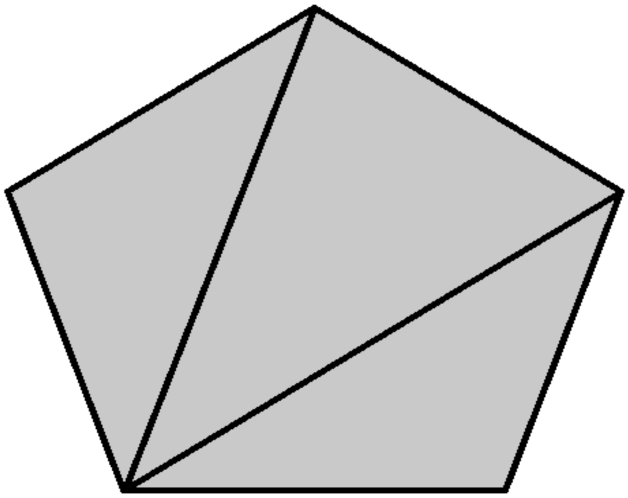
Za izračunavanje površine trokuta dovoljno je znati duljinu jedne stranice trokuta i duljinu visine na tu stranicu. Za površinu trokuta vrijedi:

$$P_{\Delta} = \frac{a \times V_a}{2} = \frac{b \times V_b}{2} = \frac{c \times V_c}{2} \tag{2-2}$$



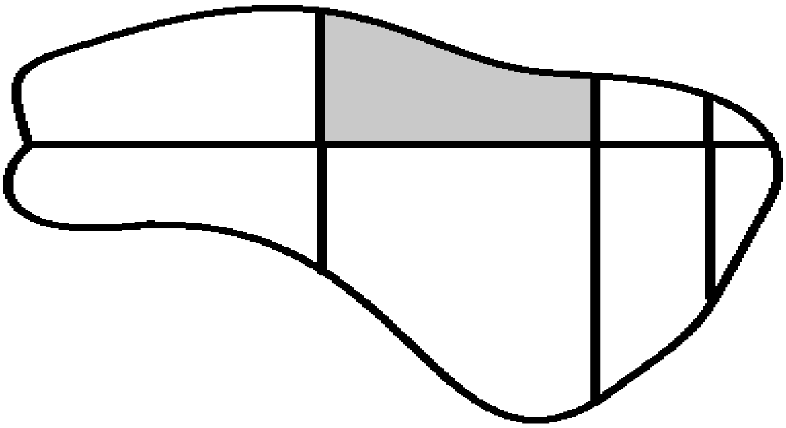
Sl 2.2 *Površina trokuta*

Površinu bilo kojeg mnogokuta moguće je izračunati podjelom tog mnogokuta na više trokuta.



Sl. 2.3 *Podjela mnogokuta na trokute*

Problem nastaje kada se želi odrediti površina nekog sasvim nepravilnog lika. Budući da je i računanje površine kruga u počecima matematike predstavljalo ozbiljan problem, uz činjenicu da je problem nepravilnog lika mnogo kompleksniji, to je pred matematičare toga doba izbacilo veliki zadatak. Matematičari su na razne načine pokušavali riješiti problem površine nepravilnog lika. Još je Arhimed u 3. tisućljeću prije Krista postavio temelje za rješavanje ovog problema[2]. Naime, on je pokušavajući izračunati površinu kruga, krugu upisivao i opisivao razne mnogokute. To je bilo zvijezda vodilja za matematičare modernijeg doba, koji su u 17. stoljeću problem riješili na način da su nepravilni lik, horizontalnim i vertikalnim cijepanjem, podijelili na više tzv. krivuljnih trapeza[3].



Sl 2.4 *Cijepanje nepravilnog ravninskog lika na krivuljne trapeze*

Time se problem izračunavanja površine nepravilnog lika sveo na problem određivanja površine krivuljnih trapeza ispod grafa neke funkcije.

[2] Arhimed je izračunao površinu kruga služeći se upisanim i opisanim pravilnim mnogokutima. Izračunao je da se površine zadanom krugu opisanog i upisanog 96-erokuta razlikuju samo za 0.0002. Služeći se modernom terminologijom to bi značilo da je Arhimed odredio sljedeće granice broju π: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$

[3] Krivuljni trapez je skup točaka ravnine koji je sa tri strane omeđen dužinama, a sa četvrte strane nekom krivuljom.

Površina krivuljnog trapeza

Zadatak je odrediti površinu krivuljnog trapeza ispod grafa neke funkcije f(x). Promatrajmo po volji odabranu funkciju f, pozitivnu i neprekinutu na intervalu [a,b]. Interval [a,b] najprije podijelimo na n mnoštvo malih dijelova i to na način da početak intervala (točka a) poprima vrijednost x_0 a krajnja točka (točka b) x_n:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \tag{2-3}$$

Nad svakom podsegmentu $[x_{i-1}, x_i]$ (gdje je $i = 1, \dots, n$) postavit ćemo dva pravokutnika. Jedan pravokutnik se upisuje ispod grafa funkcije, dok drugi pravokutnik premašuje graf funkcije. Širina pojedinog pravokutnika jednaka je širini pojedinog podintervala

$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ (2-4), dok su njihove visine:

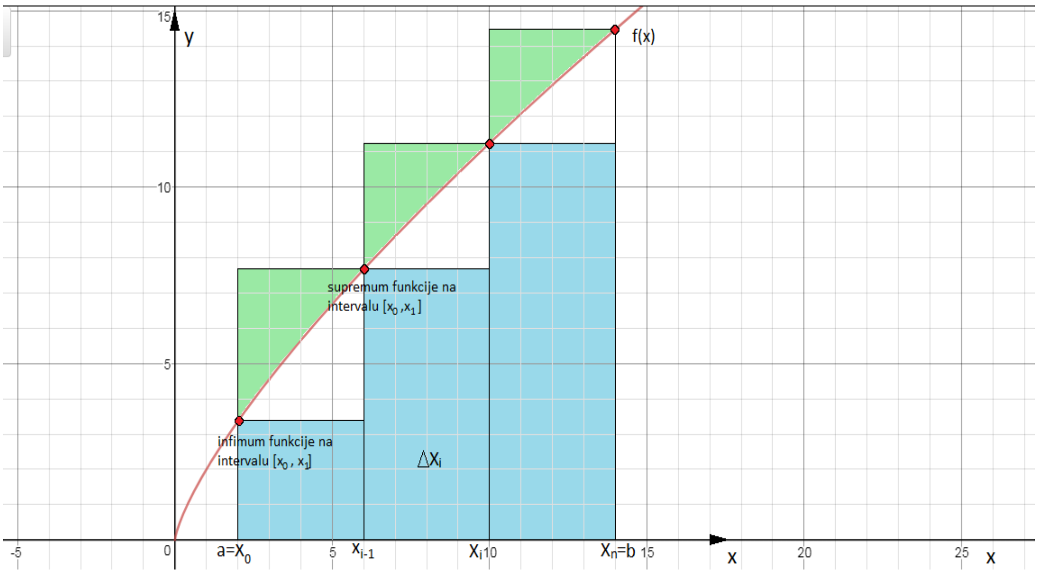
$$m_i = inf \times f(x), \qquad x \in [x_{i-1}, x_i] \tag{2-5}$$

$$M_k = sup \times f(x), \qquad x \in [x_{i-1}, x_i] \tag{2-6}$$

gdje je:

-m_i = infinum funkcije *f* na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$

-M_i = supremum funkcije *f* na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$



Sl 2.5 *Upisivanje i opisivanje pravokutnika*

Zbroj površina upisanih pravokutnika daje donju integralnu (Darbouxovu) sumu s_n :

$$s_n = R_1 + R_2 + \cdots R_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \qquad (2\text{-}7)$$

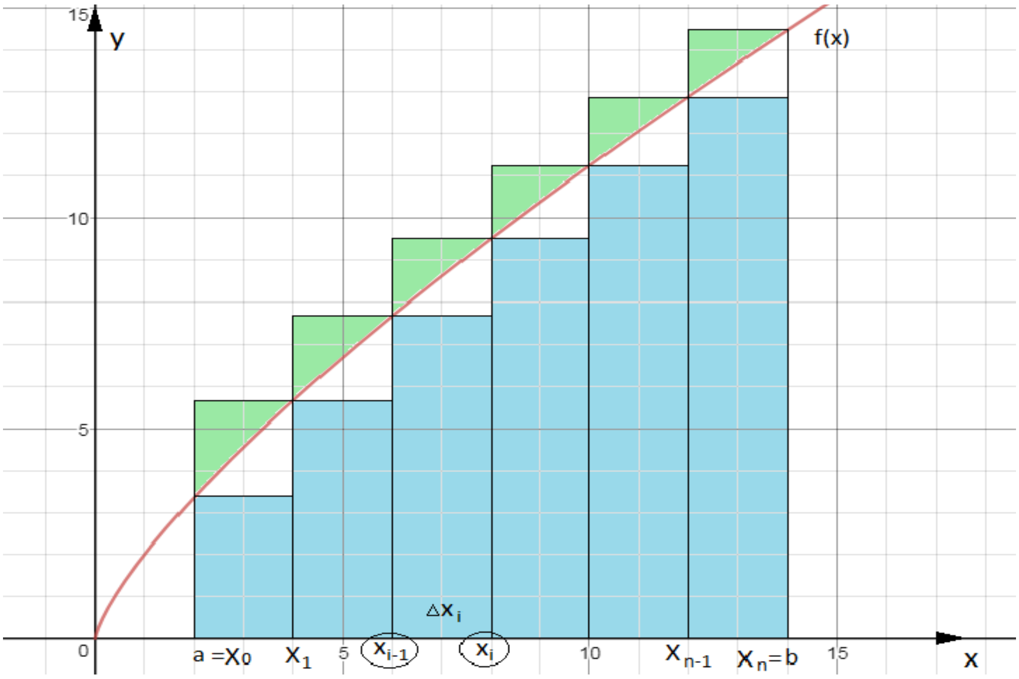
Zbroj površina opisanih pravokutnika daje gornju integralnu (Darbouxovu) sumu S_n :

$$S_n = R_1 + R_2 + \cdots R_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \cdots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \qquad (2\text{-}8)$$

Zbroj površina opisanih pravokutnika (gornja Darbouxova suma) uvijek je veći od površine upisanih pravokutnika (donje Darbouxove sume), za bilo koju raspodjelu segmenta, a vrijednost površine krivoctrnog trapeza P nalazi se između donje i gornje Darbouxove sume:

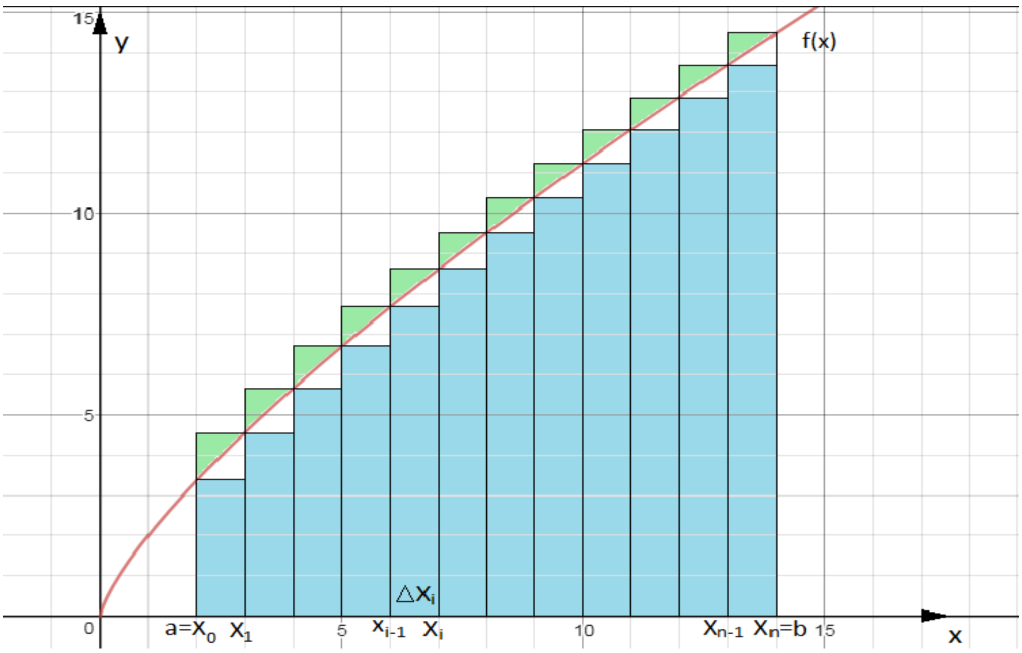
$$s_n < P < S_n \qquad (2\text{-}9)$$

Povećavanjem broja intervala, odnosno profinjenjem[4] razdiobe, donja integralna suma se povećava, dok se gornja smanjuje.



Sl. 2.6 *Profinjenje razdiobe(n=6)*

[4] Profinjenje razdiobe vrši se na način da se postojeći podsegmenti podijele na više manjih dijelova ne izuzevši ni jednu postojeću granicu.



Sl. 2.7 *Profinjenje razdiobe(n=12)*

Integrabilne sume postaju dobre procjene kada n teži u beskonačnost. Tada duljine pojedinih intervala podjele teže nuli. U graničnom slučaju gornja i donja integralna suma su jednake, odnosno imaju jednaki limes. Tada kažemo da je funkcija integrabilna na segmentu [a,b] i da postoji površina, a računanje površine svodi se na rješavanje sljedeće formule:

$$P = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} S_n \times \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} s_n \times \Delta x \qquad (2\text{-}10)$$

Ova metoda procjene površine nepravilnog lika se zove Darbouxova metoda i ona se nikad ne koristi kao numerička metoda jer ima vrlo sporu konvergenciju, a ponekad je i dosta teško odrediti supremum i infimum funkcije na određenom podsegmentu. Međutim, ova metoda je temelj definicije određenog integrala. Darbouxova metoda za računanje površine nepravilnog lika geometrijski gledano vrlo je jednostavna: podijeliti interval na podsegmente, odrediti visine, računati površine pravokutnika i pozbrajati, no matematički gledano, ovo je vrlo kompleksan postupak. Tu dolazimo do pojma određenog integrala, kojeg definiramo kao:

$$I = \int_a^b f(x)dx \qquad (2\text{-}11)$$

gdje je:- a-donja granica integrala

-b-gornja granica integrala

-f(x)-podintegralna funkcija te u ovoj formuli predstavlja visinu infinitezimalnog pravokutnika

-dx-širina intinitezimalnog pravokutnika

Znak integracije označava se sa ∫. Poanta uvođenja integrala je ta da je mnogo jednostavnije i brže doći do rješenja putem rješavanja integrala nego rješavanjem na prikazani način, jer ako vidimo pravila rješavanja integrala, sve što trebamo naći je primitivna funkcija postojeće funkcije te uvrstiti gornju i donju granicu. Ključ računanja površine putem integrala je mogućnost mnogo bržeg dolaska do rješenja.

Postavlja se pitanje mogu li se umjesto supremuma i infimuma promatrati neke druge vrijednosti za procjenu površine. Riemman se pitao je li svejedno na koji način odabiremo argumente, odnosno visine aproksimacijskih pravokutnika u podsegmentima. Konvergira li površina profinjenjem razdiobe nekom broju i u nekom drugom slučaju osim Darbouxovih suma? Tu dolazimo do Riemmanovog integrala.

2.2 Riemmanov integral

Riemman je postavio svoju tezu na veoma sličan način. Naime, on nije za visine pravokutnika uzimao minimume i maksimume, on je birao bilo koji argument u podsegmentu, ali koji bi na neki način bio određen i točno definiran kao na primjer: polovišta podsegmenata, vrijednosti funkcija u desnim krajevima, vrijednosti funkcija u lijevim krajevima, minimumi funkcija na podsegmentima, maksimumi funkcija na podsegmentima itd. Odabrani argument imao bi oznaku $x_i *$, pa bi površina i-tog pravokutnika izgledala kao:

$$R_i = f(x_i *) \times \Delta x \quad (2\text{-}12)$$

Aproksimacija područja ispod krivulje vršila bi se kao i kod Darbouxove metode, računanjem površine pravokutnika i zatim sumacijom svih površina:

$$A_n \approx R_1 + R_2 + \cdots R_n = f(x_1 *)\Delta x_1 + f(x_2 *)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n *)\Delta x_n \quad (2\text{-}13)$$

Ovu aproksimaciju zapisat ćemo kao:

$$A_n \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_n *) \times \Delta x_n \quad (2\text{-}14)$$

Kada n teži u beskonačnost, dobivamo sljedeće:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i *) \times \Delta x \quad (2\text{-}15)$$

Odnosno dolazimo do tzv. Riemmanovog integrala koji, prema definiciji, zapisujemo na sljedeći način:

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i *) \times \Delta x \ = \int_a^b f(x)dx \qquad (2\text{-}16)$$

Primjer 1: *Izračunaj prema definiciji* $\int_0^1 xdx$

Interval [0,1] rastavimo na n jednakih podintervala. Duljinu pojedinog intervala računamo prema (2-4): $\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$

Dobivamo sljedeće intervale:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \cdots, \left[\frac{n-2}{n}, \frac{n-1}{n}\right], \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

Uzmemo li za brojeve $x_i *$ desne krajeve podintervala, slijede vrijednosti funkcije

$f(x_i *) = x_i * = \frac{i}{n}$, $za\ i = 1, \cdots, n$

Prema (2-12) računamo n-ti djelomični zbroj

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i *) \times \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{i}{n} = \frac{i}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \ = \frac{i}{n^2}\ \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

te prema (2-15) graničnu vrijednost niza kada $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \ \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

Time dolazimo do rješenja

$$\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

Iz ovog primjera može se vidjeti da je računanje određenog integrala po definiciji vrlo kompleksno i sporo, kao što je već i ranije spomenuto. Tako će nam dobro doći formula koja uvelike skraćuje i pojednostavljuje proces računanja integrala, tzv. Newton-Leibnizova formula.

2.3 Newton-Leibnizova formula

Neka je funkcija f(x) neprekinuta na [a,b] i neka je F(x) bilo koja njena primitivna funkcija. Tada je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) + \mathrm{C} \qquad (2\text{-}17)$$

gdje C predstavlja proizvoljnu konstantu.

Po mnogima je ovo najvažnija znanstvena formula. Bez ove formule ni sam infinitezimalni račun ne bi bio ono što jest, središnji znanstveni račun. Pored Leibniza i Newtona za ovu su formulu znali još neki matematičari 17. stoljeća. Formula je veoma važna iz razloga što povezuje dva udaljena pojma. Na lijevoj strani formule je određeni integral $\int_a^b f(x)dx$, a na desnoj strani je samo razlika dviju vrijednosti primitivnih funkcija F(x) u granicama a i b F(b)-F(a). Uzmu li se u obzir mnogobrojne primjene određenog integrala, formula dobiva još veće značenje. Zbog ove formule je oznaka određenog integrala, uz ispuštanje granica, preuzeta i kao oznaka za skup primitivnih funkcija koji je prozvan neodređenim integralom.

Računanje određenog integrala

Budući da je integriranje veoma kompleksan postupak, razvijene su dvije metode koje pomažu kod integriranja, a to su:

- metode supstitucije
- metoda parcijalne integracije

Metodama se integral ne rješava, nego se zamjenjuje odgovarajućim jednostavnijim.

Također, pri računanju se koriste tablice primitivnih funkcija te dva važna svojstva integrala.

Svojstva integrala

Postoje dva svojstva integrala:

- homogenost: $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \quad , c = const;$ (2-18)
- linearnost: $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)dx$ (2-19)

Koristeći ova dva svojstva, funkciju je moguće rastaviti na više elementarnih dijelova te time znatno olakšati postupak integriranja.

Tab 2.1 Tablica integrala.

$y = f(x)$	$\int f(x)d$	$\cos x$	$\sin x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$arc\, tgx$	$-\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} arc\, ctg \frac{x}{a}$
$x^n, x \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	shx	chx	$-\frac{1}{1+x^2}$	$arc\, ctgx$	$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$arc\, sin \frac{x}{a}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	chx	shx	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arc\, sinx$	$-\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$arc\, cos \frac{x}{a}$
e^x	e^x	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arc\, cosx$	$a^x, 0 < a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\cot x$	$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} arc\, tg \frac{x}{a}$		

Primjer 2: *Izračunaj pomoću tablice i Newton-Leibnizove formule* $\int_0^1 xdx$

Određivanje primitivne funkcije F(x) :

F(X)=$\int xdx \ = \frac{x^2}{2} + C$

Računanje razlike F(1) - F(0), prema (2-17):

$$F(1) - F(0) = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} + C$$

Uspoređujući primjere 1 i 2, može se zaključiti da je računanje Newton-Leibnizovom formulom mnogo jednostavnije i brže u odnosu na računanje prema definiciji.

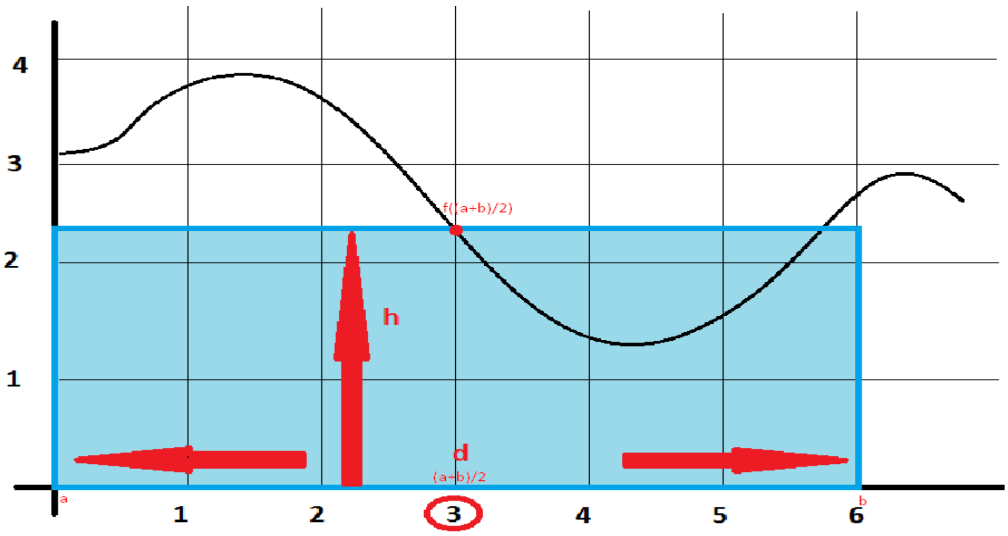
Iz ovog svega vidljivo je da je proces integriranja pomoću osnovnog teorema integrabilnog računa veoma kompleksan proces, koji često zahtijeva mnogo posla. Kada se tome pridoda činjenica da je ovim postupkom, za većinu funkcija i nemoguće naći primitivnu funkciju, rješavanje integrala numeričkim metodama pokazuje se kao moćan alat.

2.4 Numeričke metode za rješavanje određenih integrala

Osnovna ideja numeričkih metoda integracije određenih integrala je zamijeniti neki nepravilni oblik uz pomoć nekog jednostavnijeg oblika te izračunati površinu tog jednostavnijeg oblika. Postoje razne metode, koje se razlikuju po tome što površinu aproksimiraju drugačijim oblicima.

2.4.1 Kvadratno pravilo

Najjednostavnija numerička metoda za aproksimaciju površine koristi pravokutnik, čija je širina jednaka širini intervala $(b-a)$, a visina jednaka vrijednosti funkcije u središnjoj točki intervala $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.



Sl. 2.8 *Kvadratno pravilo*

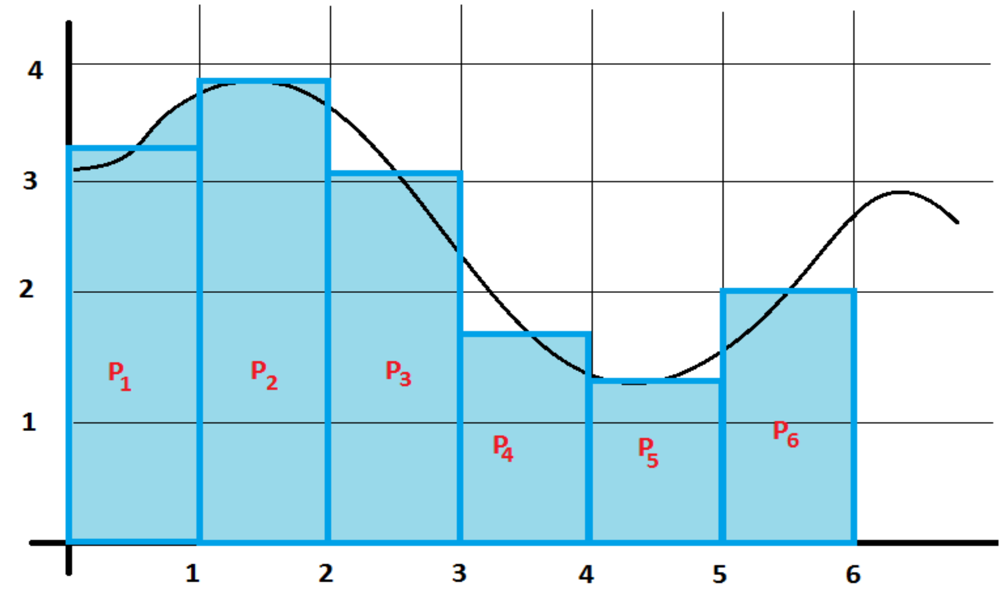
Ova metoda se naziva pravilom srednje točke ili kvadratnim pravilom. Na slici je vidljivo da je funkcija, kojom interpoliramo zadanu funkciju, konstanta, odnosno polinom nultog stupnja. Površina ovog pravokutnika računala bi se kao:

$$P \approx (b-a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{2-20}$$

Time dolazimo do formule kvadratnog pravila:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) \tag{2-21}$$

Primjećuje se da ovo ne bi bila dobra aproksimacija površine jer pravokutnik u ovom slučaju ne aproksimira dobro nepravilni oblik pa se pritom javlja velika pogreška. Nastala pogreška se može smanjiti tako što bi interval [a,b] podijelili na n jednakih dijelova, gdje je n bilo koji prirodni broj, konstruirali pravokutnike na svakom podintervalu pomoću istog pravila te računali površine manjih pravokutnika.

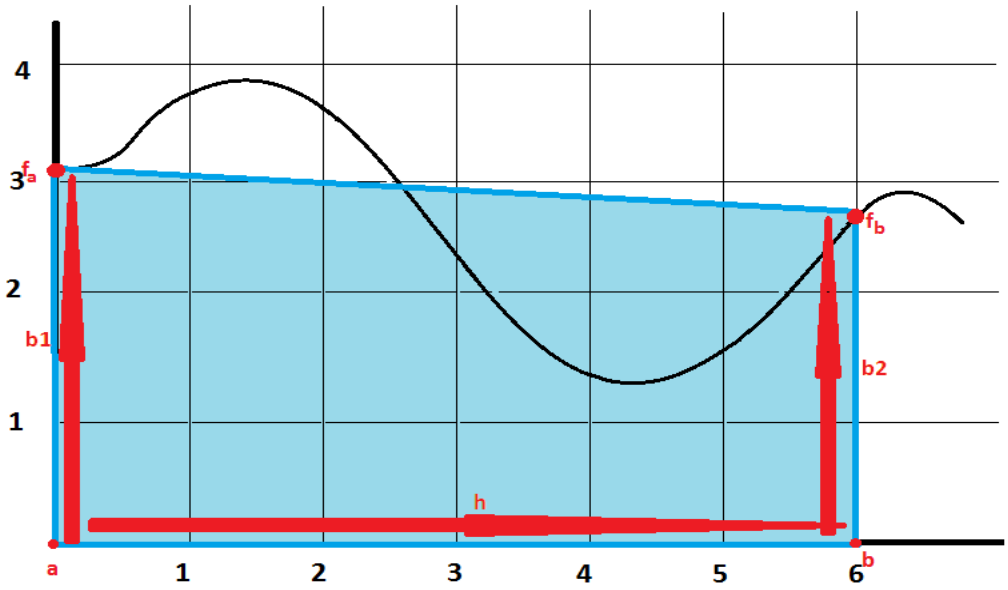


Sl. 2.9 *Povećanje broja pravokutnika*

Ukupna površina računala bi se kao zbroj svih površina pojedinih pravokutnika na danom segmentu. Povećanjem pravokutnika ukupna greška se smanjila. Da bi dobili približno točno rješenje, potrebno je još profiniti razdiobu, odnosno povećati broj pravokutnika. Iz toga se može zaključiti da kvadratno pravilo ima jako sporu konvergenciju ka rješenju. Nešto bržu konvergenciju ka rješenju ima tzv. trapezno pravilo.

2.4.2 Trapezno pravilo

Trapezno pravilo je numerička metoda aproksimacije određenog integrala koja, za razliku od kvadratnog pravila, umjesto pravokutnika, za aproksimaciju koristi trapeze.



Sl. 2.10 *Trapezno pravilo*

Površina se aproksimira tako što se graf funkcije zamijeni ravnom linijom koja je zadana sa vrijednošću funkcije u točki a i vrijednošću funkcije u točki b.

Dakle, potrebno je izračunati vrijednosti funkcije u točki a i b. Te vrijednosti će predstavljati osnovice trapeza. Visina trapeza jednaka je širini intervala, odnosno h=b-a. Površina tog trapeza bi iznosila

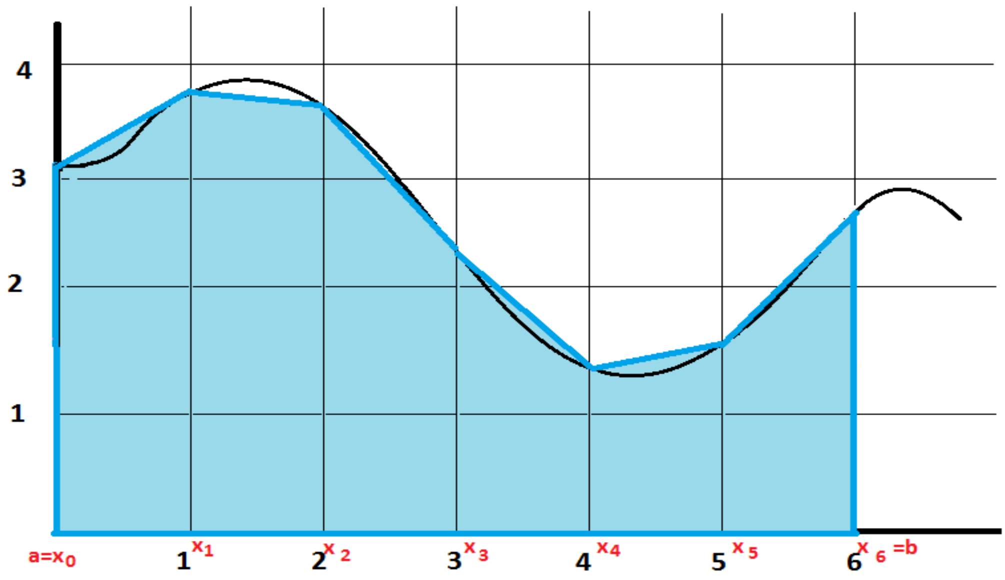
$$P_t = \frac{b_1+b_2}{2} \times h = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a), \tag{2-22}$$

pa bi tako trapezna formula za slučaj n=1 glasila:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(f(a)+f(b)) \tag{2-23}$$

-gdje h predstavlja širinu intervala.

Za veću točnost aproksimacije, interval je potrebno podijeliti podsegmente te na svakom od njih primijeniti ovu formulu.



Sl. 2.11 *Trapezno pravilo*

Kada na svaki od segmenata primijenimo ovu formulu, dobijamo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}[(f(a)+f(x_1)]+\frac{h}{2}[(f(x_1)+f(x_2)]+\cdots+\frac{h}{2}[(f(x_{n-1})+f(b)], \tag{2-24}$$

gdje je

- $h=\frac{b-a}{n}$ (2-25) - širina pojedinog podsegmenta

- $x_i = a + h \times i,$ (2-26)

odnosno:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\{f(a)+2[f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_{n-1})]+f(b)\}, \tag{2-27}$$

Ova formula se zove trapezna formula.

Primjer 3: *Izračunaj određeni integral* $\int_1^3 (2x^2 + 5x)dx$ *trapeznom formulom za n=4.*

Prema (2-25) računamo h:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{4} = 0.5$$

Prema (2-26) računamo x_i, te uvrštavajući x_i u zadanu funkciju dobijamo $f(x_i)$

Radi bolje preglednosti kreiramo tablicu vrijednosti:

Tab 2.2 *Vrijednosti funkcije u točkama*

I	x_i	$f(x_i)$
0	*1*	*7*
1	*1.5*	*12*
2	*2*	*18*
3	*2.5*	*25*
4	*3*	*33*

Uvrštavajući dobivene vrijednosti iz tablice u izraz (2-27), dobivamo konačno rješenje:

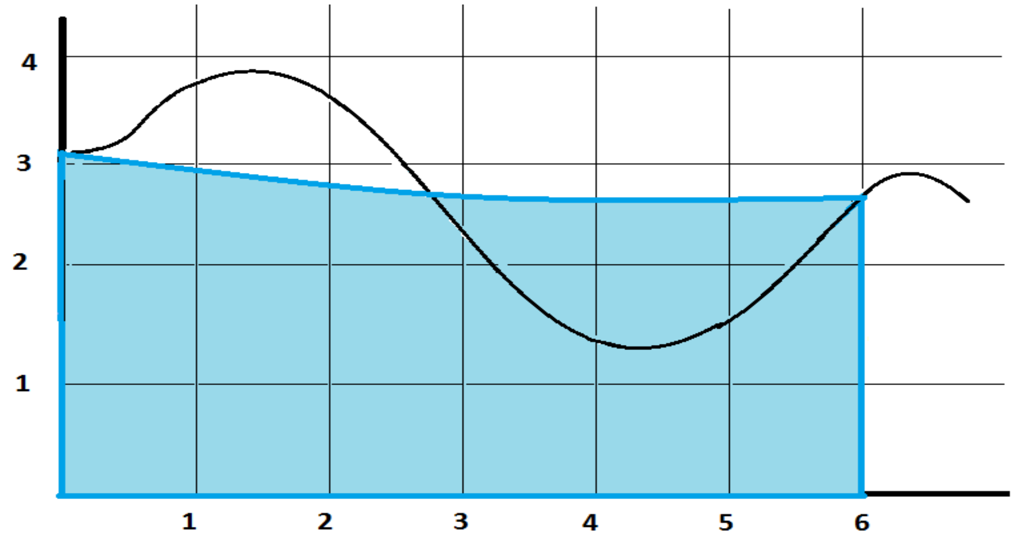
$$\int_1^3 (2x^2 + 5x)dx \approx \frac{0.5}{2}[7 + 2 \times (12 + 18 + 25) + 33] \approx 0.25 \times 150 \approx 37.5$$

Budući da je točno rješenje ovog integrala $37.3\dot{3}$, može se vidjeti da je trapezna formula već za n=4 zadovoljavajuće aproksimirala traženi integral.

Najbržu konvergenciju ka rješenju ima takozvana Simpsonova formula.

2.4.3 Simpsonovo pravilo

Simpsonovo pravilo za procjenu površine izvodi se na način da se podintegralna funkcija zamjenjuje polinomom drugog stupnja, odnosno parabolom.

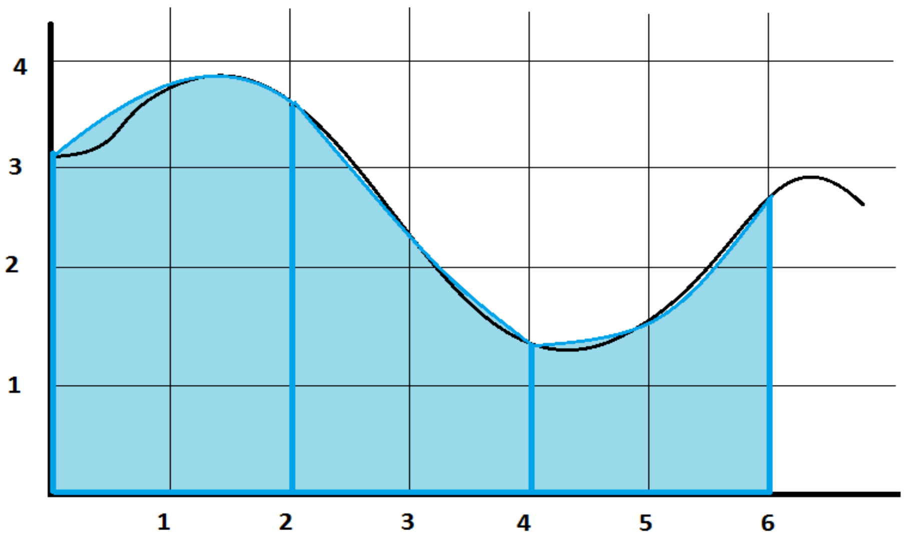


Sl. 2.12 *Simpsonovo pravilo*

Simpsonova formula aproksimira integral sljedećom formulom:

$$I^* = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4 \times f(x_1) + f(x_2)] \tag{2-28}$$

Iz ove formule se može primijetiti da je za izračun ove formule potrebno tri točke, odnosno dva intervala, dakle n mora biti jednak 2. Kao i kod kvadratne i trapezne formule, točniji rezultat će se dobiti, podijeli li se interval na više podintervala te primjenom Simpsonove formule na svaki podinterval. Budući da je za svaki podinterval potrebno tri točke, odnosno dva podintervala, n mora biti paran broj.



Sl. 2.13 *Simpsonovo pravilo*

Aproksimaciju određenog integrala dobijamo zbrojimo li vrijednosti svih pojedinih podsegmenata širine 2h dobivenih Simpsonovom formulom:

$$I^* = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4 \times f(x_1) + f(x_2)] + \frac{h}{3}[f(x_2) + 4 \times f(x_3) + f(x_4)] + \cdots$$

$$+\frac{h}{3}[f(x_{n-2}) + 4 \times f(x_{n-1}) + f(x_n)] \tag{2-29}$$

Pa dobivamo:

$$I^* = \frac{h}{3}\begin{Bmatrix} f(x_0) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})] + \\ 2[f(x_2) + f(x_4) + f(x_{n-2})] + f(x_n) \end{Bmatrix} \tag{2-30}$$

Nakon sređivanja izraza, dobiva se Simpsonova formula:

$$I_n = \frac{h}{3}\left\{ f(x_0) + 4\sum_{\substack{i=1 \\ \Delta i=2}}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{\substack{i=2 \\ \Delta i=2}}^{n-2} f(x_i) + f(x_n) \right\} \tag{2-31}$$

n označava broj podsegmenata na intervalu [a,b], prva suma predstavlja sumu vrijednosti svih neparnih vrijednosti f(x) počevši od 1. do n-1, dok druga suma predstavlja sumu vrijednosti svih parnih vrijednosti f(x) počevši od 2. do n-2.

Primjer 5: *Izračunaj određeni integral* $\int_1^3 (2x^2+5x)dx$ *Simpsonovom formulom za n=2.*

Prema (2-25) računamo h:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{2} = 1$$

Prema (2-26) računamo x_i, te uvrštavajući x_i u zadanu funkciju dobivamo $f(x_i)$

Radi bolje preglednosti kreiramo tablicu vrijednosti:

Tab 2.3 *Vrijednosti funkcije u točkama*

i	x_i	$f(x_i)$
0	*1*	*7*
1	*2*	*18*
2	*3*	*33*

Uvrštavajući dobivene vrijednosti iz tablice u izraz (2-30), dobivamo konačno rješenje:

$$\int_1^3 (2x^2+5x)dx \approx \frac{1}{3}[7+4\times 18+33] \approx \frac{1}{3}[112] \approx 37.3\dot{3}$$

Vidimo da aproksimacija određenog integrala Simpsonovom formulom ima najbržu konvergenciju ka rješenju. Već za n=2 dobiveno je savršeno točno rješenje. Simpsonova formula daje dobre aproksimacije već na n=2, za funkcije drugog i trećeg reda. Za funkcije višeg reda potrebno je podijeliti interval na više podsegmenata, odnosno povećati broj n.

3. DERIVACIJA FUNKCIJE

Derivacija funkcije zajedno uz integralni račun, najvažnija je grana infinitezimalnog računa[5]. Derivacija opisuje brzinu promjene funkcije u odnosu na promjenu neke nezavisne varijable. Po definiciji derivacija funkcije f je granična vrijednost kvocijenta prirasta funkcije i prirasta argumenta, kada argument teži ka nuli.

3.1 Definicija derivacije

Za funkciju $f\colon \langle a,b\rangle \to$ R kažemo da je derivabilna u točki $x_0 \in \langle a,b\rangle$, ako postoji limes

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{3-1}$$

Ako je funkcija f derivabilna u točki x_0 onda realan broj (3-1) zovemo derivacija funkcije f u točki x_0 i označavamo sa $f'\ (x_0)$

$$f'\ (x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{3-2}$$

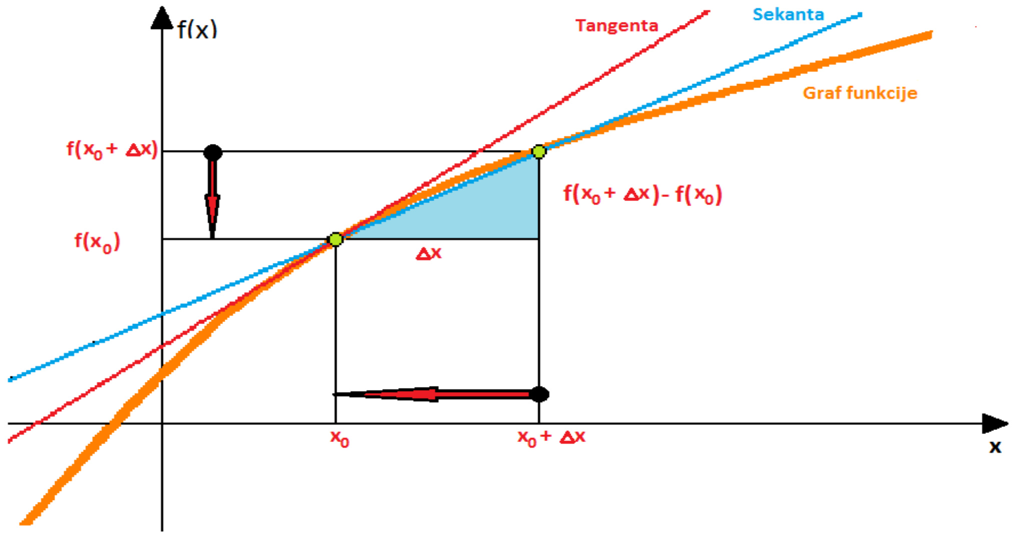
Ako je funkcija f derivabilna u svakoj točki $x_0 \in \langle a,b\rangle$ tada kažemo da je funkcija derivabilna na $\langle a,b\rangle$. Funkciju $x \to f'$ definiranu na $\langle a,b\rangle$ označavamo s f' i nazivamo derivacijom funkcije f na $\langle a,b\rangle$.

Kvocijent zapravo predstavlja omjer promjene funkcije i promjene nezavisne varijable u blizini proizvoljno odabrane točke x_0 i predstavlja prosječnu brzinu promjene funkcije na intervalu od x_0 do $(x_0 + \Delta x)$. Kada bi uzimali sve manju vrijednost Δx, odnosno pustili da Δx teži ka nuli, dobili bi derivaciju funkcije u točki x_0.

Derivacijom funkcije dobije se nova funkcija, koja nam zapravo govori kojom brzinom se mijenja početna funkcija. Ako dana funkcija na određenom argumentu (točki) raste brže/sporije od argumenta, derivacija u toj točki biti će veća/manja od 1, ako su brzine rasta funkcije i argumenta jednake, derivacija će biti jednaka 1. Ako funkcija opada, derivacija će biti negativna iz razloga što vrijednost funkcije opada, dok argument i dalje raste. Ako se funkcija na određenom argumentu ne mijenja, odnosno ako je funkcija konstantna, vrijednost derivacije na tom argumentu bit će jednaka nuli. U slučaju funkcija višeg reda, to je znak da je došlo do

[5] Infinitezimalni račun osnova je matematičke analize, koji proučava promjenu mjerljivih varijabli. To je grana matematike koja se bavi funkcijama, limesima funkcije, graničnim vrijednostima, derivacijama i integralima. Dvije najvažnije grane su diferencijalni i integralni račun.

pregiba funkcije te da je funkcija doživjela svoj lokalni ekstrem. Osim rasta i pada funkcije te nalaženja ekstrema, derivacija se koristi kod mnogih drugih matematičkih problema. Osim u matematici, derivacija se koristi i u drugim znanostima. U fizici, derivacija je omjer promjene funkcije puta na određenom argumentu vremena, čime se dobiva brzina. U geometrijskom smislu derivacija funkcije f je nagib tangente u određenoj točki x_0 , odnosno koeficijent smjera pravca na funkciju u točki $(x_0, f(x_0))$.



Sl. 3.1 *Geometrijska interpretacija derivacije*

Budući da je koeficijent smijera pravca:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (3\text{-}3)$$

dobijamo:

$$m = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{(x_0+\Delta x) - x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (3\text{-}4)$$

Iz ovog se može primijetiti da je koeficijent smijera pravca usko povezan s derivacijom, zato što kada Δx teži u 0, sekanta postaje tangenta funkcije u točki x_0, a limes njegovog koeficijenta smijera postaje derivacija funkcije u točki $(x_0, f(x_0))$.

Primjer 1: *Neka je zadana funkcija* $f(x) = x^2$ *. Potrebno je izračunati derivaciju funkcije uz pomoć definicije.*

Prema (3-2) računamo:

$$(x^2)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

Iz primjera se može zaključiti da je funkcija derivabilna za sve vrijednosti x-a i da je njezina derivacija jednaka $2x$. U praksi se umjesto računanja limesa, koristi tablica deriviranja elementarnih funkcija, koja omogućuje mnogo brži i lakši proces deriviranja.

Tab 3.1 Tablica derivacija.

Funkcija $f(x)$	*Derivacija* $f'(x)$	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
x^n	nx^{n-1}	$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\cot^{-1} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	a^x	$a^x \ln a$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$

Primjer 2: Izderivirati funkciju uz pomoć tablice:

$$(x^5 - 4x^3 + 2x^2 + 7)' = (x^5)' - 4(x^3)' + 2(x)' + (7)' = 5x^4 - 12x^2 + 4x$$

Pravila deriviranja

- *Derivacija konstante*

  $C' = 0$
- *Derivacija umnoška funkcije i konstantnog faktora*

  $(Cf(x))' = Cf'(x)$
- *Derivacija zbroja*

  $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- *Derivacija umnoška*

  $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- *Derivacija razlomka*

  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
- *Derivacija složene funkcije*

  $(f(g(x)))' = f'\big(g(x)\big)g'(x)$

3.2 Numeričko deriviranje

Numeričko deriviranje grana je numeričke matematike koja daje algoritme za procjenu, odnosno aproksimaciju derivacije funkcije u jednoj, ili konačno mnogo točaka. Kao i numerička integracija, numeričko deriviranje nalazi veliku primjenu u mnogim znanostima. Velika prednost numeričke derivacije je što za procjenu derivacije umjesto same funkcije može koristiti i konačan broj vrijednosti funkcije u određenim točkama. To je od velike važnosti kada vrijednosti funkcije poznajemo samo u određenom broju točaka. Također, ponekad je teško egzaktno izderivirati funkciju na cijeloj domeni, pa se numeričkim putem može doći do derivacije funkcije u konačnom broju točaka te na osnovu toga napraviti aproksimaciju derivacije funkcije.

Formula za aproksimaciju numeričkom derivacijom nastaje iz same definicije derivacije (3-2). Budući da je argument na kojem se vrši derivacija jako malen i teži ka nuli, formulu možemo aproksimirati na sljedeći način:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \tag{3-5}$$

Ovakva formula daje dobru aproksimaciju kada je korak Δx dovoljno malen.

Formula ponekad može dati loše rezultate iako je korak jako malen, u slučaju da derivacija ima skokove.

Ova formula još je poznata pod nazivom diferencija unaprijed.

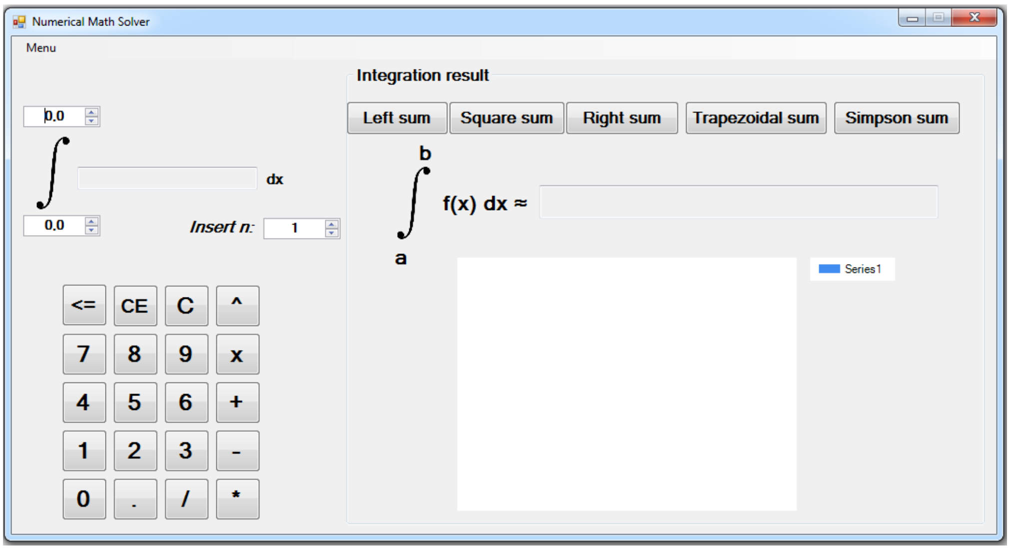
Postoje još dvije formule, a to su diferencija unazad i centralna diferencija

- $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ - diferencija unazad (3-5)
- $f'\,(x_0) \approx \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{2\Delta x}$ – centralna diferencija (3-6)

4. PROGRAMSKA IMPLEMENTACIJA ALGORITAMA ZA NUMERIČKU INTEGRACIJU I NUMERIČKU DERIVACIJU

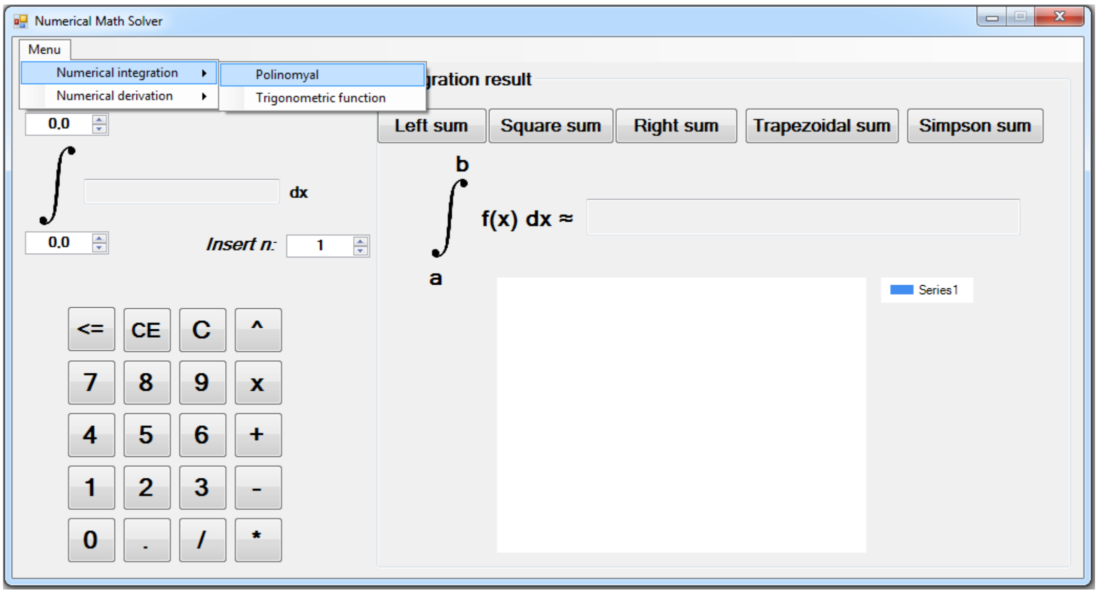
4.1 Opis programa

Za praktični dio ovog diplomskog rada bilo je potrebno implementirati algoritme za numeričku integraciju te numeričku derivaciju. U aplikaciju, koja je nazvana NumericalMathSolver implementirano je 5 metoda za numeričku integraciju (lijeva suma, desna suma, kvadratno pravilo, trapezno pravilo te Simpsonovo pravilo), dok je za numeričku integraciju implementirana metoda diferencije unaprijed. Program je razvijen u programskom okruženju Microsoft Visual Studio 2017 u programskom jeziku C#, dok je programsko sučelje je izrađeno pomoću Windows forme.



Sl. 4.1 *Prikaz početnog zaslona*

U sučelju programa nalazi se traka izbornika u kojoj korisnik bira opciju numerička integracija ili numerička derivacija. U podizbornicima je moguće izabrati tip funkcije koju korisnik želi računati. Ova verzija programa u mogućnosti je računati numeričku integraciju polinoma i trigonometrijske funkcije te numeričku derivaciju polinoma.



Sl. 4.2 *Mogućnosti izbornika*

4.2 Kratke upute za korištenje

4.3.1 Numerička integracija (Numerical integration)

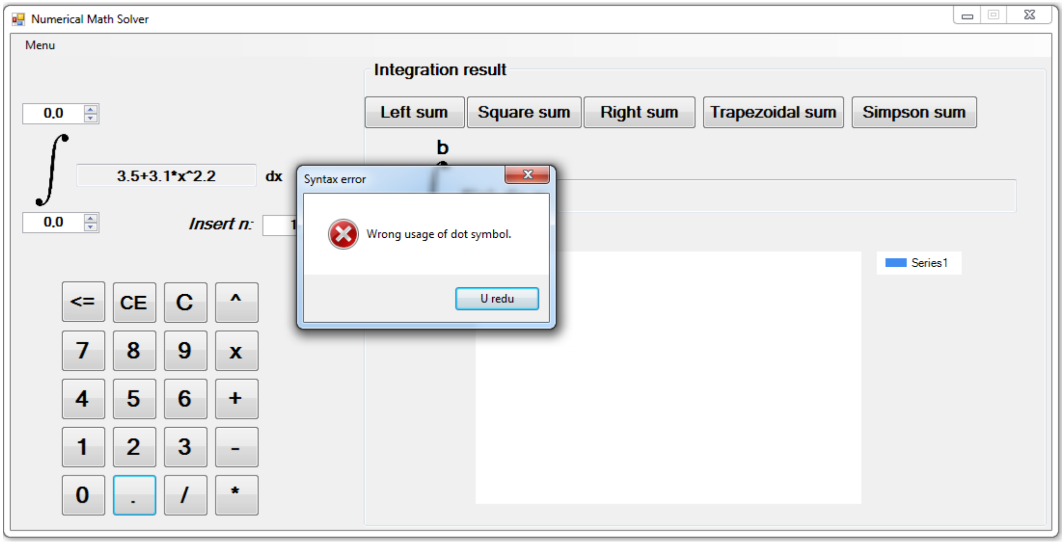
Kada korisnik u izborniku „Numerical integration“ odabere opciju „Polinomyal“, program zahtijeva unos funkcije polinoma (pomoću tipki), unos gornje i donje granice integracije te broja n.

Polinom treba biti unesen na sljedeći način: $3 * x\text{^}3 + 1 * x\text{^}2 + 2 * x\text{^}1 + 24/2\text{^}3$.

Dakle, u slučaju postojanja faktora ispred varijable x, potrebno je staviti znak množenja (pa i u slučaju da je faktor jednak 1). U slučaju da je potencija varijable x jednaka 1, potrebno ju je također unijeti.

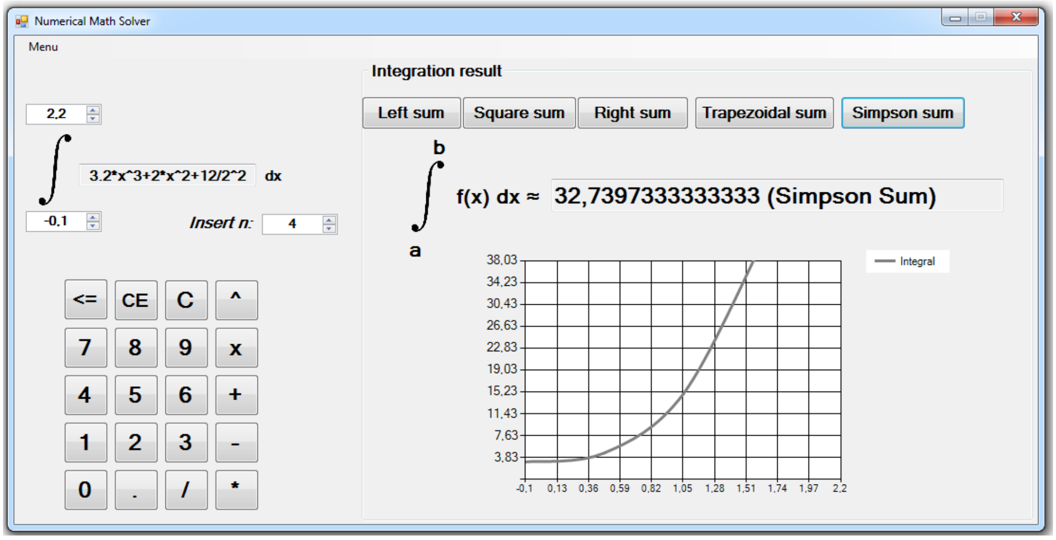
U formulu je moguće unijeti više matematičkih operacija različitih prioriteta. Budući da je unos polinoma baziran na rekurziji, program u tom slučaju računa prvo operacije višeg reda, zatim operacije nižeg reda (prvo računanje potencija, pa množenja, dijeljenja te na kraju zbrajanja i oduzimanja).

Program provjerava unosi li korisnik pravilno podatke te izbacuje upozorenje ukoliko postoji nekorektan unos (u slučaju unosa druge decimalne točke u jednom broju, dva operatora zaredom itd.)



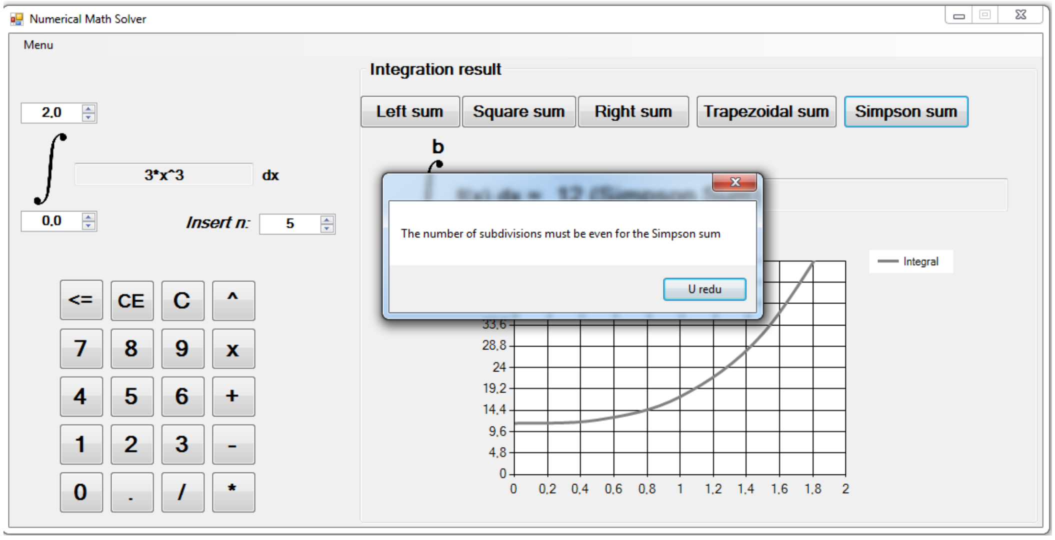
Sl. 4.3 *Poruka korisniku pri nekorektnom unosu decimalne točke*

Program također zabranjuje da je gornja granica integracije manja od donje i obratno. Kada su svi potrebni podaci pravilno uneseni, korisnik bira jednu od opcija s desne strane, odnosno metodu kojom želi izvršiti numeričko integriranje. Nakon pritiska na željenu tipku odnosno odabira metode, program prikazuje rezultat numeričke integracije te graf koji predstavlja način na koji određena metoda aproksimira površinu.



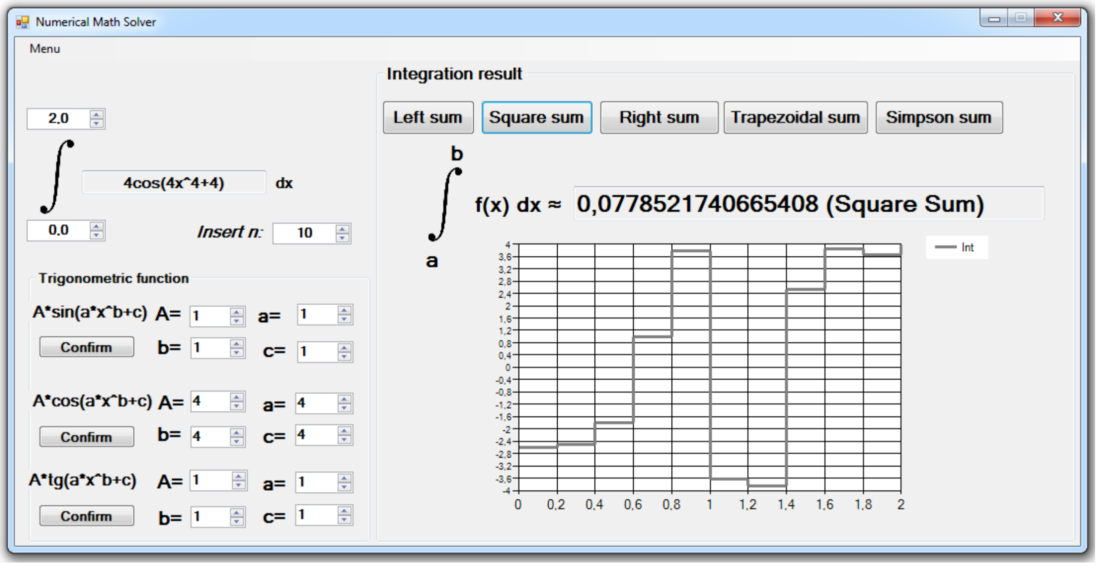
Sl. 4.4 *Prikaz rezultata numeričke integracije polinoma Simpsonovom metodom*

Kako Simpsonova metoda zahtijeva paran n, korisnik mora unijeti paran broj n kada poziva Simpsonovu metodu. U slučaju neparnog unosa broja n i poziva Simpsonove metode, korisnik dobija upozorenje.



Sl. 4.5 *Zahtjev za parnim unosom broja n kod Simpsonove formule*

Kod odabira „Trigonometric funtion“ u izborniku „Numerical Integration“ otvara se sljedeće sučelje:

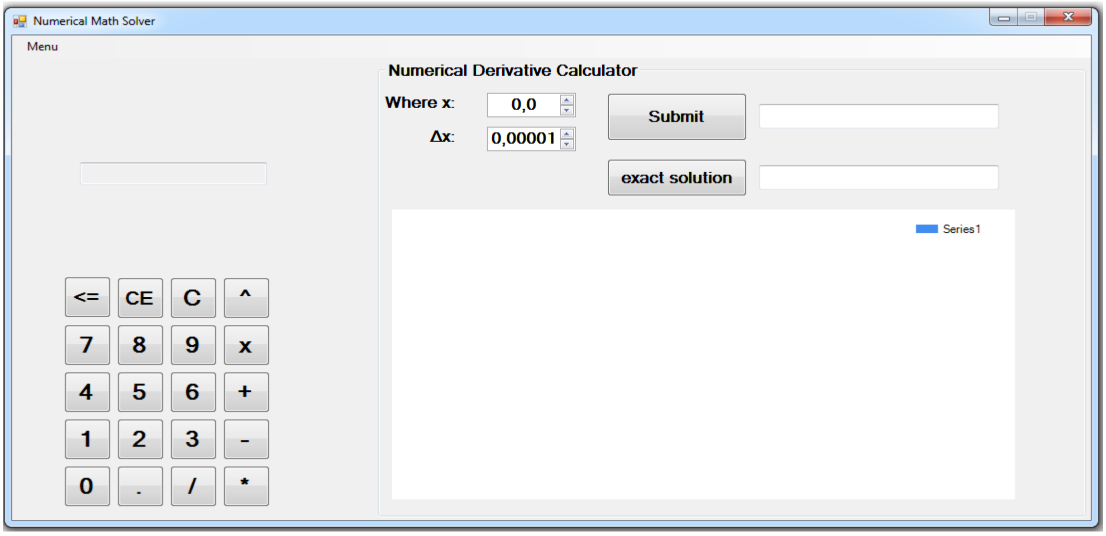


Sl. 4.6 *Prikaz sučelja i rezultata numeričke integracije trigonometrijske funkcije*

Kod izbora trigonometrijskih funkcija moguće je odabrati željenu amplitudu, faktor i potenciju x-a te pomak trigonometrijske funkcije, zatim kliknuti na tipku „Confirm“. Korisnikov unos tada je vidljiv u polju za tekst. Ovdje korisnik također odabire željenu donju i gornju granicu te željeni n. Korisnik zatim s desne strane treba izabrati metodu kojom želi izvršiti numeričku integraciju. Nakon odabira željene metode, program prikazuje rezultat numeričke integracije te pripadajući graf.

4.2.2. Numerička derivacija (Numerical derivation)

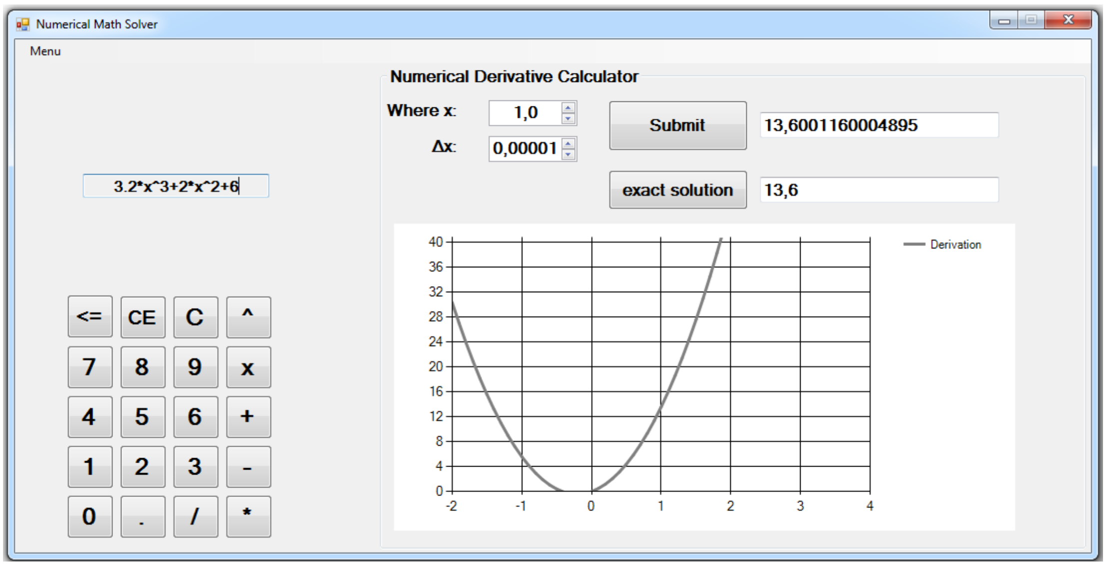
Nakon izbora opcije „Numerical Derivation“ pojavljuje se sljedeće sučelje:



Sl. 4.7 *Prikaz sučelja numeričke derivacije*

Korisnik prvo treba unijeti polinom na način koji je već ranije spomenut, kao i kod unosa polinoma za numeričku integraciju. Zatim je potrebno izabrati željeni x, odnosno točku u kojoj se želi promatrati derivacija funkcije. Također, potrebno je unijeti željeni Δx.

Nakon pritiska na tipku „Submit“ program prikazuje rezultat numeričke derivacije u ovisnosti o željenom Δx. Pritiskom na tipku „exact solution“, program prikazuje točno rješenje derivirane funkcije u željenoj točki x te prikazuje graf derivacije funkcije.



Sl. 4.8 *Prikaz rezultata numeričke derivacije*

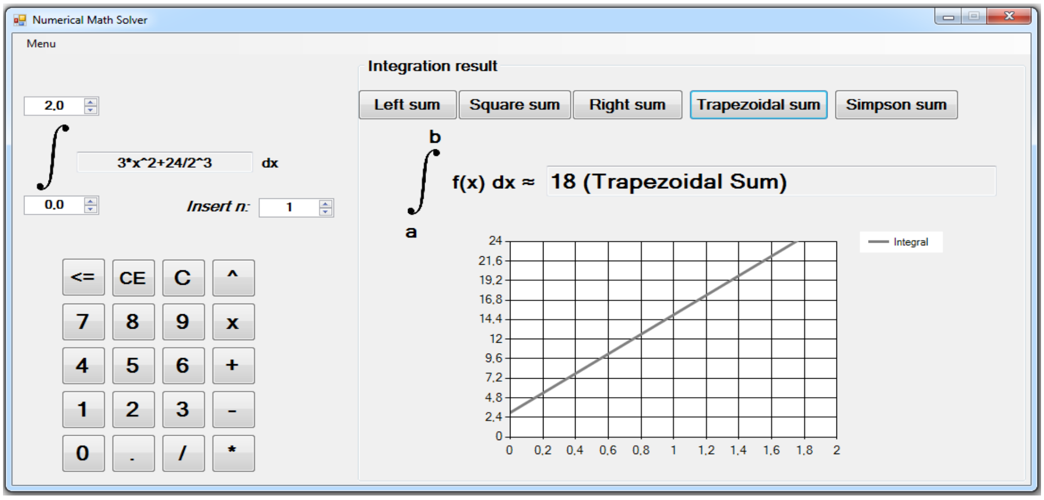
5. PRIKAZ, USPOREDBA I ANALIZA REZULTATA

5.1 Numerička integracija

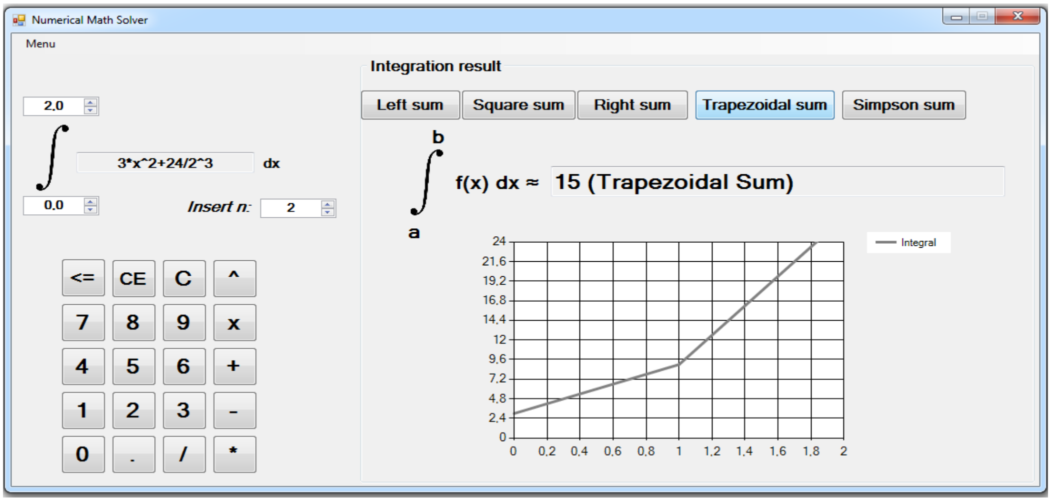
5.1.1 Analiza utjecaja izbora broja n na točnost numeričke integracije

Kako je već ranije spomenuto, za dobru aproksimaciju numeričke integracije, potrebno je podijeliti zadani interval na više podintervala, kako bi se smanjila greška procjene površine. Ukoliko se odabere premali broj n, greška aproksimacije bit će velika. U ovom dijelu, na dva primjera biti će napravljena analiza utjecaja broja n na ukupnu točnost aproksimacije.

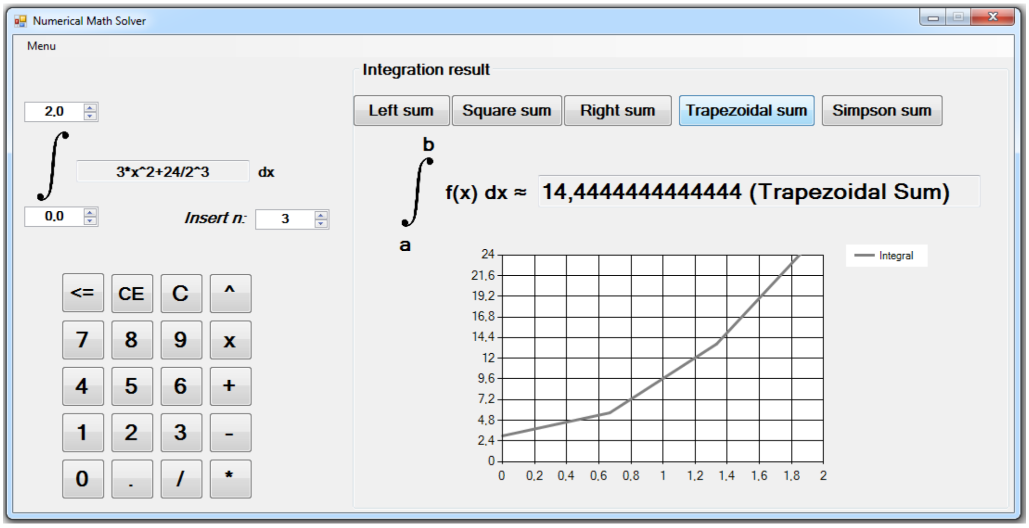
U prvom primjeru analizirat će se utjecaj odabira broja n na točnost aproksimacije integrala $\int_0^2 \left(3x^2 + \frac{24}{2^3}\right) dx$ uz pomoć trapezne formule. (Točno rješenje: 14)



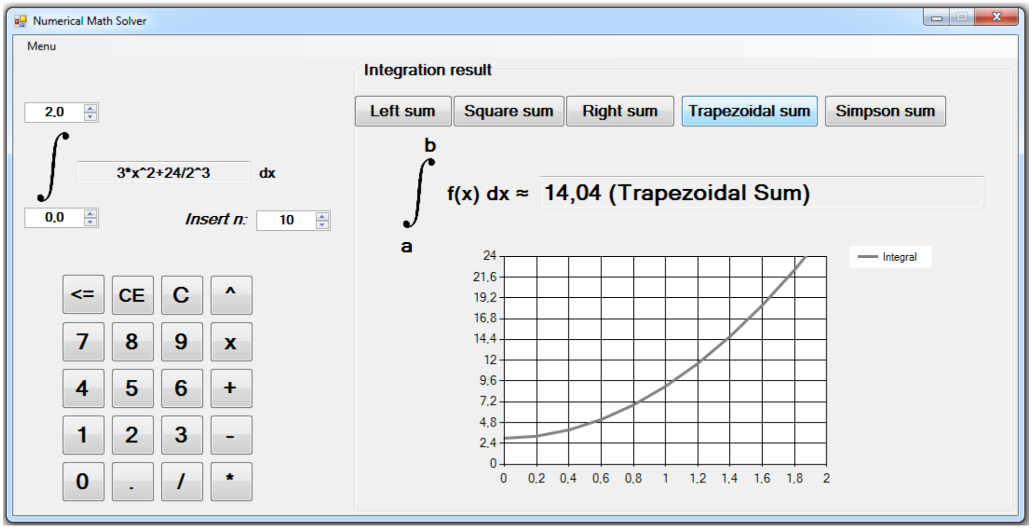
Sl. 5.1 *Rezultat aproksimacije za n=1(Rezultat:18)*



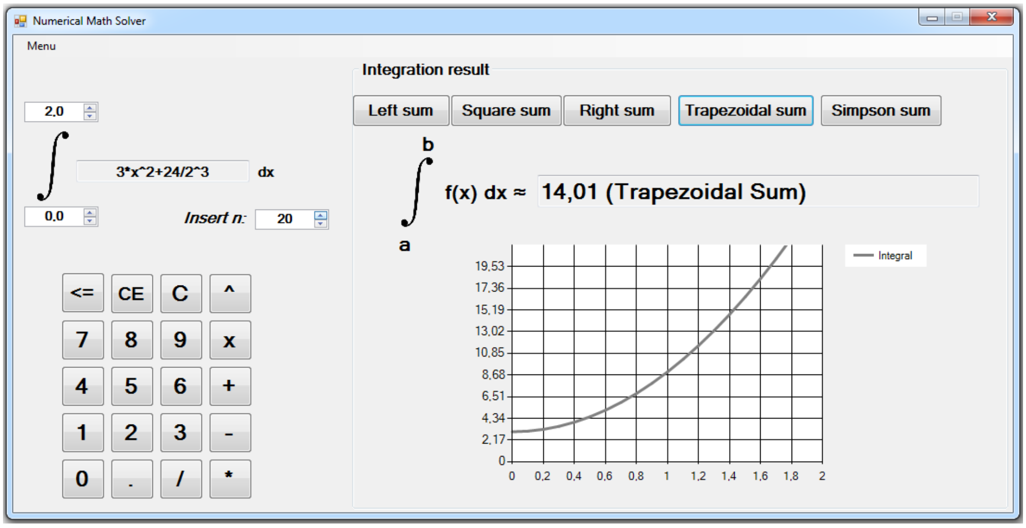
Sl. 5.2 *Rezultat aproksimacije za n=2(Rezultat:15)*



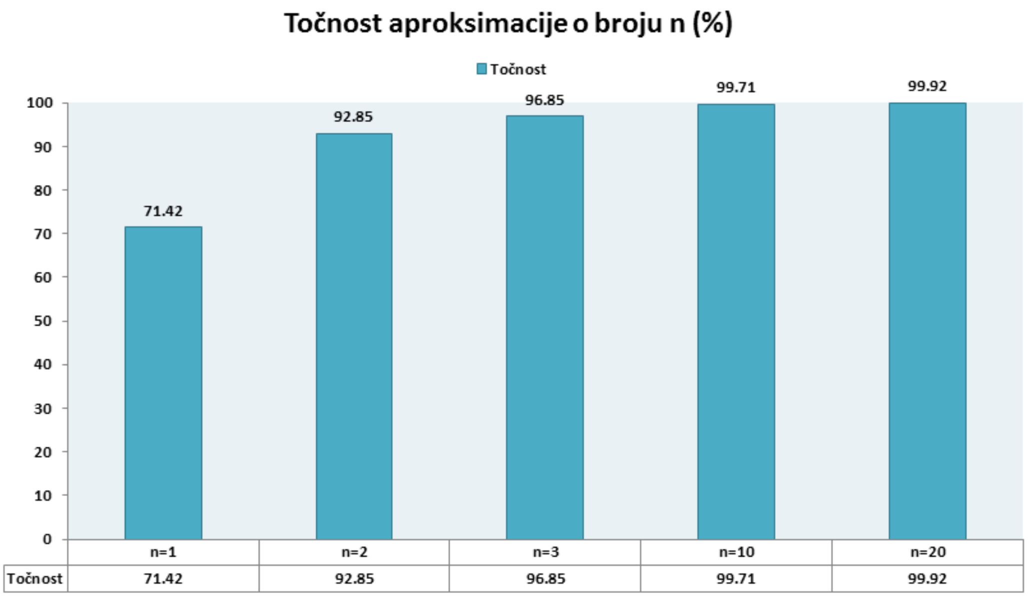
Sl. 5.3 *Rezultat aproksimacije za n=3(Rezultat:14.444)*



Sl. 5.4 *Rezultat aproksimacije za n=10(Rezultat:14.04)*



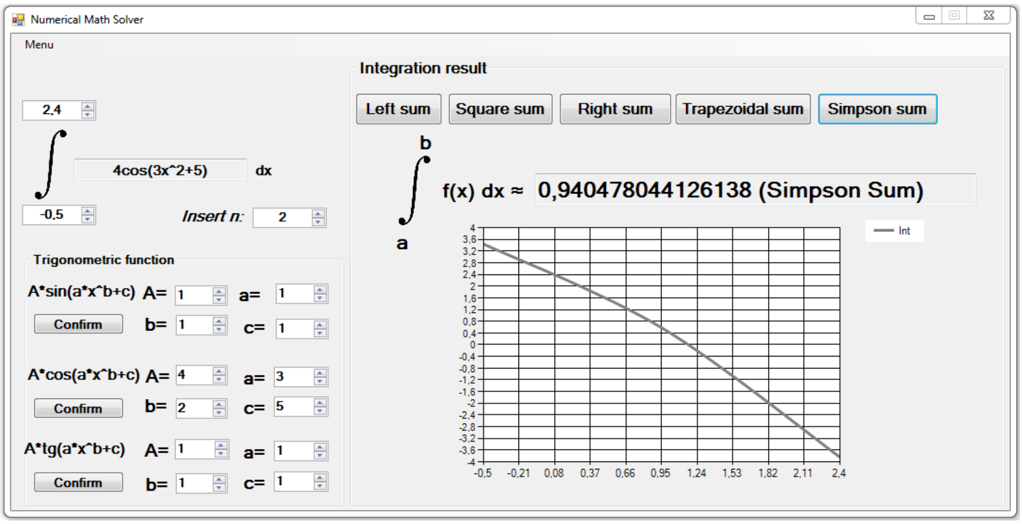
Sl. 5.5 *Rezultat aproksimacije za n=20 (Rezultat:14.01)*



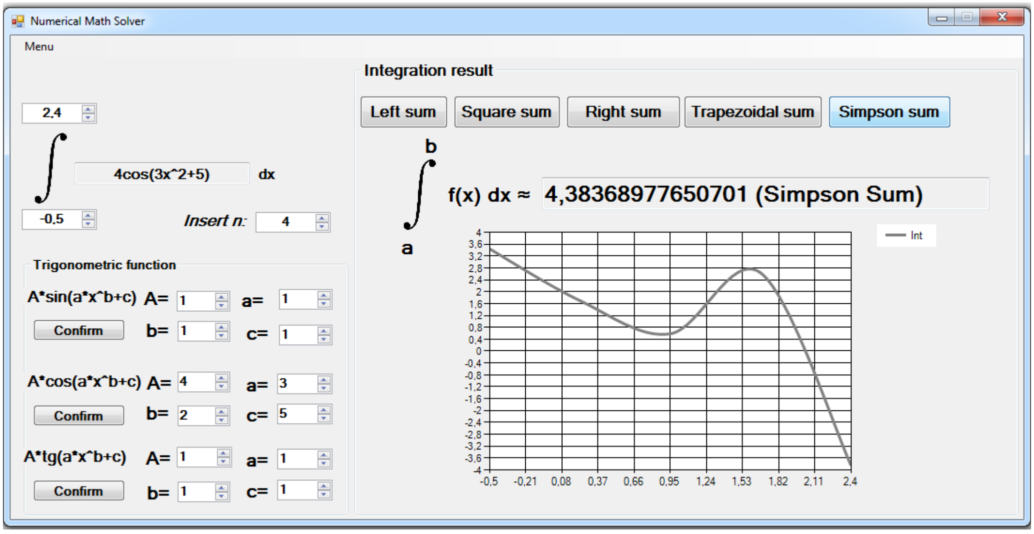
Sl. 5.6 *Graf ovisnosti točnosti aproksimacije o broju n*

U drugom primjeru analizirat će se utjecaj odabira broja n na točnost aproksimacije integrala $\int_{-0.5}^{2.4}(4cos(3x\verb|^|2+5))\,dx$ uz pomoć Simpsonove formule.

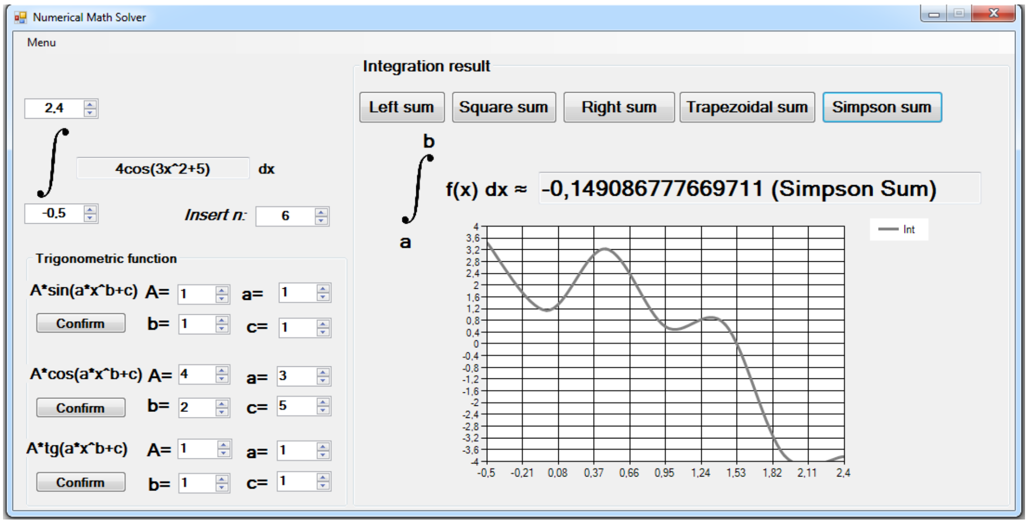
(Točno rješenje: 2.723726751)



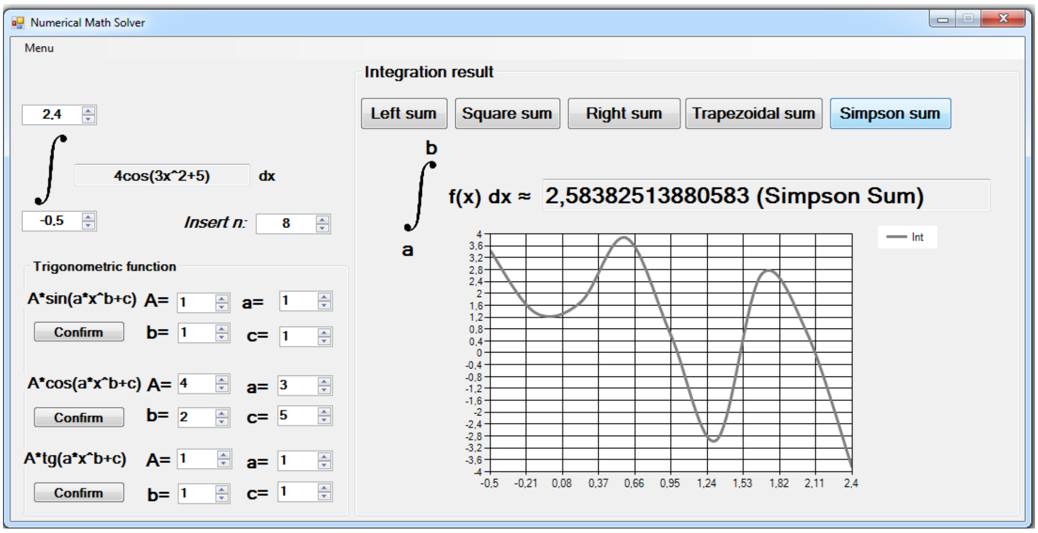
Sl. 5.7*Rezultat aproksimacije za n=2 (Rezultat:0.94)*



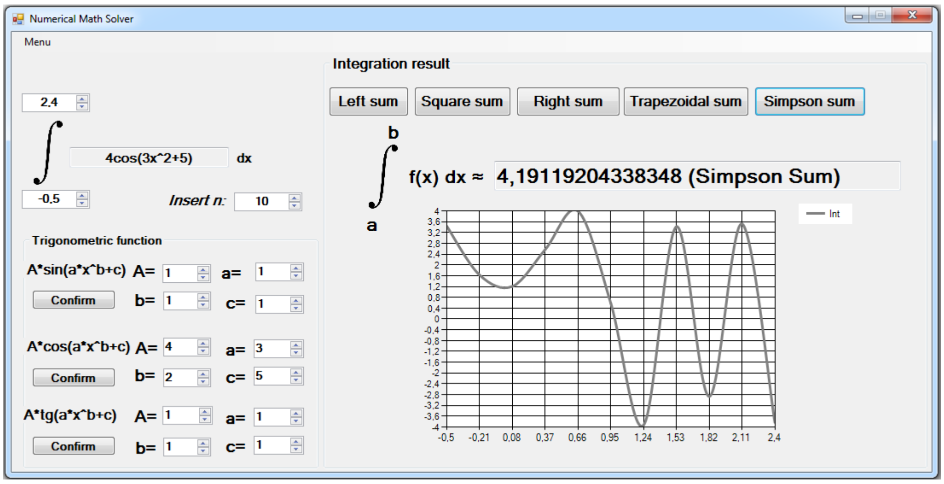
Sl. 5.8 *Rezultat aproksimacije za n=4 (Rezultat:4.383)*



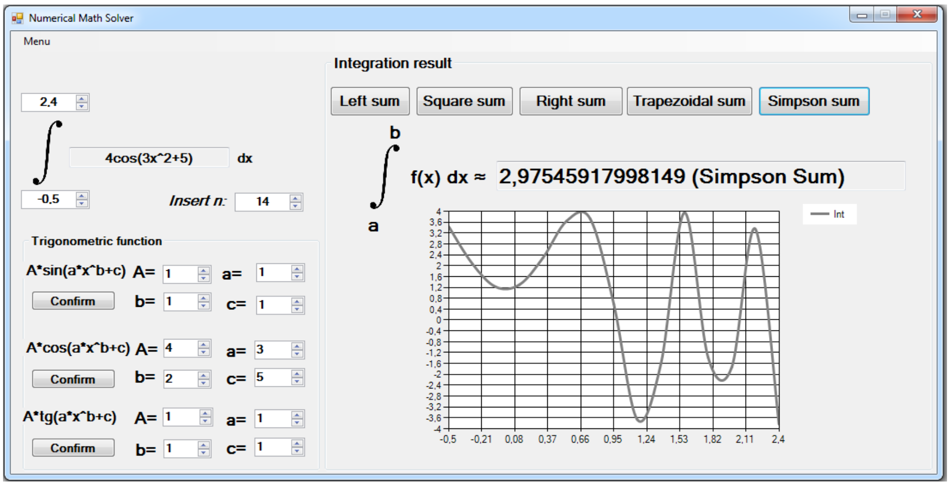
Sl. 5.9 *Rezultat aproksimacije za n=6 (Rezultat:-0.149)*



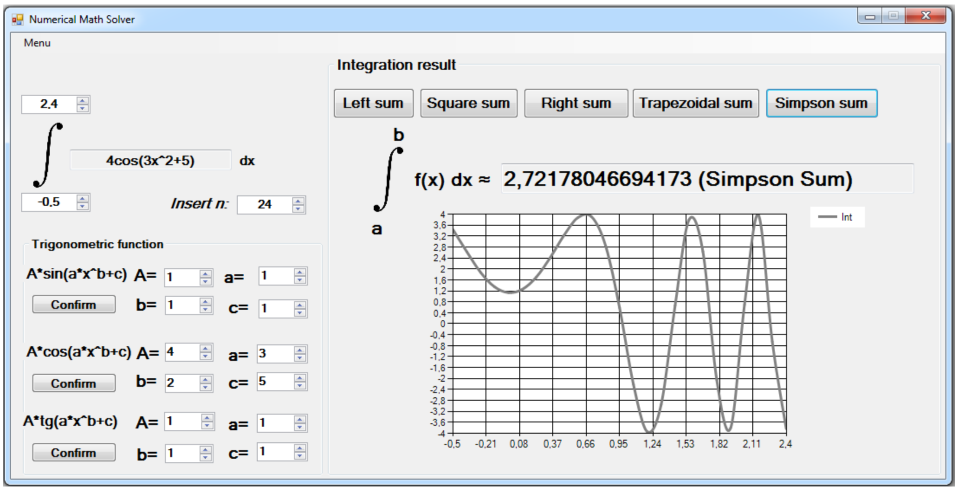
Sl. 5.10 *Rezultat aproksimacije za n=8 (Rezultat:2.583)*



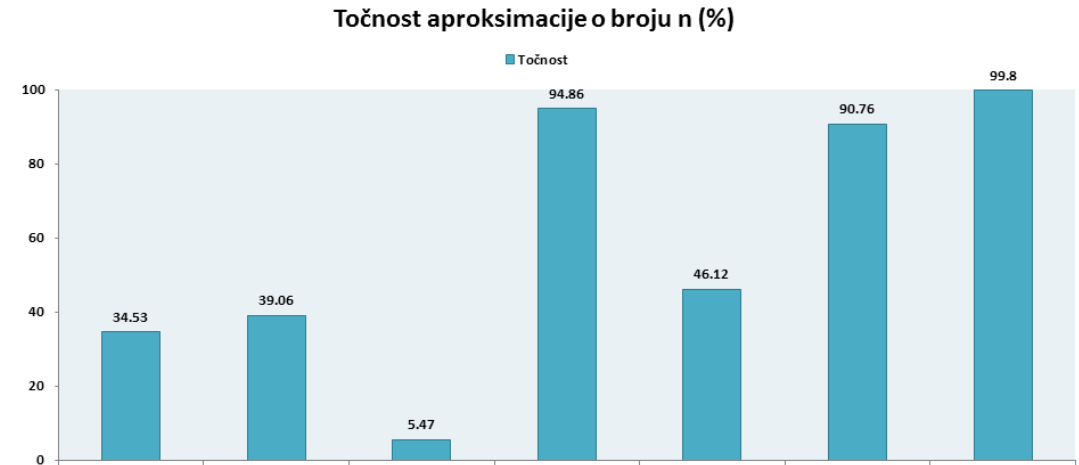
Sl. 5.11 *Rezultat aproksimacije za n=10 (Rezultat:4.191)*



Sl. 5.12 *Rezultat aproksimacije za n=14 (Rezultat:2.975)*



Sl. 5.13 *Rezultat aproksimacije za n=24 (Rezultat:2.721)*



	n=2	n=4	n=6	n=8	n=10	n=14	n=24
Točnost	34.53	39.06	5.47	94.86	46.12	90.76	99.8

Sl. 5.14 *Graf ovisnosti točnosti aproksimacije o broju n*

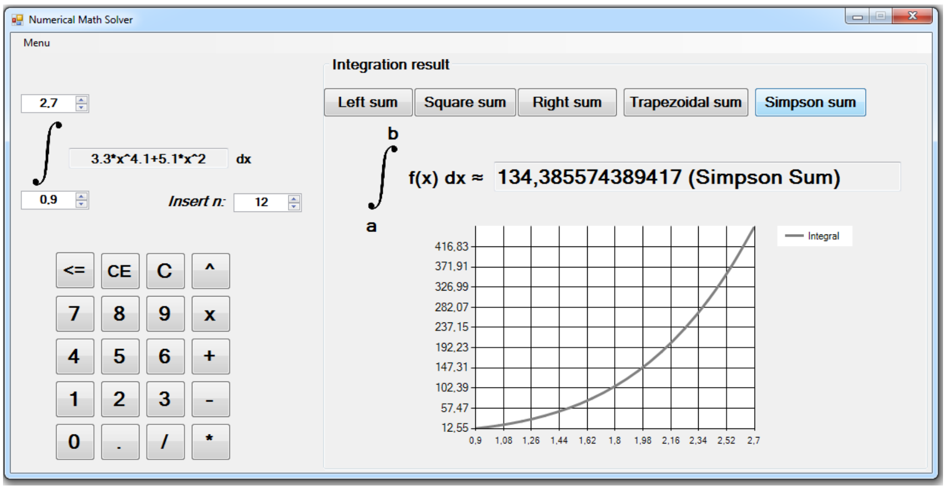
Ovi primjeri potvrđuju već ranije spomenutu činjenicu da je greška aproksimacije jako velika odabere li se premali broj n. U prvom primjeru povećavanjem broja n, linearno se povećavala točnost aproksimacije. U drugom primjeru kod integriranja trigonometrijske funkcije, povećavanje broja n za male vrijednosti n-a (n<10) ne znači nužno i veću točnost aproksimacije iz razloga što je n premali i samim tim daje irelevantnu aproksimaciju.

5.1.2 Analiza utjecaja izbora numeričke metode za točnost aproksimacije

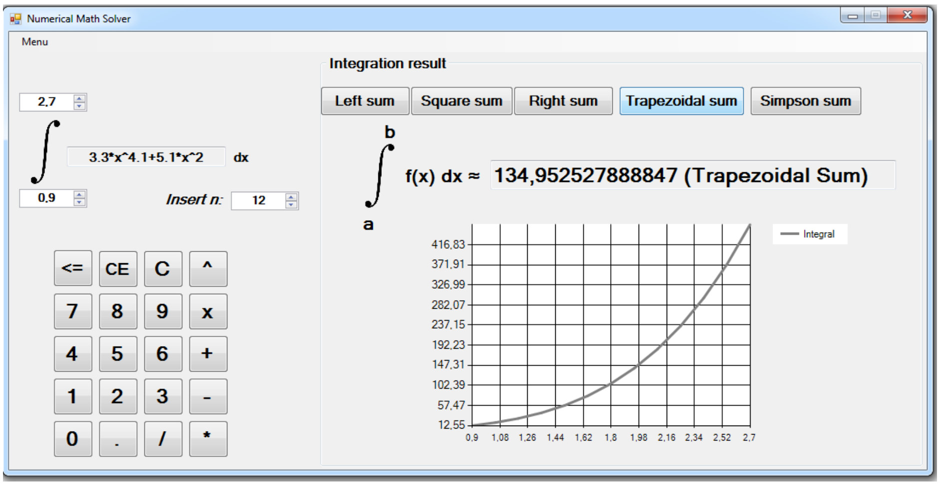
U ovom dijelu rada na dva primjera analizirat će se utjecaj izbora pojedine numeričke metode na točnost aproksimacije.

U prvom primjeru potrebno je izračunati aproksimaciju integrala različitim metodama za n=12. (Točno rješenje: 134.38505625)

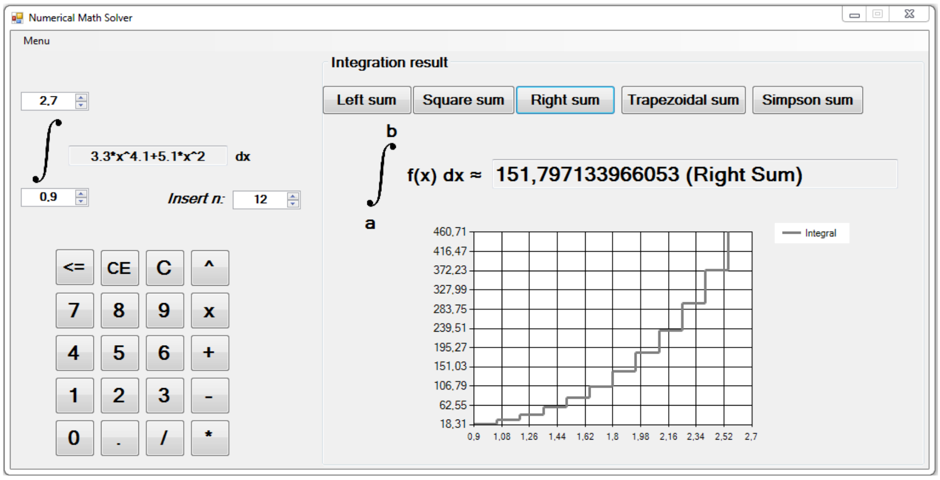
$$\int_{0.9}^{2.4}(3.3 * x\text{^}4.1 + 5.1 * x\text{^}2)\, dx \ ,$$



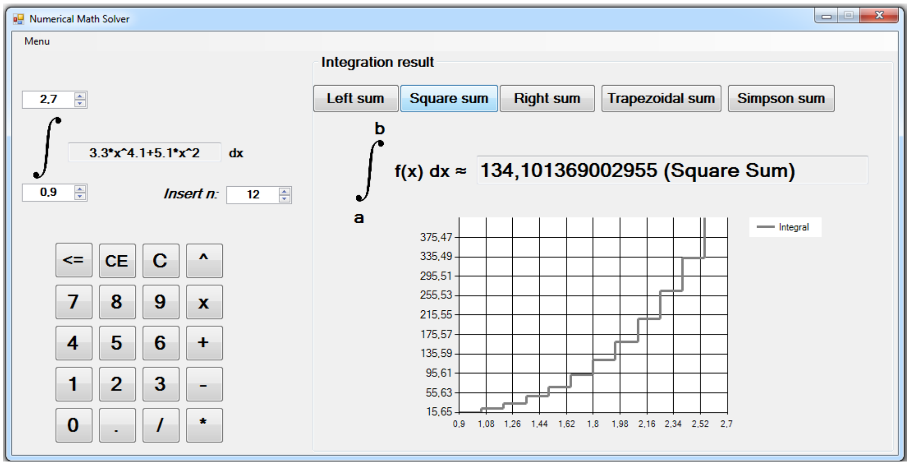
Sl. 5.15 *Rezultat integracije Simpsonovom formulom(Rezultat:134.385)*



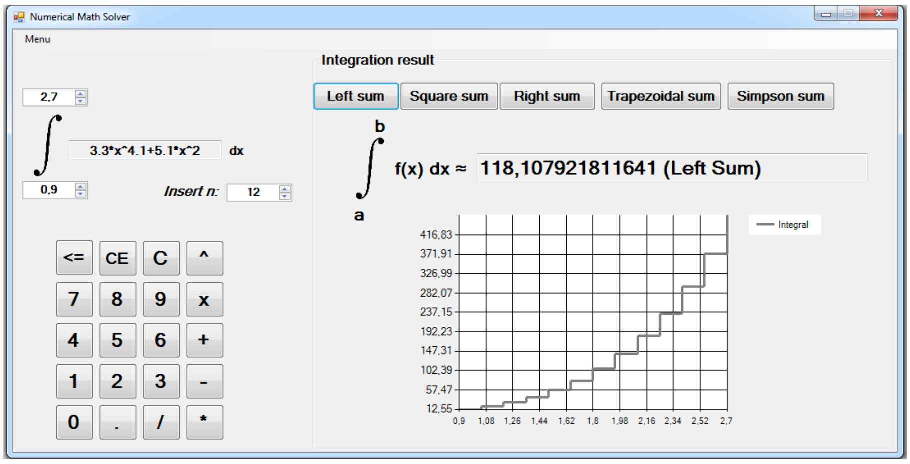
Sl. 5.16 *Rezultat integracije trapeznom formulom (Rezultat:134.952)*



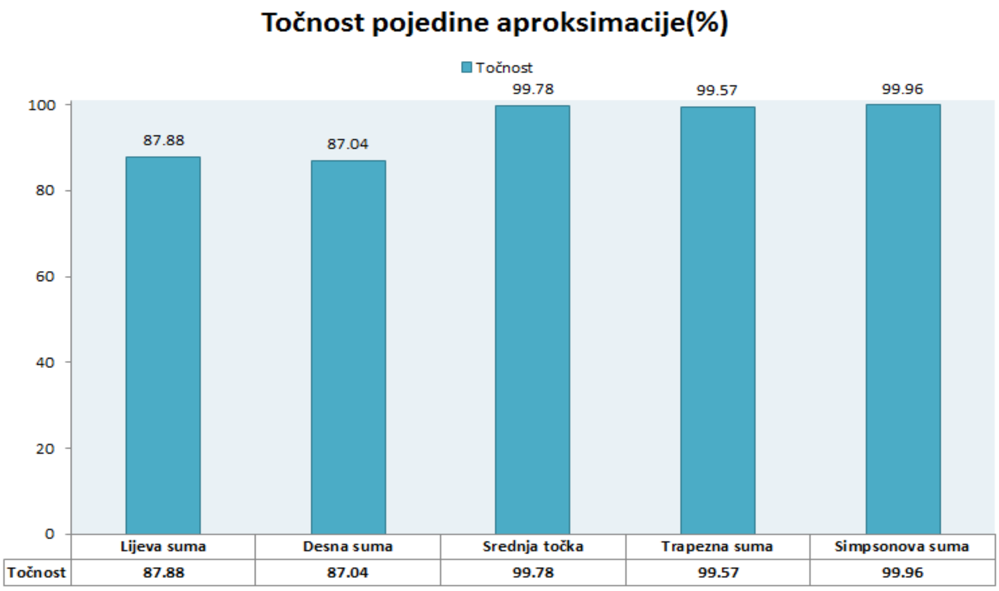
Sl. 5.17 *Rezultat integracije Desna suma(Rezultat:151.797)*



Sl. 5.18 *Rezultat integracije kvadratnom formulom(Rezultat:134.101)*



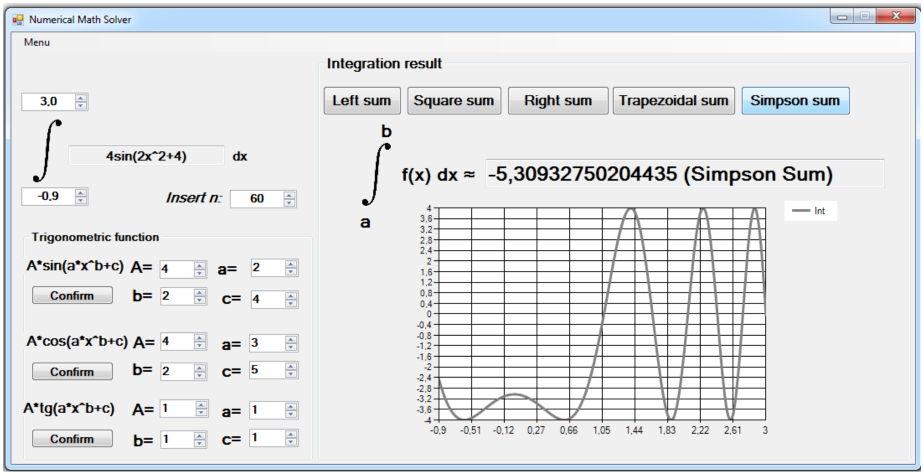
Sl. 5.19 *Rezultat integracije Lijeva suma (Rezultat:118.107)*



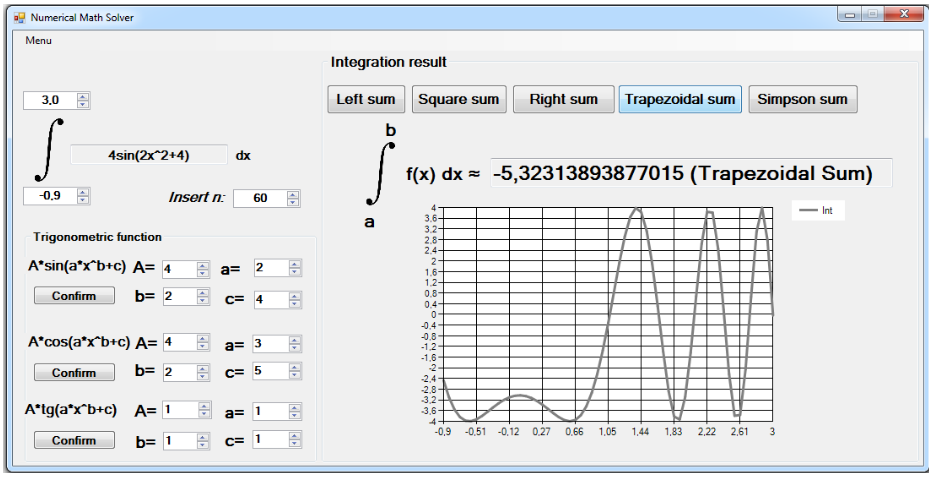
Sl. 5.20 *Graf ovisnosti točnosti aproksimacije o pojedinoj metodi*

U drugom primjeru potrebno je izračunati aproksimaciju integrala različitim metodama za n=60 .

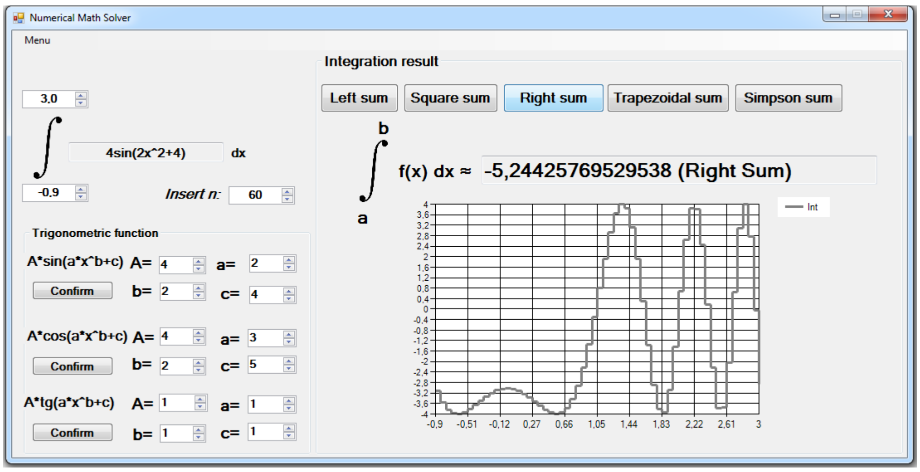
$\int_{-0.9}^{3}(4sin(2x\hat{}2+4))dx$. (Točno rješenje: -5.310061954)



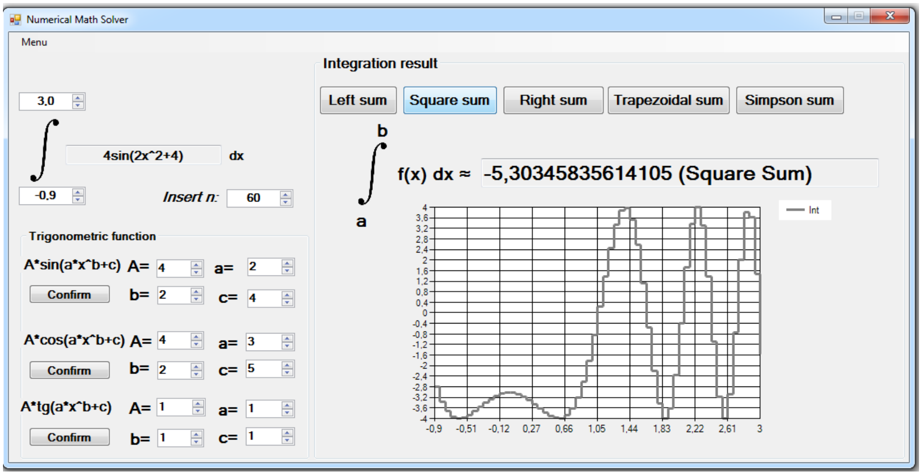
Sl. 5.21 *Rezultat integracije Simpsonovom formulom (Rezultat: - 5.309)*



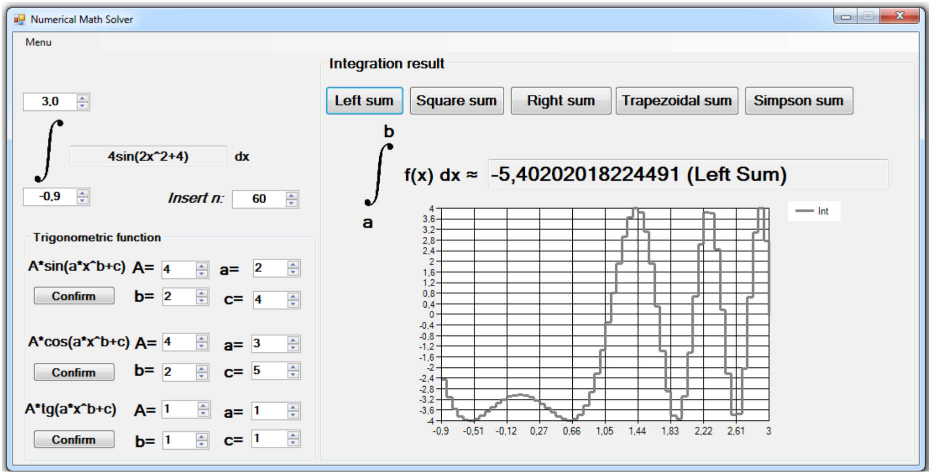
Sl. 5.22 *Rezultat integracije trapeznom formulom (Rezultat: - 5.323)*



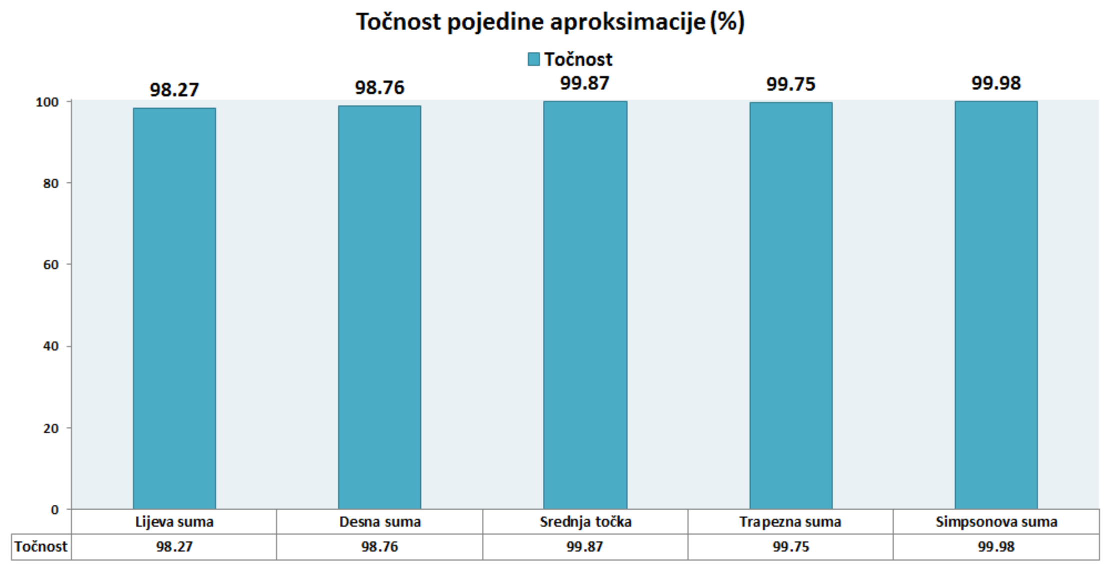
Sl. 5.23 *Rezultat integracije Desna suma (Rezultat: - 5.244)*



Sl. 5.24 *Rezultat integracije kvadratnom formulom (Rezultat: - 5.303)*



Sl. 5.25 *Rezultat integracije Lijeva suma (Rezultat: - 5.402)*



Sl. 5.26 *Graf ovisnosti točnosti aproksimacije o pojedinoj metodi*

Pogled na dobivene rezultate potvrđuje već ranije spomenutu tvrdnju da je točnost Simpsonove formule za aproksimaciju integrala numeričkim putem najveća. Naime, Simpsonova formula u oba primjera daje najveću točnost. Aproksimacije trapeznom i kvadratnom formulom pokazuju slična odstupanja od točne vrijednosti. Formula srednje točke u oba slučaja polučila je minimalno veću točnost od trapezne formule, no grafički gledano, trapezna je formula bolji izbor iz razloga što „ljepše" aproksimira danu funkciju. Aproksimacije lijevom i desnom sumom pokazuju se kao najlošiji izbor, što je i bilo za očekivati.

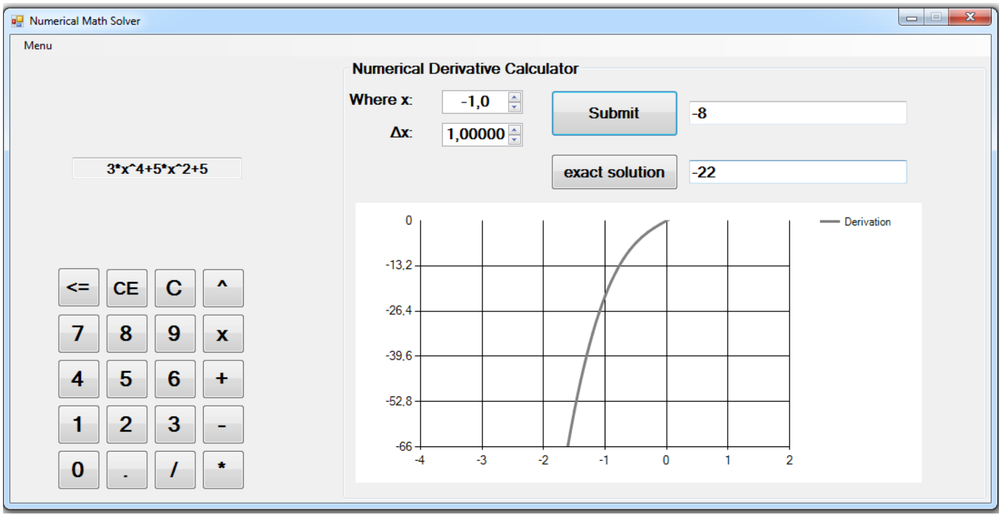
5.2 Numerička derivacija

5.2.1 Analiza utjecaja izbora Δx na aproksimaciju derivacije

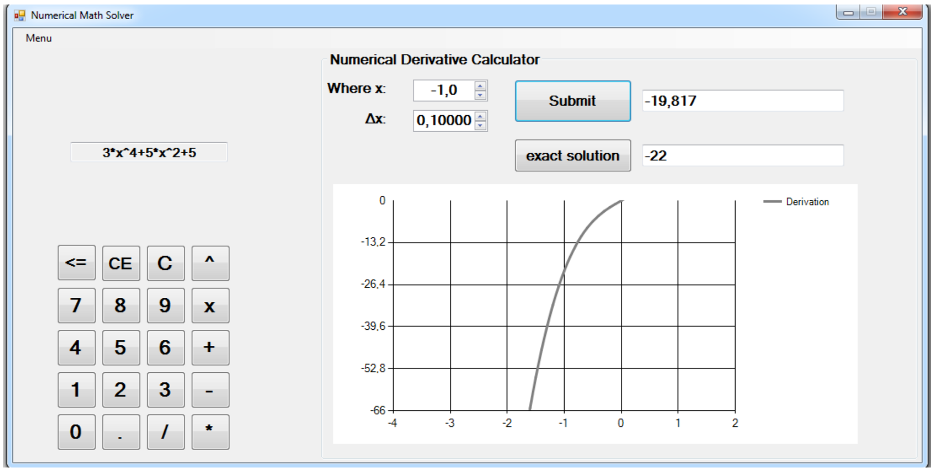
Budući da se za aproksimaciju derivacije funkcije koristi sljedeća formula

$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, u kojoj je zanemaren limes funkcije kada $\Delta x \to 0$, uvjet za dobru aproksimaciju derivacije je da korak bude jako malen. Na sljedećem primjerima usporedit će se rezultat derivacije funkcije u točki pri različitim vrijednostima Δx.

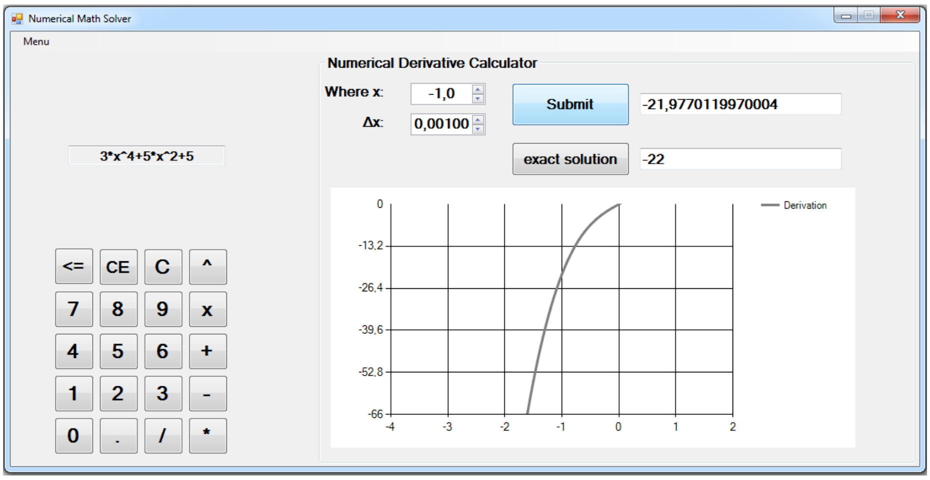
Primjer 1: Potrebno je naći derivaciju funkcije $3 * x^4 + 5 * x^2 + 5$ u točki -1 za različite vrijednosti Δx. (Točan rezultat: -22)



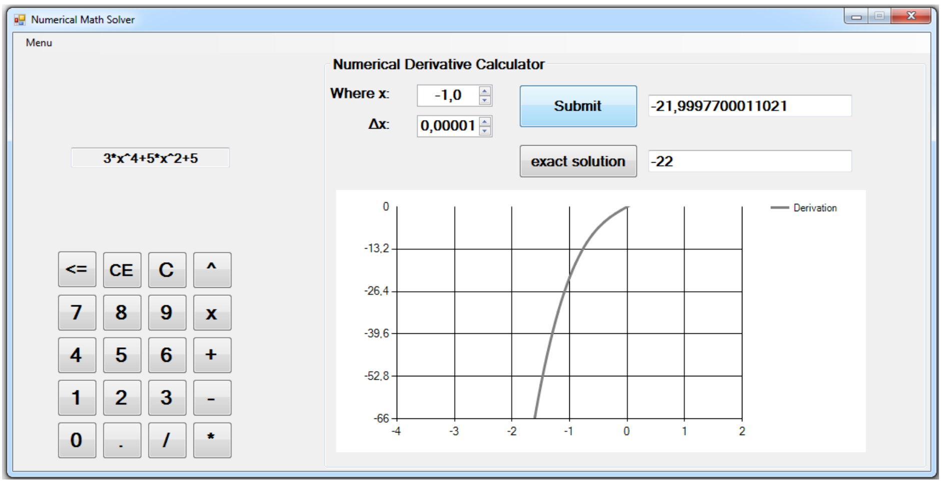
Sl. 5.27 *Rezultat derivacije funkcije za* $\Delta x = 1$ *(Rezultat: - 8)*



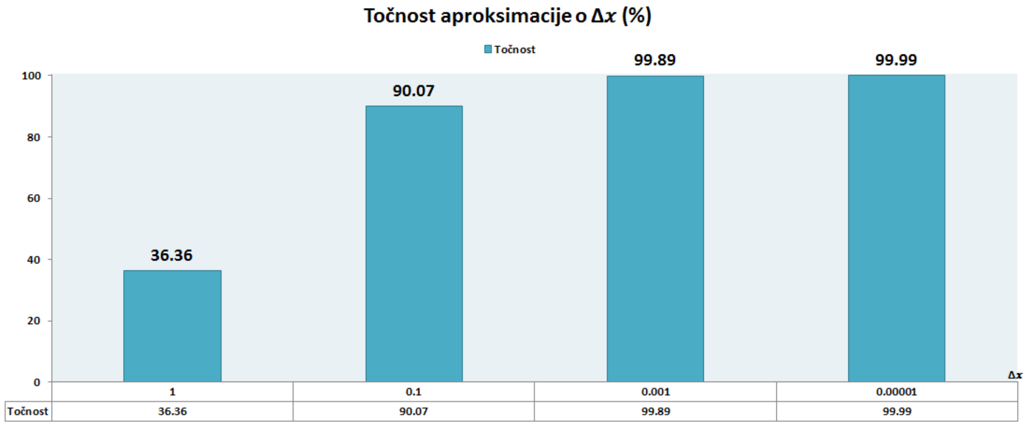
Sl. 5.28 *Rezultat derivacije funkcije za* $\Delta x = 0.1$ *(Rezultat: - 19.817)*



Sl. 5.29 *Rezultat derivacije funkcije za* $\Delta x = 0.001$ *(Rezultat: - 21.977)*

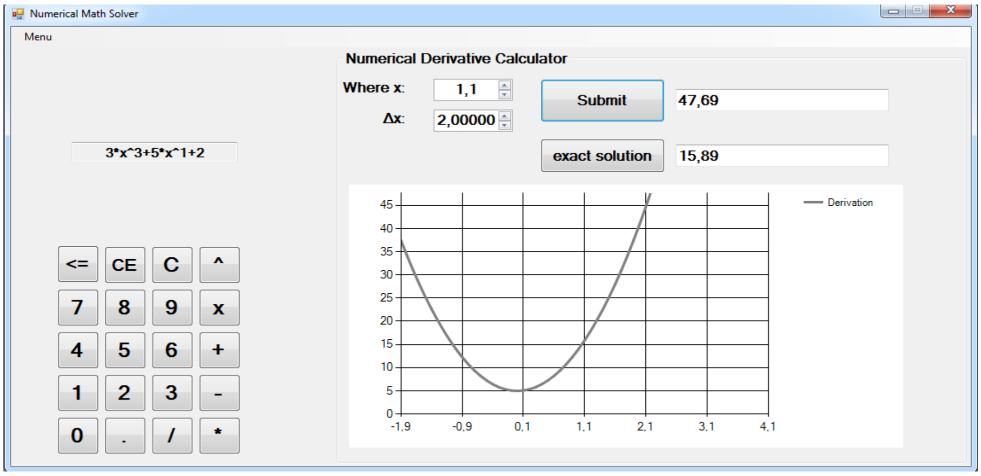


Sl. 5.30 *Rezultat derivacije funkcije za* $\Delta x = 0.00001$ *(Rezultat: - 21.999)*

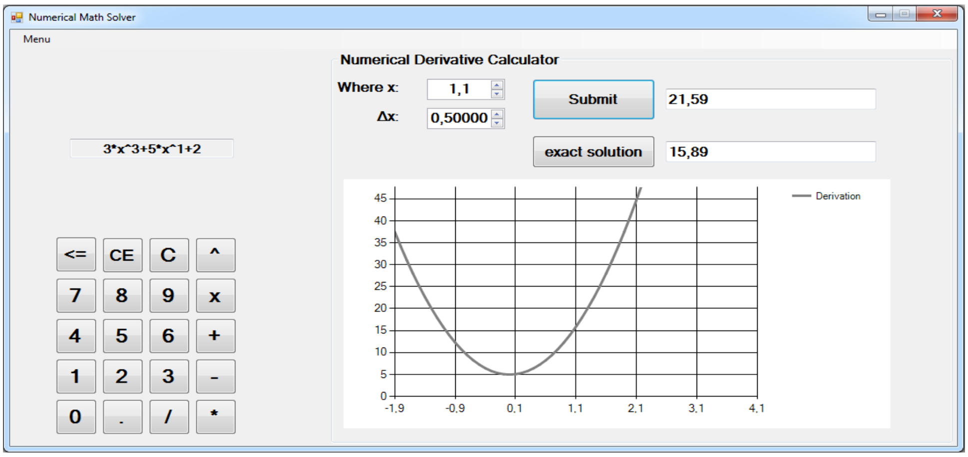


Sl. 5.31 *Graf ovisnosti točnosti aproksimacije o* Δx

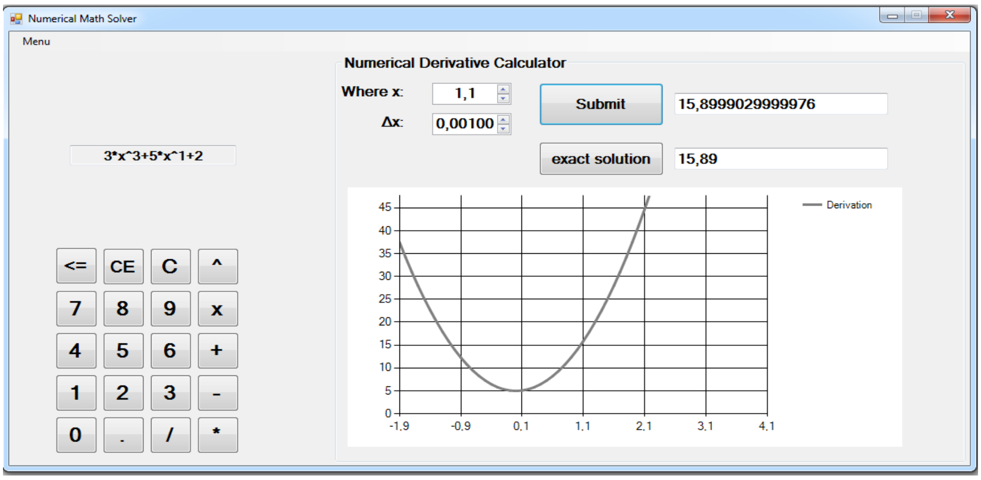
Primjer 2: Potrebno je naći derivaciju funkcije $3 * x^3 + 5 * x^1 + 6$ u točki 1.1 za različite vrijednosti Δx. (Točan rezultat:15.89)



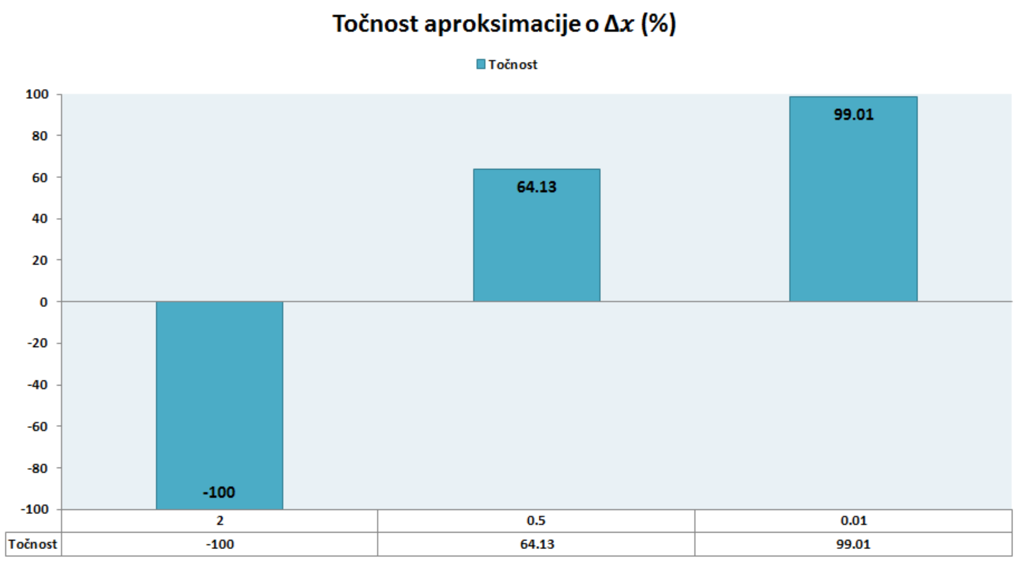
Sl. 5.32 *Rezultat derivacije funkcije za* $\Delta x = 2$ *(Rezultat: 47.69)*



Sl. 5.33 *Rezultat derivacije funkcije za* $\Delta x = 0.5$ *(Rezultat: 21.59)*



Sl. 5.34 *Rezultat derivacije funkcije za* $\Delta x = 0.001$ *(Rezultat: 15.899)*



Sl. 5.35 *Graf ovisnosti točnosti aproksimacije o* Δx

Dobiveni rezultati su u skladu s očekivanjima. Kako je već objašnjeno u teorijskoj podlozi numeričke derivacije, pokazalo se da izbor vrijednosti Δx mora biti dovoljno malen i težiti u nulu za dobru aproksimaciju derivacije. Ukoliko se ne uzme dovoljno mali Δx, greška aproksimacije bit će velika. U prvom primjeru kod $\Delta x = 1$ te u drugom primjeru, kod vrijednosti $\Delta x = 2$ može se uočiti ogromno odstupanje od točne vrijednosti. Razlog je što je red veličine vrijednosti Δx jako velik.

6. ZAKLJUČAK

Tema ovog rada bila je softverska implementacija te usporedba i analiza pojedinih numeričkih metoda za aproksimaciju integracije i derivacije funkcije. U radu su sadržane teorijske osnove integracije i derivacije funkcije te opisane numeričke metode koje se bave ovom problematikom. Numeričke metode pokazuju se kao moćan alat kod izgradnje algoritama za rješavanje ovakvih problema. Za praktični dio rada, uz pomoć numeričkih metoda, razvijena je aplikacija koja je u mogućnosti računati integraciju polinoma i trigonometrijske funkcije te derivaciju funkcije polinoma. Aplikacija kao rezultat vraća korisniku numeričko rješenje te graf funkcije. U radu je napravljena usporedba i analiza rezultata. Kod numeričke integracije najtočnija se pokazala Simpsonova metoda integracije. Trapezna metoda i metoda srednje točke daju slične rezultate, dok su najmanju točnost pokazale metode lijeve i desne sume. Kod numeričke integracije za veću točnost aproksimacije važno je odabrati dovoljno velik n. Kod numeričke derivacije, implementirana je metoda diferencije unaprijed. Kod numeričke derivacije bitno je uzeti jako mali Δx, kako bi aproksimacija dala zadovoljavajuće rezultate. Gledajući sa aspekta autora ovog diplomskog rada, aplikacija je zadovoljavajuće napravljena, no moguće ju je još poboljšati. Prvotna misao je bila omogućiti korisniku unos „bilo kakvog" izraza u polje teksta, iz kojega bi aplikacija kupila podatke. Taj posao je jednim dijelom uspješno odrađen, budući da je u polje teksta omogućen unos polinoma višeg reda te prepoznavanja prioriteta matematičkih operacija, no unos trigonometrijskih funkcija u polje teksta nije integrirano te je u ovoj verziji aplikacije zaseban dio.

LITERATURA

[1] G.V.Milovanović, M.A.Kovačević, M.M. Spalević: NUMERIČKA MATEMATIKA, Zbirka rešenih problema, Niš/Kragujevac, 2002.

[2] R.Scitovski: Numerička matematika, Grafika d.o.o Osijek, Osijek, 2004.

[3] E.Rac Marinić Kragić: Kako je Arhimed računao površinu odsječka parabole, MIŠ,[online] dostupno na URL: https://mis.element.hr/fajli/895/50-05.pdf

[4] M.Kosor, Određeni integral-snimka predavanja [online], dostupno na URL: https://www.youtube.com/watch?v=m0DQ3DXlNHw

[5] B.Širola, Matematika 2: Riemannov integral [online], dostupno na URL: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mat2pf/skripta/MAT2_1.pdf

[6] Z.Pavić Određeni integral [online], dostupno na URL: http://www.sfsb.unios.hr/~zpavic/M2/IIOdredeniIntegrali.pdf

[7] Derivacija, Wikipedia, dostupno na na [URL]: https://hr.wikipedia.org/wiki/Derivacija

[8] Derivacije: radni nerecenzirani materijal za predavanja, [online] dostupno na URL: https://www.mathos.unios.hr/matefos/Files/predavanja/p8.pdf

SAŽETAK

Numerička integracija i numerička derivacija jako su važne za razvoj tehnike i znanosti. Cilj ovog diplomskog rada bio je proučiti numeričke metode za rješavanje integrala i derivacije funkcije te napraviti analizu metoda. Za tu potrebu napravljena je aplikacija nazvana NumericalMathSolver koja uz pomoć numeričkih algoritama daje numeričko i grafičko rješenje integrala te derivacije funkcije. U radu su uz teorijsku osnovu, prikazane mogućnosti aplikacije te prikaz, usporedba i analiza rezultata.

Ključne riječi: numerička integracija, numerička derivacija, analiza metoda

DESKTOP APPLICATION FOR SOLVING DEFINITE INTEGRALS AND CALCULATING DERIVATIVE OF FUNCTION BY NUMERICAL MATHEMATICS METHODS

ABSTRACT

Numerical integration and numerical differentiation are very important for the development of technique and science. The aim of this master thesis was to study numerical methods for solving integrals and derivative of functions and analyze the methods. An application called NumericalMathSolver was created for this purpose, which, with the aid of numerical algorithms, provides the numerical and graphical solution of the integrals and derivative of the function. In this thesis was presented theoretical basis, the possibilities of the application and the presentation, comparison and analysis of the results.

Keywords: numerical integration, numerical differentiation, analyze the methods

ŽIVOTOPIS

Mateo Miličić rođen je 05. kolovoza 1993. u Bruchsalu, Njemačka. 2000. godine upisuje OŠ Orašje u Orašju, koju završava 2008. godine sa prosjekom 5,0 te titulom najboljeg učenika generacije. Sudjelovao je na mnogim županijskim natjecanjima iz matematike. 2008 godine upisuje opću gimnaziju u Srednjoj školi Fra Martina Nedića u Orašju. Nakon završene srednje škole, 2012. godine upisuje Elektrotehnički fakultet u Osijeku. 2015. godine završava studij elektrotehnike na smjeru Komunikacije i Informatika i stiče akademski stupanj prvostupnika elektrotehnike. Iste godine upisuje diplomski studij na smijeru Komunikacijske tehnologije. Aktivno se bavi sportom te je uspješno sudjelovao na brojnim državnim, regionalnim i internacionalnim natjecanjima.

Mateo Miličić

PRILOZI

Na priloženom CD-u nalazi se dokument rada u docx i pdf formatu te izvorni kod aplikacije.