

# Analiza i sinteza sustava upravljanja robotskom rukom s jednim zglobovom

---

**Bunčić, Ivan**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:200:530232>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-05**

*Repository / Repozitorij:*

[Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek](#)



**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU**

**FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I  
INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA**

**Sveučilišni studij**

**ANALIZA I SINTEZA SUSTAVA UPRAVLJANJA  
ROBOTSKOM RUKOM S JEDNIM ZGLOBOM**

**Završni rad**

**Ivan Bunčić**

**Osijek, 2019.**

## Sadržaj

1. UVOD .....	1
1.1. Zadatak završnog rada .....	1
2. OPIS PROCESA .....	2
2.1. Robotska ruka s jednim zglobovom opisana kao sustav 2. reda .....	2
2.1.1. Nelinearni model procesa .....	2
2.1.2. Određivanje prijenosne funkcije .....	4
2.2. Robotska ruka s jednim zglobovom opisana kao sustav 3. reda .....	5
2.2.1. Nelinearni model procesa .....	5
2.2.2. Određivanje prijenosne funkcije .....	6
3. ANALIZA STABILNOSTI PROCESA .....	9
3.1. Model procesa 2. reda.....	9
3.1.1. Analitičke metode stabilnosti.....	9
3.1.2. Grafoanalitičke metode stabilnosti .....	10
3.1.3. Odziv procesa na skokovitu pobudu .....	13
3.2 Model procesa 3. reda.....	13
3.2.1. Analitičke metode stabilnosti.....	13
3.2.2. Grafoanalitičke metode stabilnosti .....	14
3.2.3. Odziv procesa na step pobudu .....	16
3.3. Usporedba linearnog i nelinearnog procesa.....	17
4. SINTEZA REGULATORA .....	21
4.1. Sinteza regulatora pomoću krivulje mjesta korijena .....	21
4.2. Sinteza regulatora za sustav 2. reda.....	22
4.3. Sinteza regulatora za sustav 3. reda.....	23
5. SIMULACIJA REGULACIJSKOG KRUGA .....	26
5.1. Proces 2. reda.....	26
5.2. Proces 3. reda.....	28

6. ZAKLJUČAK .....	30
LITERATURA.....	31
SAŽETAK.....	32
PRILOG .....	33

## **1. UVOD**

Robotska ruka se danas vrlo često može susresti u industrijskom ili proizvodnom postrojenju. Najčešće ih se susreće na proizvodnim trakama u automobilskoj industriji gdje više takvih robotskih ruka rade zajedno i svaka ima svoju ulogu, npr. bojanje, zavarivanje, premještanje itd. U industrijskoj primjeni češće se javljaju robotske ruke s više zglobova, ali u ovom radu će biti obrađena ruka s jednim zglobom radi jednostavnosti [1]. U drugom je poglavlju opisana robotska ruka kao proces 2. odnosno 3. reda, ovisno o tome zanemaruje li se odnosno uzima u obzir masa ruke i armaturni krug istosmjernog pogonskog motora. U trećem je poglavlju izvršena analiza stabilnosti procesa kroz grafoanalitičke i analitičke metode stabilnosti te usporedba odziva linearnog i nelinearnog procesa i odzivi istih na skokovitu pobudu. U četvrtom je poglavlju obrađen postupak sinteze regulatora uz pomoć krivulje mjesta korijena te se u petom poglavlju analiziraju odzivi modela procesa izrađenih u Simulink programu upravljanih PID regulatorom te je u posljednjem poglavlju dan zaključak na temelju dobivenih rezultata.

### **1.1. Zadatak završnog rada**

Zadatak završnog rada je provesti analizu i sintezu sustava upravljanja robotskom rukom s jednim zglobom. Zadatak uključuje razvoj modela i simulaciju te vizualizaciju u MATLAB-u.

## 2. OPIS PROCESA

U ovom će se poglavlju robotska ruka prikazana na slici 2.1. opisati na dva načina, kao proces 2. reda u kojem se uzimaju u obzir određena zanemarenja te kao proces 3. reda u kojem će ruka biti opisana na vjerniji i realističniji način. Za svaki je proces pojašnjen način određivanja nelinearnog modela i prijenosne funkcije procesa na temelju koje će se vršiti analiza stabilnost procesa i sinteza PID regulatora.

### 2.1. Robotska ruka s jednim zglobovom opisana kao sustav 2. reda

U ovom potpoglavlju je razmatran jednostavniji model procesa robotske ruke s jednom zglobovom u kojem se zanemaruje masa ruke i armaturni krug istosmjernog pogonskog elektromotora.

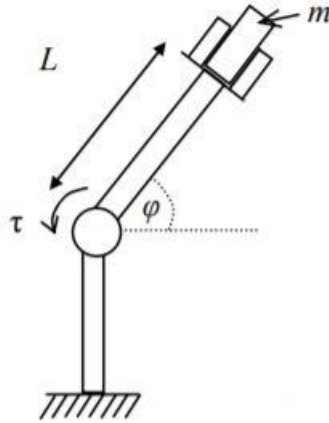
#### 2.1.1. Nelinearni model procesa

Za jednostavniji model robotske ruke s jednim zglobovom uzima se u obzir samo ostvareni moment motora koji djeluje u zglobovu ruke. Zadane su dvije momentne diferencijalne jednačbe prvog reda koje glase:

$$J \frac{d\omega}{dt} + b\omega + mgL \cos\varphi = \tau \quad (2 - 1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \quad (2 - 2)$$

gdje je:  $J$  – moment inercije,  $b$  – koeficijent trenja,  $g$  – gravitacijsko ubrzanje,  $\tau$  – moment motora koji djeluje u zglobovu ruke,  $\omega$  – kutna brzina gibanja ruke,  $m$  – masa predmeta u hvataljkama ruke,  $L$  – duljina ruke,  $\varphi$  – kut (Sl. 2.1).



**Slika 2.1.** Robotska ruka s jednim zglobom [2]

Nelinearni model opisan je diferencijalnim jednađbama (2 – 1) i (2 – 2). Ako se (2 – 2) uvrsti u (2 – 1) dobije se sljedeća diferencijalna jednađba 2. kojom se proces može opisati:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + b \frac{d\varphi}{dt} = \tau - mgL \cos \varphi \quad (2 - 3)$$

Pretpostavlja se da je zadana vrijednost radne točke  $\varphi_0$  te je potrebno odrediti parametre radne točke  $\omega_0$  i  $\tau_0$ . Oni se određuju tako da se sve derivacije nelinearnog matematičkog modela izjednače s nulom i sve veličine koje ovise o vremenu zamijene s njihovim vrijednostima u radnoj točki.

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0 \quad (2 - 4)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = 0 \quad (2 - 5)$$

Uvrštavanjem izraza (2 – 4) i (2 – 5) u diferencijalne jednađbe (2 – 1) i (2 – 2) dobiju se sljedeći izrazi za parametre radne točke:

$$\omega_0 = 0 \quad (2 - 6)$$

$$\tau_0 = mgL \cos \varphi_0 \quad (2 - 7)$$

### 2.1.2. Određivanje prijenosne funkcije

Prvi korak k određivanju prijenosne funkcije je linearizacija matematičkog modela. Linearizacija procesa 2. reda vrši se razvojem jednadžbe (2 – 3) u Taylorov red u okolici radne točke  $\varphi_0$ . Razvojem diferencijalne jednadžbe u Taylorov red dobiva se linearni matematički model robotske ruke 2. reda i on glasi:

$$J \frac{d^2 \Delta \varphi}{dt^2} + b \frac{d \Delta \varphi}{dt} = \Delta \tau + mgL \sin \varphi_0 \cdot \Delta \varphi \quad (2 - 8)$$

U linearnom modelu više ne postoje nelinearne matematičke operacije kao što je množenje sa vremenski promjenjivom veličinom. Slovom  $\Delta$  označava se odstupanje od mirnog položaja, odnosno od radne točke.

Drugi korak pri određivanju prijenosne funkcije je transformacija linearnog matematičkog modela Laplaceovom transformacijom u područje kompleksne varijable  $s$ . Transformacijom jednadžbe (2 – 8) dobije se prikaz linearnog matematičkog modela u frekvencijskom području i on glasi:

$$Js^2 \cdot \Phi(s) + bs \cdot \Phi(s) = T(s) + mgL \sin \varphi_0 \cdot \Phi(s) \quad (2 - 9)$$

Najčešći oblik prijenosne funkcije, i onaj koji će biti razmatran dalje, je  $G(s)=Y(s)/U(s)$ , odnosno ovisnost izlaza i ulaza. Ulazna veličina kod procesa 2. reda je moment motora koji djeluje u zglobu ruke  $T(s)$ , dok je izlaz kut robotske ruke  $\Phi(s)$ . Modificiranjem jednadžbe (2 – 9) dobiva se sljedeća prijenosna funkcija:

$$G_P(s) = \frac{1}{Js^2 + bs - mgL \sin \varphi_0} \quad (2 - 10)$$

Uvrštavanjem sljedećih zadanih numeričkih vrijednosti parametara;  $J = 0.8 \text{ kg m}^2$ ,  $m = 0.05 \text{ kg}$ ,  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ,  $b = 0.08 \text{ Nm s/rad}$ ,  $L = 0.2 \text{ m}$  i  $\varphi_0 = -\pi/3$  u jednadžbu (2 – 10) dobiva se sljedeći oblik prijenosne funkcije:

$$G_P(s) = \frac{1}{0.8s^2 + 0.08s + 0.0866} \quad (2 - 11)$$



## 2.2. Robotska ruka s jednim zglobom opisana kao sustav 3. reda

U ovom potpoglavlju je razmatran model procesa robotske ruke s jednom zglobom u kojem se uzima u obzir masa ruke i armaturni krug istosmjernog pogonskog elektromotora.

### 2.2.1. Nelinearni model procesa

Da bi se što vjernije i realističnije prikazala dinamika robotske ruke, uzimaju se u obzir i električne veličine elektromotora koji pogoni zglob ruke. Upravljanje brzinom okretanja elektromotora vrši se preko napona armature ili struje uzbude. U ovom slučaju upravljanje će se vršiti preko napona armature, što znači da je potrebno odrediti jednadžbe armaturnog kruga elektromotora. Armaturni krug se može opisati sljedećim jednadžbama:

$$u_a = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt} + E \quad (2 - 12)$$

gdje je  $u_a$  – armaturni napon motora,  $i_a$  – armaturna struja motora,  $R_a$  – otpor armaturnog motora,  $L_a$  – induktivitet armaturnog kruga,  $E$  – protuelektromotorna sila [3].

Protuelektromotorna sila  $E$  predstavlja napon induciran u armaturnom svitku zbog okretanja rotora i proporcionalna je brzini vrtnje:

$$E = K\omega \quad (2 - 13)$$

Moment  $\tau$  djeluje na rotor elektromotora i proporcionalan je struji armature  $i_a$ :

$$\tau = Ki_a \quad (2 - 14)$$

gdje je  $K$  – koeficijent proporcionalnosti armaturne struje i momenta motora.

Jednadžba (2 – 1) se modificira tako da se uzme u obzir masa ruke koja je bila zanemarena. Momentna jednadžba ruke u tom slučaju će izgledati ovako:

$$J \frac{d\omega}{dt} + b\omega + Mg \frac{L}{2} \cos\varphi + mgL \cos\varphi = \tau \quad (2 - 15)$$

gdje je  $M$  – masa robotske ruke.

Uvrštavanjem izraza za protuleketromotornu silu  $E$  (2 – 13), u jednadžbu (2 – 12) dobije se sljedeća jednadžba:

$$u_a = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K\omega \quad (2 - 16)$$

Robotska ruka je sada opisana kao proces 3. reda diferencijalnim jednadžbama (2 – 2), (2 – 15) i (2 – 16) te algebarskim izrazom (2 – 14). Parametri  $\varphi_0$  i  $\omega_0$  su već poznati te je potrebno još odrediti parametre radne točke  $\tau_0$ ,  $i_{a0}$  i  $u_{a0}$ . Uvrštavanjem jednakosti (2 – 4) i (2 – 5) u diferencijalne jednadžbe (2 – 15) i (2 – 16) dobiju se sljedeći izrazi za parametre radne točke:

$$\tau_0 = \left(\frac{M}{2} + m\right) Lg \cos\varphi_0 \quad (2 - 17)$$

$$u_{a0} = i_{a0} R_a$$

Parametar  $i_{a0}$  se odredi tako da se u izraz (2 – 14) uvrste vrijednosti u radne točke te se dobije sljedeća jednakost:

$$i_{a0} = \frac{\tau_0}{K} \quad (2 - 19)$$

### 2.2.2. Određivanje prijenosne funkcije

Uvrštavanjem izraza (2 – 2) i (2 – 14) u (2 – 15) i sređivanjem dobije se sljedeća diferencijalna jednadžba 2. reda:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + b \frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{M}{2} + m\right) gL \cos\varphi = K i_a \quad (2 - 20)$$

Uvrštavanjem (2 – 2) u (2 – 16) dobije se:

$$u_a = i_a R_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K \frac{d\varphi}{dt} \quad (2 - 21)$$

Linearizacijom izraza (2 – 12) i (2 – 13) u okolici radne točke  $\varphi_0$  te modificiranjem dobivenih jednađbi tako da se derivacije prebace na lijevu stranu jednakosti dobiju se sljedeće dvije linearne diferencijalne jednađbe:

$$J \frac{d^2 \Delta \varphi}{dt^2} + b \frac{d \Delta \varphi}{dt} = K \Delta i_a + \left( \frac{M}{2} + m \right) g L \sin \varphi_0 \cdot \Delta \varphi \quad (2 - 22)$$

$$L_a \frac{d \Delta i_a}{dt} + K \frac{d \Delta \varphi}{dt} = \Delta u_a - R_a \Delta i_a \quad (2 - 23)$$

Laplaceovom transformacijom jednađbi (2 – 22) i (2 – 23) dobije se:

$$J s^2 \Phi(s) + b s \Phi(s) = K I_a(s) + \left( \frac{M}{2} + m \right) g L \sin \varphi_0 \Phi(s) \quad (2 - 24)$$

$$L_a s I_a(s) + K s \Phi(s) = U_a(s) - R_a I_a(s) \quad (2 - 25)$$

Modificiranjem (2 – 24) dobije se:

$$\Phi(s) \left( J s^2 + b s - \left( \frac{M}{2} + m \right) g L \sin \varphi_0 \right) = K I_a(s) \quad (2 - 26)$$

Modificiranjem (2 – 25) dobije se:

$$I_a(s) = \frac{U_a(s) - K s \Phi(s)}{L_a s + R_a} \quad (2 - 27)$$

Uvrštavanjem jednađbe (2 – 26) u jednađbu (2 – 27) i sređivanjem izraza dobije se prijenosna funkcija procesa 3. reda,  $\Phi(s)/U_a$ :

$$G_P(s) = \frac{K}{L_a J s^3 + (L_a b + R_a J) s^2 + 0.5(2 R_a b - (L_a M + L_a 2m) \cdot g L \sin \varphi_0 + 2 K^2) s - \frac{M + 2m}{2} g L \sin \varphi_0} \quad (2 - 28)$$

Uvrštavanje podataka navedenih kod procesa 2. reda i sljedećih numeričkih vrijednosti parametara;  $M = 0.5 \text{ kg}$ ,  $R_a = 0.5 \text{ } \Omega$ ,  $L_a = 0.017 \text{ H}$ ,  $K = 3 \text{ Vs}$  u prijenosnu funkciju (2 – 28) daje:

$$G_p(s) = \frac{3}{0.0136s^3 + 0.4014s^2 + 9.049s + 0.26} \quad (2 - 29)$$

### 3. ANALIZA STABILNOSTI PROCESA

Vrlo važan korak pri određivanju sustava upravljanja je analiza stabilnosti procesa. Analiza stabilnosti se odnosi na utvrđivanje apsolutne ili relativne granice stabilnosti uz pomoć analitičkih ili grafoanalitičkih metoda poput Hurwitzovog kriterija stabilnosti ili Bodeovog dijagrama koji će biti obrađeni u ovom poglavlju. Definicija asimptotske stabilnosti potječe iz limesa težinske funkcije  $g(t)$  koji glasi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 0 \quad (3 - 1)$$

U slučaju da limes od  $g(t)$  nije nula ili ako poprimi neku konstantu vrijednost različitu od nule, sustav je nestabilan, odnosno na granici stabilnosti.[4]

#### 3.1. Model procesa 2. reda

U ovom potpoglavlju će se analizirati stabilnosti modela 2. reda.

##### 3.1.1. Analitičke metode stabilnosti

Polazište kod analitičkih metoda je karakteristična jednadžba procesa. Cilj ove metode je određivanje intervala podesivog parametra (najčešće pojačanje regulatora  $K$ ) za koji će zatvoreni regulacijski krug biti stabilan. Ove metode daju uvid u apsolutnu stabilnost, odnosno daju odgovor na pitanje da li je sustav stabilan ili ne, što im je ujedno i najveće ograničenje [5].

Iz prijenosne funkcije (2 – 11), koja je ujedno i prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga  $G_o(s)$ , odredi se prijenosna funkcija zatvorenog regulacijskog kruga iz koje će se očitati karakteristični polinom.

$$G_x(s) = \frac{KG_o(s)}{1 + KG_o(s)} = \frac{K}{0.8s^2 + 0.08s + 0.0866 + K} \quad (3 - 2)$$

Karakteristični polinom  $P(s)$  jednak je nazivniku prijenosne funkcije zatvorenog regulacijskog kruga te se na temelju njegovih koeficijenata vrši daljnja analiza.

$$P(s) = 0.8s^2 + 0.08s + 0.0866 + K \quad (3 - 3)$$

Nužan, ali ne i dovoljan uvjet za stabilnost je postojanje svih koeficijenata karakterističnog polinoma te jednakost njihovih predznaka. Koeficijenti karakterističnog polinoma su:

- $a_0 = 0.0866 + K$
- $a_1 = 0.08$
- $a_2 = 0.8$

Da bi nužan uvjet bio ispunjen, koeficijent  $a_0 = 0.0866 + K$  mora biti veći od nule, dakle  $K > -0.0866$ . Nužan uvjet za ostale koeficijente je trivijalan, očito je da postoje i da su veći od nule.

Dodatni uvjet se određuju iz odnosa koeficijenata. Jedan od načina rješavanja dodatnog uvjeta je pomoću Hurwitzovih determinanti. Da bi dodatan uvjet bio zadovoljen, koeficijenti moraju zadovoljiti sljedeće izraze:

$$D_1 = a_1 > 0 \quad (3 - 4)$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \quad (3 - 5)$$

Uvrštavanjem koeficijenata u izraze (3 – 4) i (3 – 5) dobiju se sljedeći uvjeti:

$$0.08 > 0 \quad (3 - 6)$$

$$0.064 > 0 \quad (3 - 7)$$

Oba rješenja zadovoljavaju dodatni uvjet te je moguće odrediti interval vrijednosti pojačanja  $K$  koji iznosi  $K = \langle 0.08, +\infty \rangle$ . Rezultat je očekivan jer se radi o procesu 2. reda koji je uvijek stabilan bez obzira na veličinu pojačanja.

### 3.1.2. Grafoanalitičke metode stabilnosti

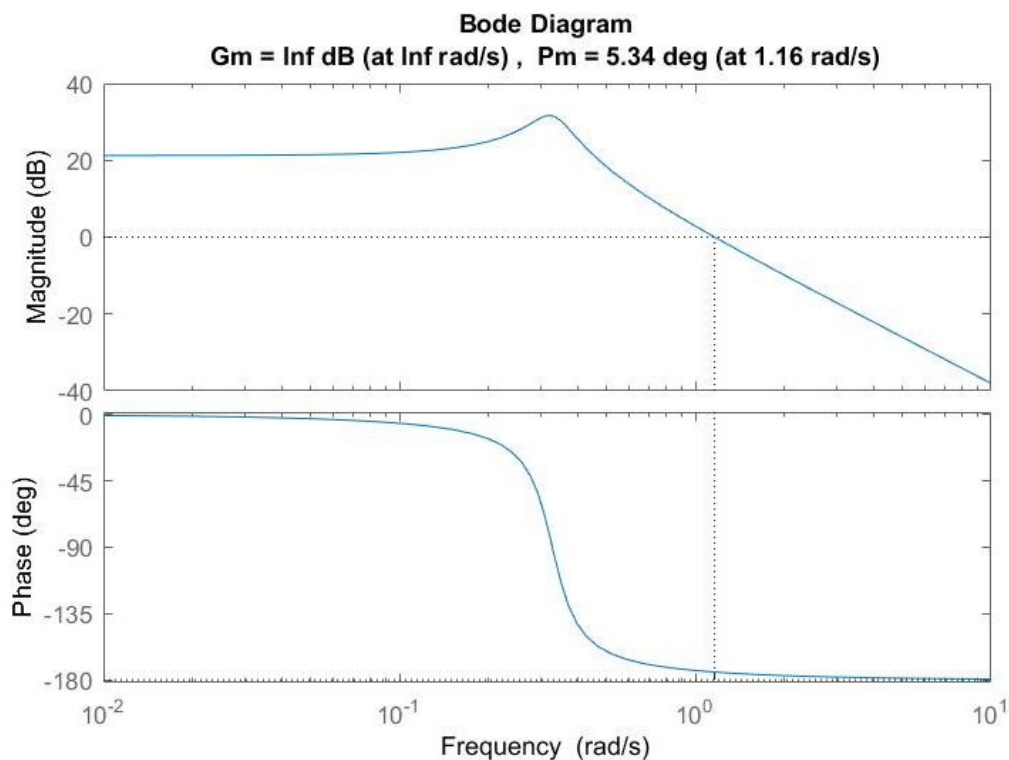
Za razliku od analitičkih, grafoanalitičke metode daju uvid u relativnu stabilnost, odnosno pokazuju udaljenost od granica stabilnosti. Dvije metode koje će biti razmatrane su Bodeov kriterij

stabilnosti i metoda krivulja mjesta korijena (KMK). Polazište kod ovih metoda je prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga  $G_o(s)$ .

### Bodeov dijagram

Kod ove metode od velikog su značaja karakteristične veličine otvorenog regulacijskog kruga:  $\omega_c$  – presječna frekvencija,  $\omega_\pi$  – frekvencija pri kojoj je fazni pomak  $180^\circ$ ,  $A_r$  – amplitudno osiguranje i  $\gamma$  – fazno osiguranje. Pomoću ovih veličina se određuje relativna stabilnost regulacijskog kruga. Zbog kompliciranosti ručnog crtanja, frekvencijske karakteristike su određene pomoću programa MATLAB.

Iz Bodeovog dijagrama prikazanog na slici 3.1. jasno se vidi da  $\omega_\pi$  ne postoji jer se radi o procesu 2. reda. Regulacijski krug može biti nestabilan samo onda kada postoji fazni zakret veći od  $180^\circ$  što s dva pola ovog procesa nije moguće postići. Fazno osiguranje iznosi samo  $5.34^\circ$ , ali to ne predstavlja veliki problem jer je nemoguće dostići iznos manji od  $0^\circ$ . Na amplitudno-frekvencijskom dijagramu se još može primijetiti izdizanje što je posljedica kompleksnog para polova.

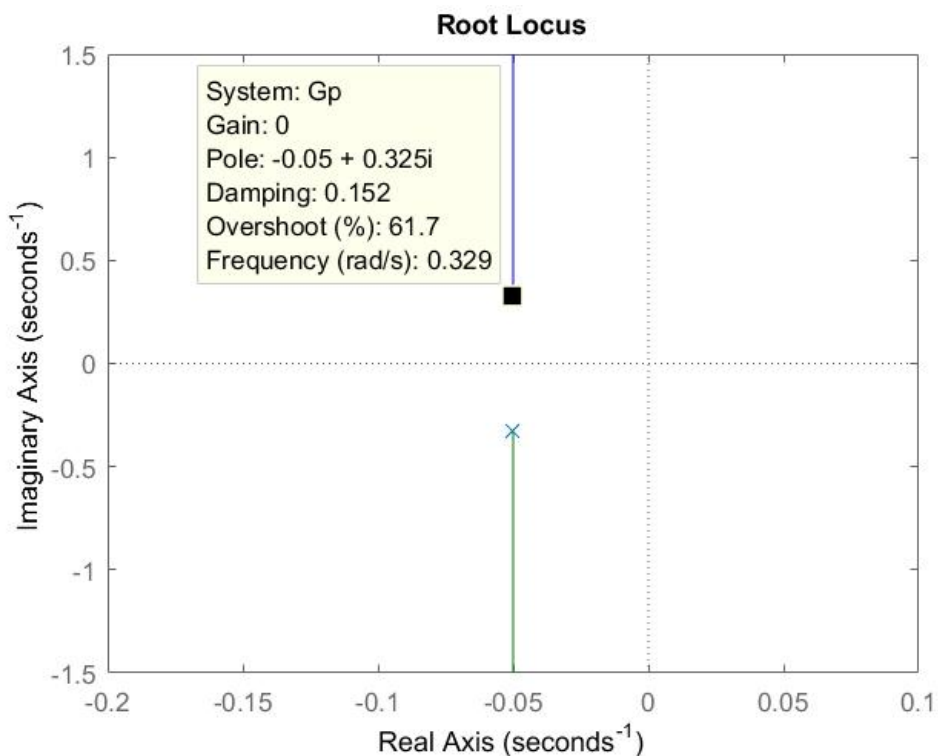


**Slika 3.1.** Bodeov dijagram za proces 2. reda

## Krivulja mjesta korijena

Metoda krivulje mjesta korijena pruža više mogućnosti od uobičajenih grafoanalitičkih metoda te je vrlo korisna pri sintezi regulatora. Prikazuje ponašanje polova zatvorenog regulacijskog kruga pri mijenjanju vrijednosti pojačanja regulatora u području kompleksne varijable. Kao polazište uzimaju se polovi otvorenog regulacijskog kruga. Radi praktičnosti KMK je također određena u programu MATLAB.

Na slici 3.2. prikazana je KMK procesa 2. reda. Sada se može jasno vidjeti da se radi o kompleksnim polovima. Također se vidi da je proces stabilan za bilo koje pojačanje regulatora jer KMK ne prelazi imaginarnu os. Iz podataka koje nudi MATLAB može se očitati relativan koeficijent prigušenja koji iznosi u najboljem slučaju 0.152. U praksi se teži nekoj vrijednosti između 0.7 i 0.9. U ovom primjeru bez upotrebe regulatora ove vrijednosti se ne mogu postići. Idealne vrijednosti se ne mogu postići bez upotrebe sustava upravljanja.

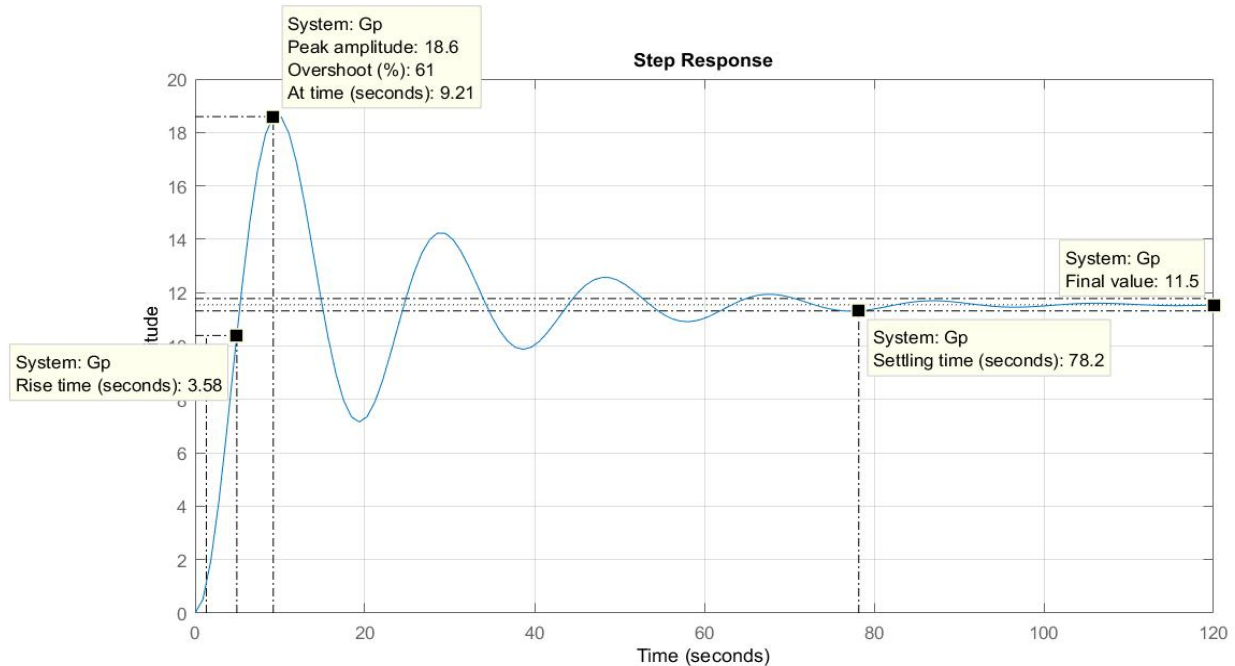


Slika 3.2. Krivulja mjesta korijena za proces 2. reda



### 3.1.3. Odziv procesa na skokovitu pobudu

Na slici 3.3. je prikazan odziv procesa na skokovitu pobudu. Sa slike se može očitati vrijeme porasta koje iznosi 3.58 sekundi i vrijeme prvog maksimuma koje iznosi 9.21 sekundu što ukazuje na to da je proces brz, ali je potrebno puno vremena da postigne ustaljeno stanje. Ovaj rezultat je očekivan jer je fazno osiguranje procesa određenog na Bodeovom dijagramu malog iznosa.



Slika 3.3. Odziv procesa 2. reda na step pobudu

## 3.2 Model procesa 3. reda

U ovom potpoglavlju će se analizirati stabilnosti modela 3. reda.

### 3.2.1. Analitičke metode stabilnosti

Zbog postojanja 3 pola u procesu 3. reda preveliko pojačanje može dovesti regulacijski krug u nestabilno područje, što znači da postoji gornja granica intervala pojačanja  $K$ . Granice intervala se određuju na isti način kao i za proces 2. reda. Prvo je potrebno odrediti prijenosnu funkciju zatvorenog kruga procesa 3. iz prijenosne funkcije (2 – 29):

$$G_x(s) = \frac{KG_o(s)}{1 + KG_o(s)} = \frac{3K}{0.0136s^3 + 0.4014s^2 + 9.049s + 0.26 + 3K} \quad (3 - 8)$$

Pošto je karakteristični polinom jednak nazivniku prijenosne funkcije  $G_x(s)$ , polinom  $P(s)$  je jednak:

$$P(s) = 0.0136s^3 + 0.4014s^2 + 9.049s + 0.26 + 3K \quad (3 - 9)$$

Koeficijenti karakterističnog polinoma su:

- $a_0 = 0.26 + 3K$
- $a_1 = 9.049$
- $a_2 = 0.4014$
- $a_3 = 0.0136$

Koeficijenti  $a_3$ ,  $a_2$  i  $a_1$  zadovoljavaju nužan uvjet, dok za koeficijent  $a_0$  vrijedi uvjet  $0.26 + 3K > 0$ , odnosno  $K > -0.0866$ . Dodatan uvjet također mora biti zadovoljen. Uvrštavanjem koeficijenata u (3 – 4) i (3 – 5) dobiju se sljedeći uvjeti:

$$0.0136 > 0 \quad (3 - 10)$$

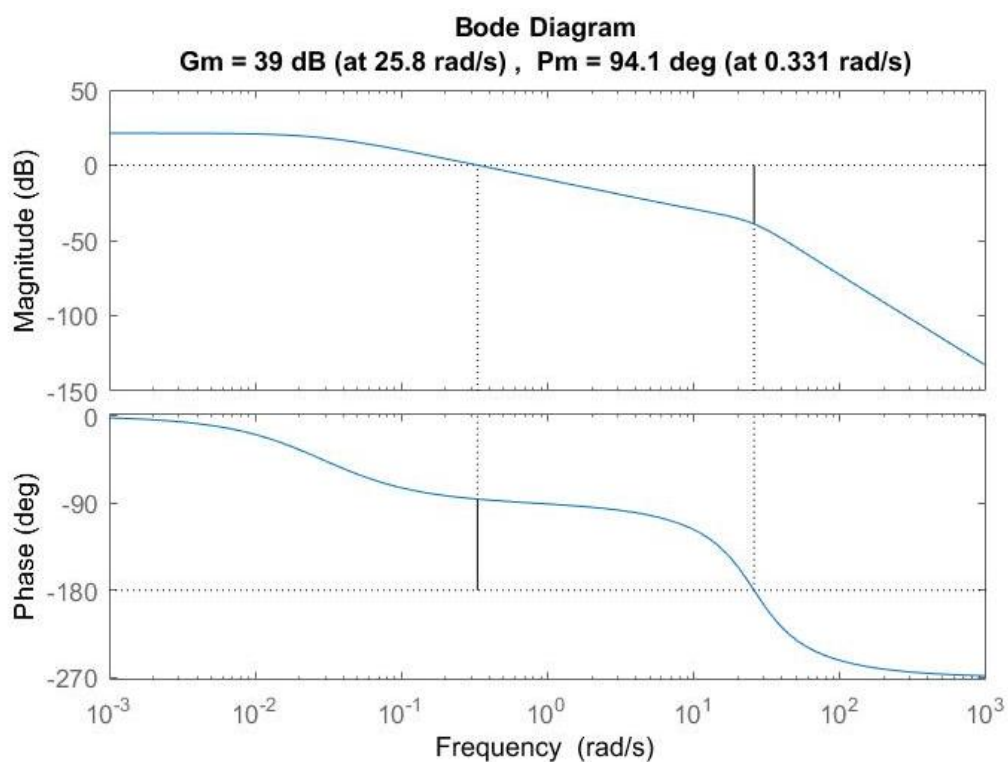
$$K < 88.95 \quad (3 - 11)$$

Dodatni uvjet je zadovoljen te je moguće odrediti granice intervala stabilnosti koje za proces 3. reda iznose  $K = (0.0136, 88.95)$ . Pojačanje ne smije prekoračiti iznos od 88.95 jer će proces u suprotnom postati nestabilan.

### 3.2.2. Grafoanalitičke metode stabilnosti

#### Bodeov dijagram

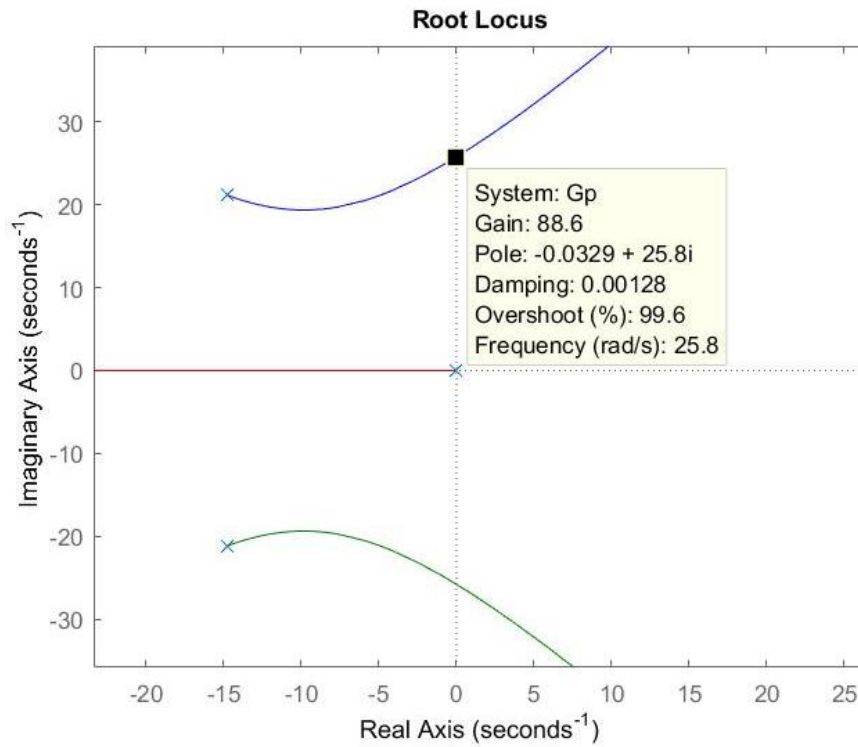
Na Bodeovom dijagramu na slici 3.3. se može primijetiti kako fazna karakteristika prelazi  $-180^\circ$  pri frekvenciji 25.8 rad/s. Kada je fazni pomak manji od tog iznosa sustav je nestabilan. Kako je  $\omega_c < \omega_\pi$ , sustav je stabilan, no zbog većih iznosa faznog i amplitudnog osiguranja sustav je dosta spor i prigušen. Kritično pojačanje određeno sa Bodeovog dijagrama iznosi 39dB, odnosno 89.125.



**Slika 3.4.** Bodeov dijagram za proces 3. reda

### Krivulje mjesta korijena

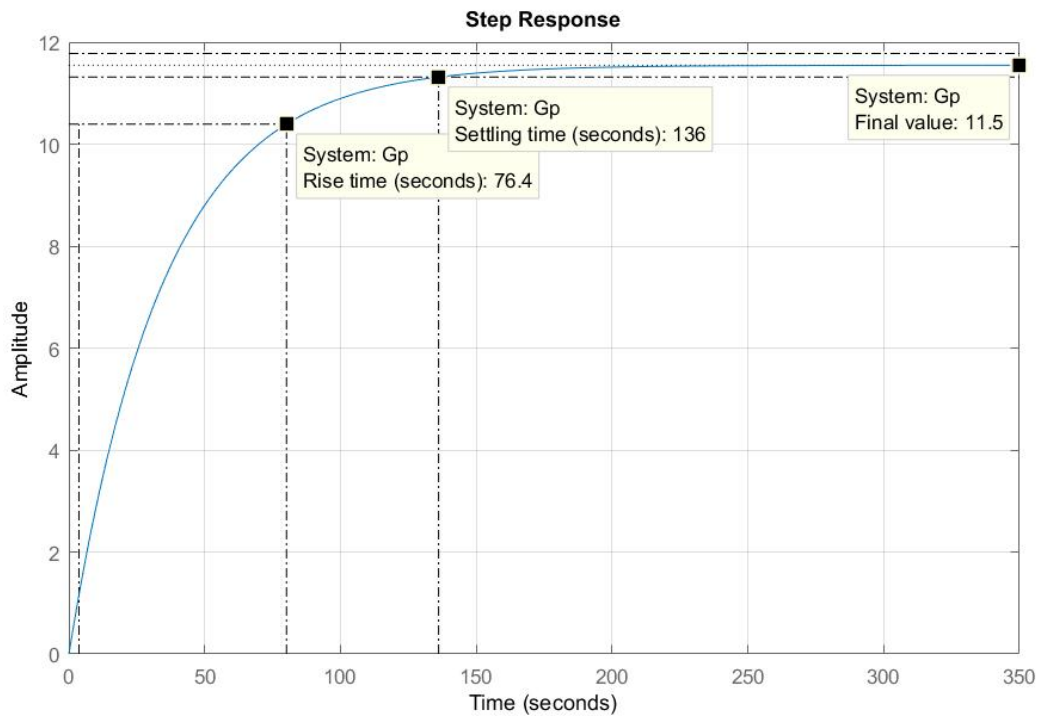
Na slici 3.4. je prikazana KMK procesa 3. reda. Granica stabilnosti na KMK odgovara vrijednosti određenoj analitičkim putem. Jasnno se vidi kako 3. pola procesa u slučaju prevelikog pojačanja mogu sustav učiniti nestabilnim. Ni u ovom primjeru nije moguće postići zadovoljavajuće nadvišenje i prigušenje bez upotrebe regulatora.



**Slika 3.5.** Krivulja mjesta korijena za proces 3. reda

### 3.2.3. Odziv procesa na step pobudu

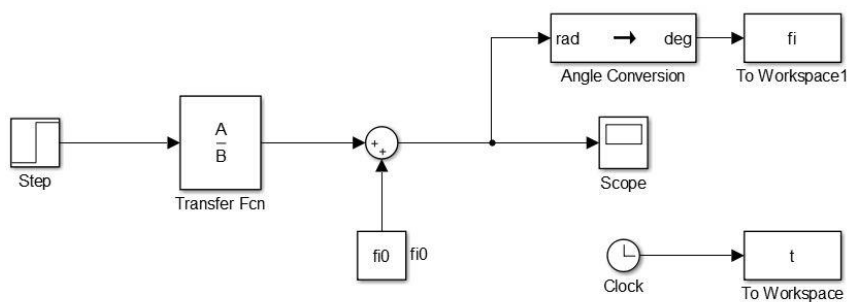
Slika 3.6. pokazuje odziv procesa 3. reda na step pobudu. Kao što je već određeno na temelju Bodeovog dijagrama, proces je spor i prigušen. Vrijeme porasta iznosi 76.4 sekunde i proces nema nadvišenja, već odmah nakon što dosegne konačnu vrijednost nastupa ustaljeno stanje.



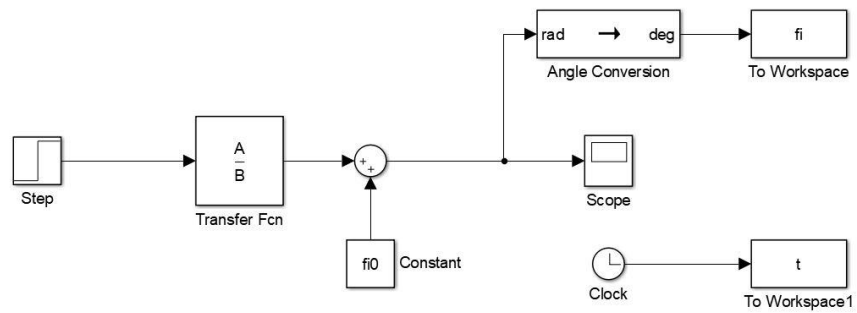
Slika 3.6. Odziv procesa 3. reda na step pobudu

### 3.3. Usporedba linearnog i nelinearnog procesa

Slike 3.7. i 3.8. prikazuju linearne modele procesa. Nazivnik i brojnik prijenosne funkcije su izračunati uz pomoć MATLAB skripte. Izlazna veličina je preračunata u stupnjeve uz pomoć *Angle Conversion* funkcijskog bloka.

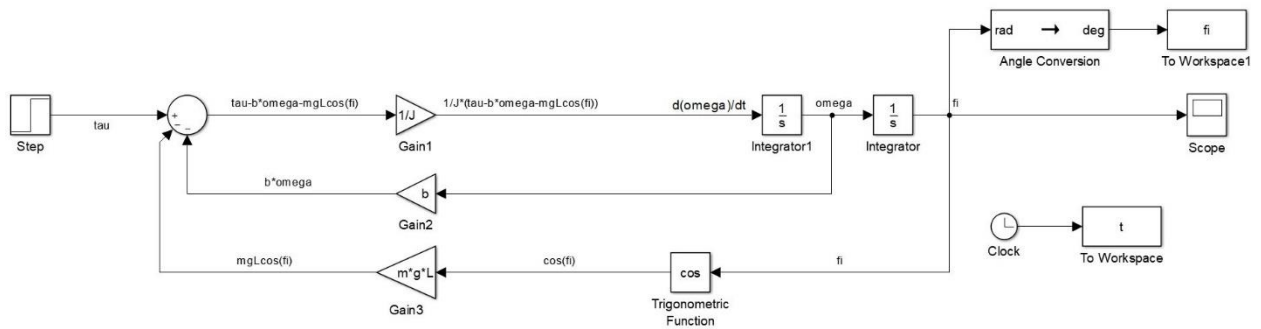


Slika 3.7. Linearni model procesa 2. reda

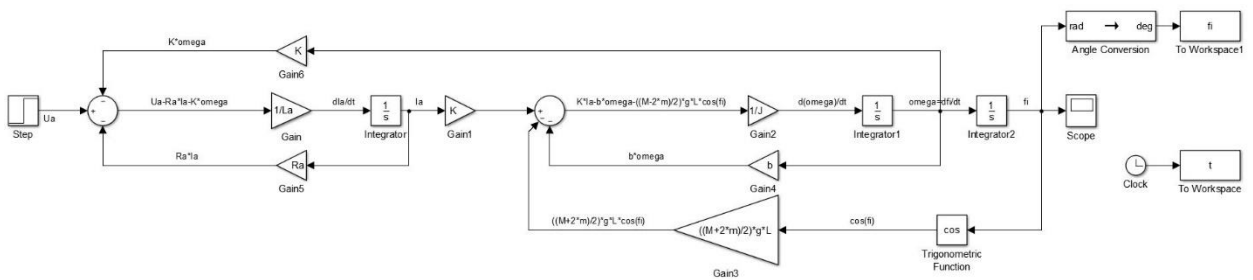


**Slika 3.8.** *Linearni model procesa 3. reda*

Slike 3.9. i 3.10. prikazuju nelinearne modele procesa. Kao početne vrijednosti integratora korištene su vrijednosti parametara u radnoj točki određeni u drugom poglavlju.

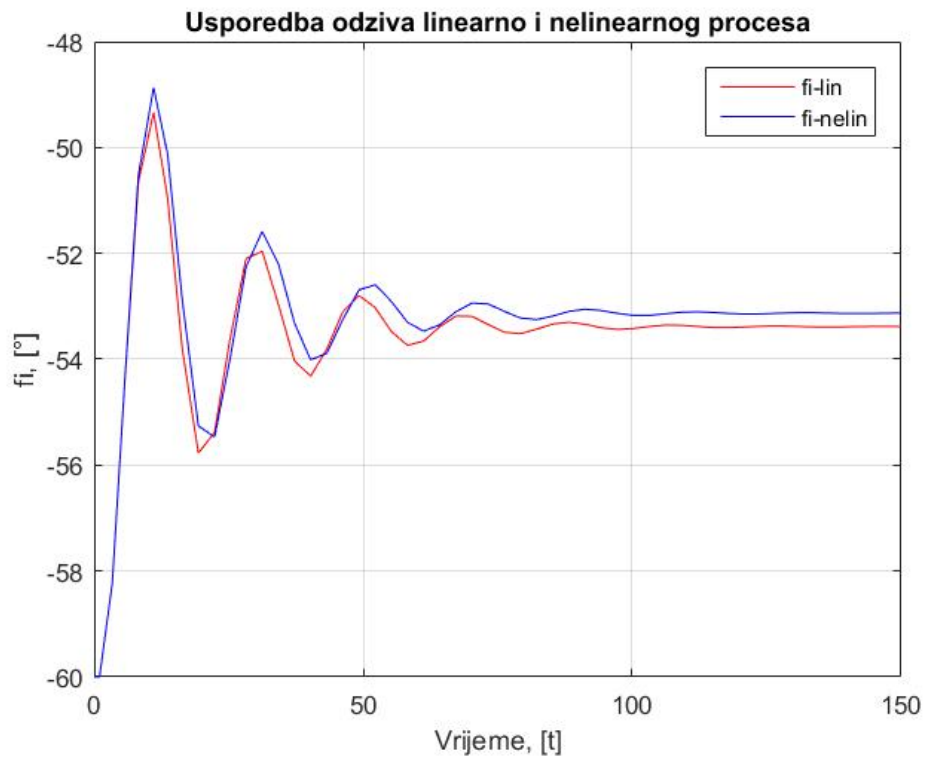


**Slika 3.9.** *Nelinearni model procesa 2. reda*

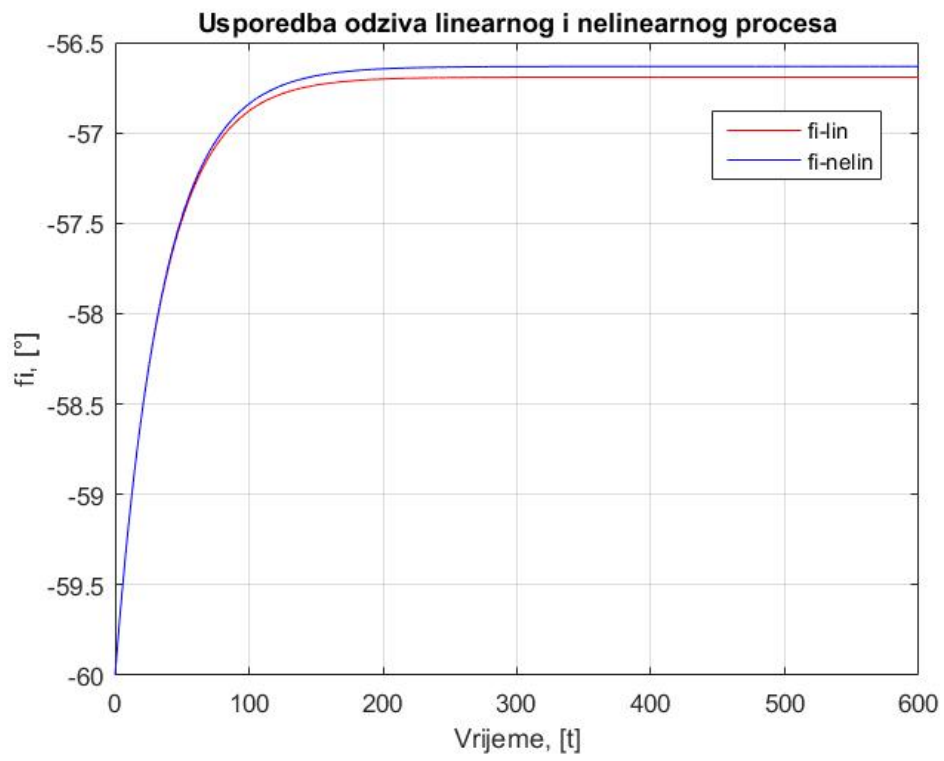


**Slika 3.10.** *Nelinearni model procesa 3. reda*

Slike 3.11. i 3.12. prikazuju usporedbu linearnih i nelinearnih modela na skokovitu pobudu. Razlika postoji zbog različitog ponašanja linearnog i nelinearnog matematičkog modela na pobudu te zbog greške aproksimacije pri linearizaciji nelinearnog modela.



**Slika 3.11.** Usporedba odziva linearnog i nelinearnog procesa 2. reda na step pobudu



**Slika 3.12.** Usporedba odziva linearnog i nelinearnog procesa 3. reda na step pobudu



## 4. SINTEZA REGULATORA

Sinteza regulatora je jedan od najvažnijih koraka projektiranja sustava upravljanja. Zahtjevi koji se postavljaju na sustave upravljanja su stabilnost regulacijskog kruga, smanjen utjecaj poremećajnih vrijednosti na reguliranu veličinu, regulirana veličina more što točnije i brže slijediti referentnu vrijednost i smanjena osjetljivost na promjenu parametara regulacijskog kruga. Postoje analitički i klasični postupci sinteze. Klasični postupci se svode na određivanje parametara regulatora čija je struktura unaprijed određena. U ovom radu biti će obrađena klasična metoda sinteze PID regulatora pomoću krivulje mjesta korijena. Kod svih klasičnih postupaka postoje dva polazišta, a to su matematički model procesa i zahtjevi na traženo vladanje regulacije. Zahtjevi su obično dani kroz dinamičke pokazatelje kakvoće regulacije. Cilj sinteze u ovom radu je postići takvo vladanje da relativni koeficijent prigušenja  $\zeta$  iznosi 0.7.

U ovom će poglavlju za proces 2. reda biti prikazan postupak određivanja prijenosne funkcije PID regulatora, dok će za proces 3. reda postupak biti automatiziran u programu MATLAB.

### 4.1. Sinteza regulatora pomoću krivulje mjesta korijena

Prije crtanja KMK potrebno je odrediti prijenosnu funkciju procesa i regulatora koji zajedno čine regulacijsku stazu. Prijenosna funkcija PID regulatora glasi:

$$G_R(s) = K \frac{(1 + sT_I)(1 + sT_D)}{s} \quad (4 - 1)$$

Pošto idealni D član nije moguće realizirati uz pol u ishodištu dodaje mu se mala vremenska konstanta te se dobije PIDT<sub>1</sub> regulator. Ovakav PID regulator je moguće realizirati i njegova prijenosna funkcija glasi:

$$G_R(s) = K \frac{(1 + sT_I)(1 + sT_D)}{s(1 + sT_V)} \quad (4 - 2)$$

Parametri regulatora su postavljeni tako da su obje nule na mjestu kompleksnih polova procesa dok je pol postavljen na 10 puta veću udaljenost od udaljenosti realne komponente nule regulatora od imaginarne osi.

Množenjem prijenosne funkcije procesa i PID regulatora dobiva se prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga pomoću koje se crta KMK. U programu MATLAB iz KMK je potrebno očitati pojačanje pri kojem će relativni koeficijent prigušenja iznositi 0.7.

## 4.2. Sinteza regulatora za sustav 2. reda

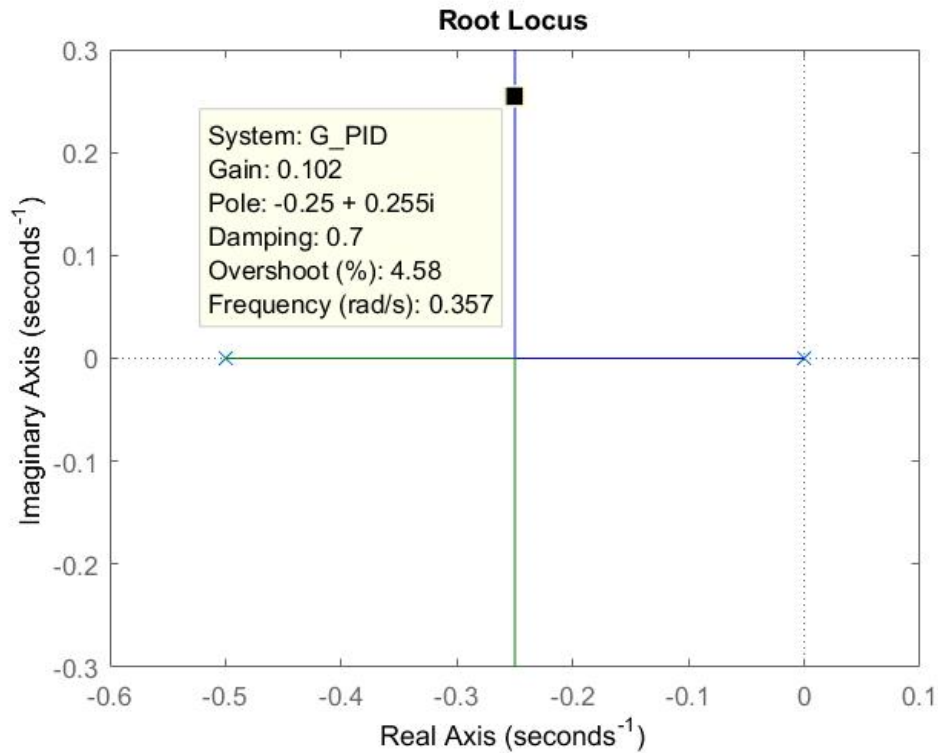
Kompleksni polovi procesa prijenosne funkcije (2 – 11) su  $s_{1,2} = -0.05 \pm j0.3252$ . Nakon postavljanja nula i polova PID regulatora dobije se sljedeća prijenosna funkcija regulatora:

$$G_R(s) = K \frac{(s + 0.05 + j0.3252)(s + 0.05 - j0.3252)}{s(s + 0.5)} \quad (4 - 3)$$

Kao polazište pri crtanju KMK se upotrebljava prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga koja je jednaka umnošku jednadžbi (2 – 11) i (4 – 3). Nule regulatora će kompenzirati kompleksne polove procesa te će konačna prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga glasiti:

$$G_O(s) = G_P(s) \cdot G_R(s) = K \frac{1.25}{s(s + 0.5)} \quad (4 - 4)$$

Korištenjem MATLAB programa za crtanje KMK-a dobije se prikaz na slici 4.1. Dominantni kompleksni polovi su sada kompenzirani te su ostali samo realni polovi koji čine KMK. Proces je i dalje stabilan za bilo koje pojačanje K, ali se sada može postići traženo vladanje. Iz KMK-a je potrebno očitati pojačanje regulatora pri kojem će relativni koeficijent prigušenja iznositi 0.7. Pojačanje u tom slučaju iznosi 0.102.



**Slika 4.1.** Krivulja mjesta korijena kompenziranog procesa 2. reda

### 4.3. Sinteza regulatora za sustav 3. reda

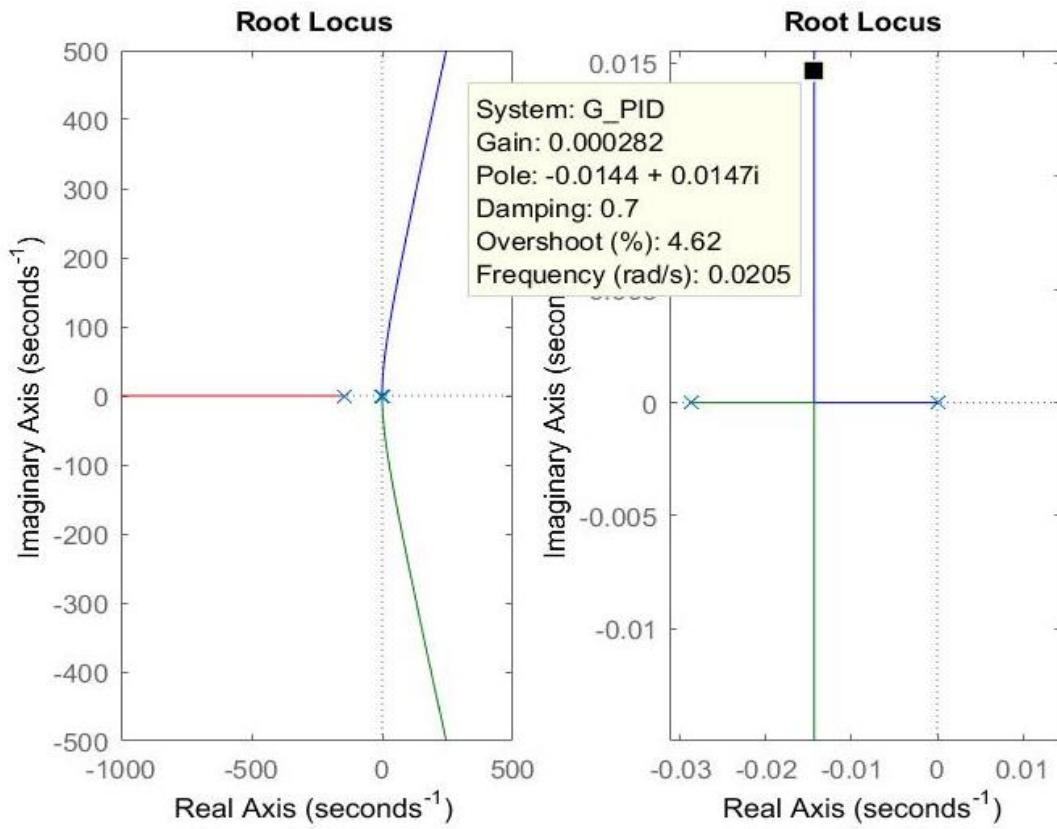
Podršavanjem parametara PID regulatora dobije se sljedeća prijenosna funkcija regulatora:

$$G_R(s) = K \frac{(s + 14.7415 + j21.147)(s + 14.7415 - j21.147)}{s(s + 147.415)} \quad (4 - 5)$$

Prijenosna funkcija otvorenog regulacijskog kruga za proces 3. reda:

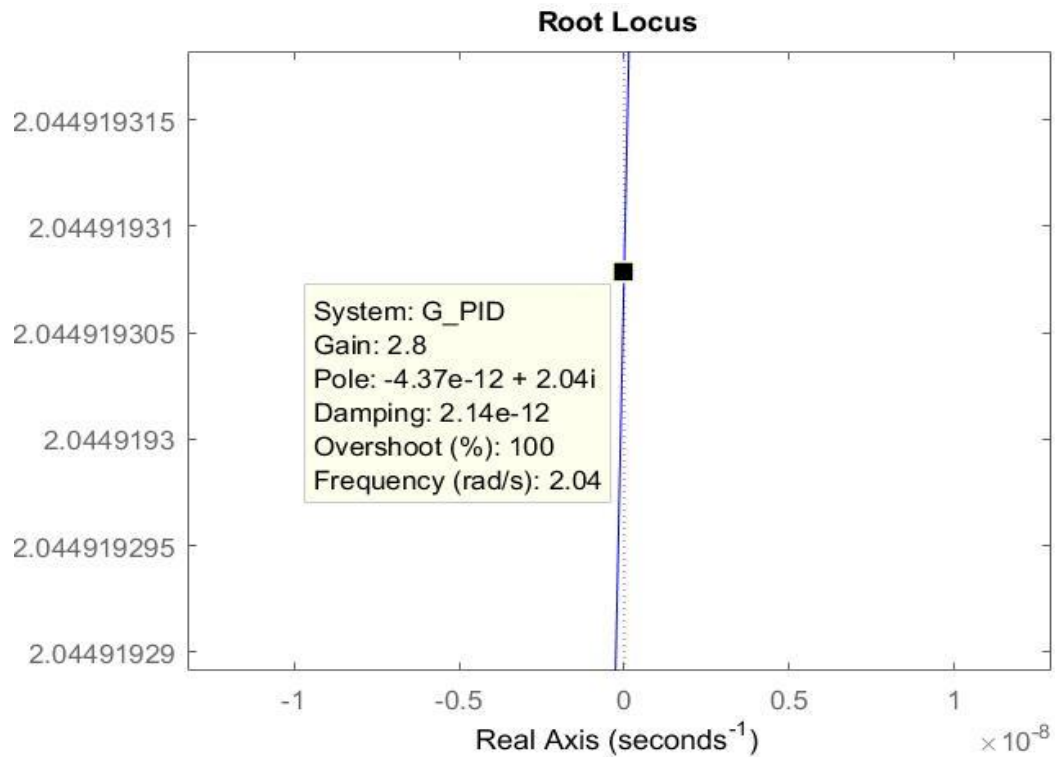
$$G_O(s) = G_P(s) \cdot G_R(s) = K \frac{220.59}{s(s + 147.415)(s + 0.02875)} \quad (4 - 6)$$

Kompleksni polovi su sada kompenzirani te KMK sada izgleda kao što je pokazano na slici 4.2. Zbog malih vremenskih konstanti dominantnih polova potrebno je zimirati na njih da bi se moglo odrediti pojačanje. Pojačanje za proces 3. reda iznosi 0.000282.



**Slika 4.2.** Krivulja mjesta korijena kompenziranog procesa 3. reda lijevo i поблиži pogled na dominantne polove desno

Za razliku od procesa 2. reda, ovdje postoji pojačanje pri kojem će proces postati nestabilan. Na slici 4.3. je prikazan prijelaz procesa u nestabilno područje, odnosno desno od imaginarne osi. Granično pojačanje iznosi 2.8 pri kojem će se proces nalaziti na granici stabilnosti. Za sva pojačanja iznad 2.8 proces će biti nestabilan, dok za sva pojačanja ispod 2.8 proces će biti stabilan.



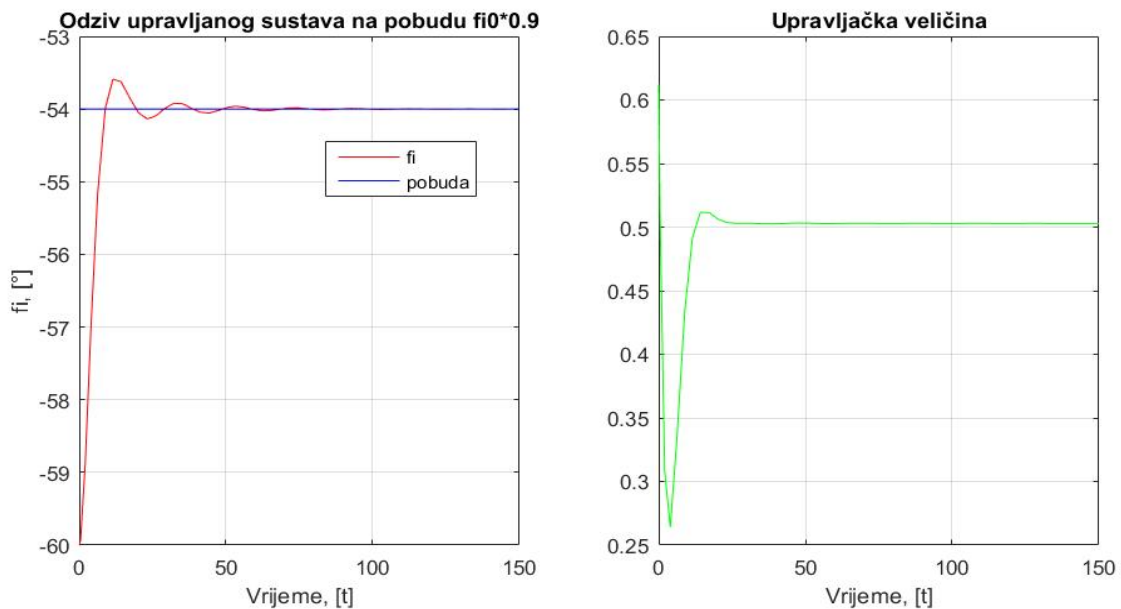
**Slika 4.3.** Granica stabilnosti procesa 3. reda

## 5. SIMULACIJA REGULACIJSKOG KRUGA

U ovom poglavlju će biti prikazani rezultati simulacije nelinearnog Simulink modela procesa 2. i 3. reda upravljanog PID regulatorom.

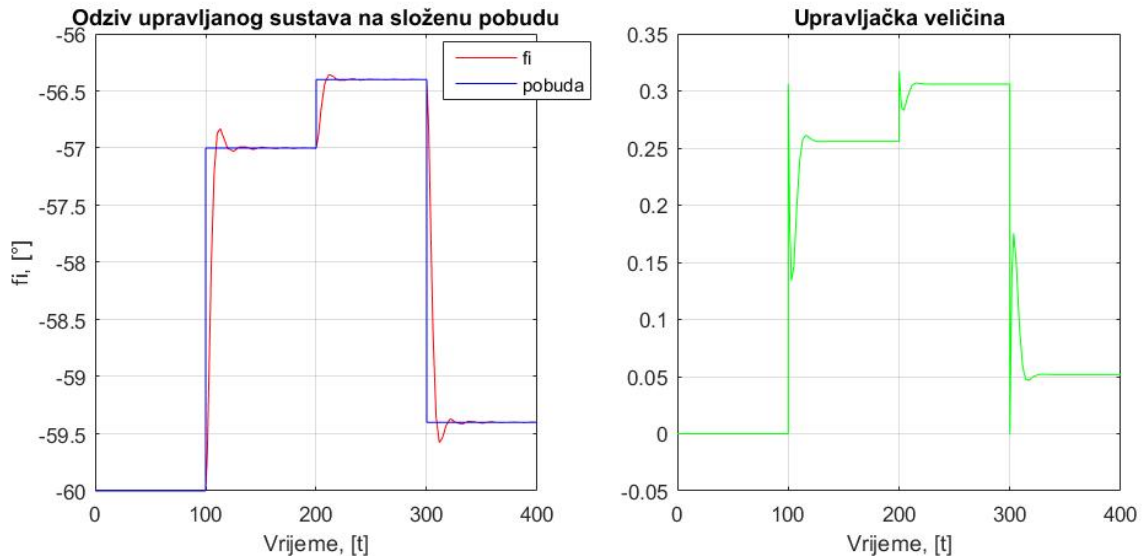
### 5.1. Proces 2. reda

Slika 5.1. prikazuje odziv procesa upravljanog prethodno određenim PID regulatorom na promjenu referentne vrijednosti s  $\varphi_0$  na  $0.9\varphi_0$ . Proces je brz i točan u ustaljenom stanju. Na desnom grafu je prikazan odziv upravljačke veličine koja se mijenja s izlaznom veličinom i održava točnost izlazne veličine.



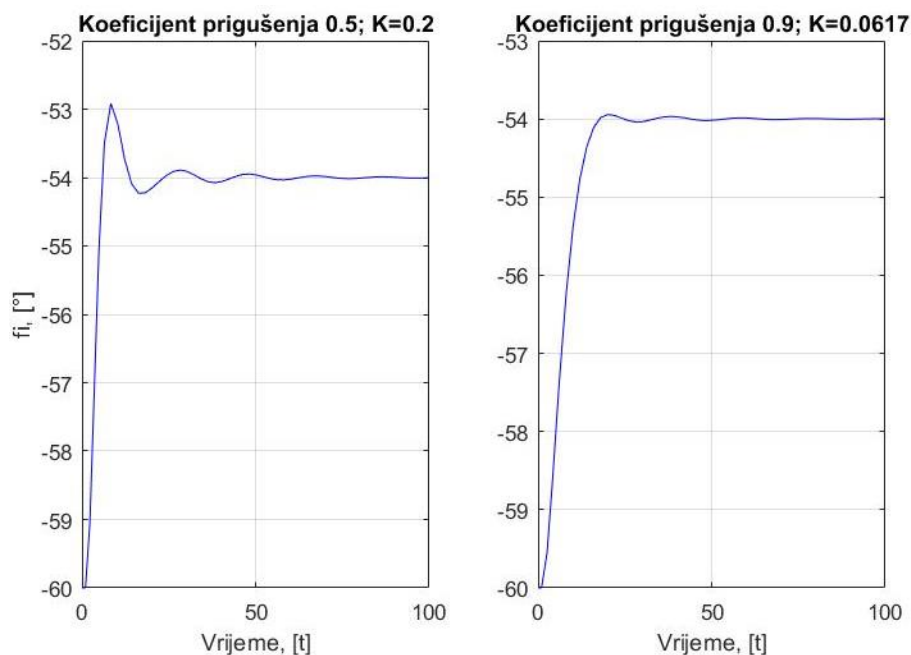
**Slika 5.1.** Odziv procesa upravljanog PID regulatorom na pobudu  $0.9\varphi_0$ .

Na slici 5.2. je prikazan je odziv procesa na složenu pobudu valnog oblika  $\varphi_0 \cdot (S(t) - 0.05S(t-100s) - 0.01S(t-200s) + 0.08S(t-300s))$ . Može se vidjeti kako proces upravljan PID regulatorom brzo i točno prati promjene pobude te vrlo brzo kompenzira oscilacije.



**Slika 5.2.** Odziv procesa upravljanog PID regulatorom na složenu pobudu

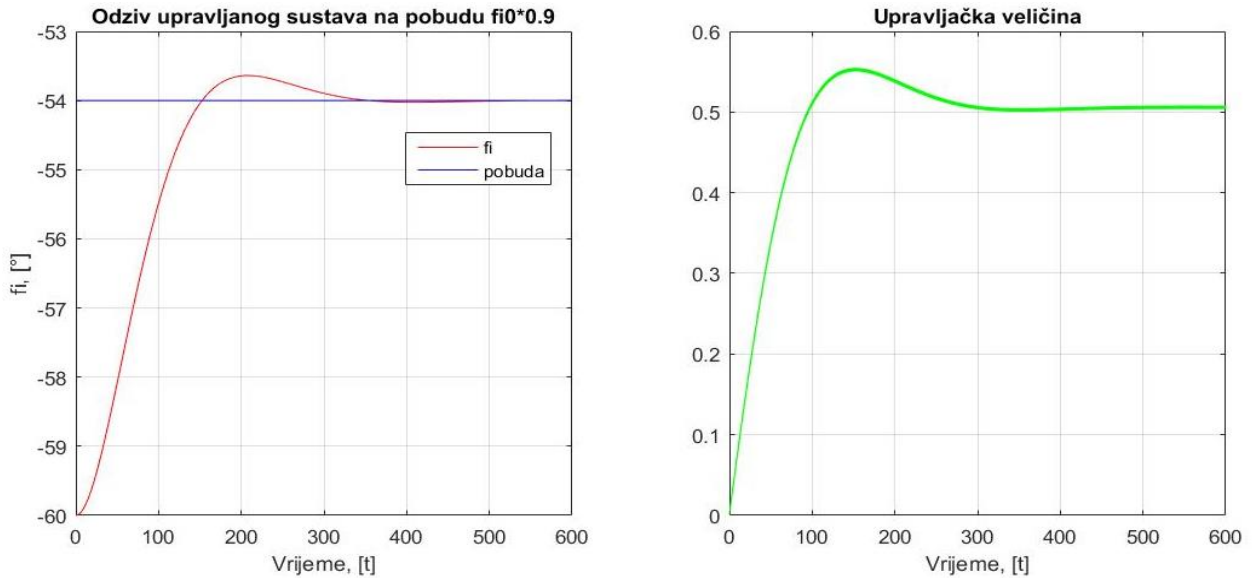
Na slici 5.3. se može vidjeti razlika između različitih relativnih koeficijenata prigušenja. Što je prigušenje manje, to je regulator brži ali na račun vremena ustaljivanja, dok je u suprotnom slučaju regulator sporiji, ali nema velikog nadvišenja izlazne veličine.



**Slika 5.3.** Usporedba odziva pri različitim koeficijentima prigušenja;  $\zeta=0.5$  i  $\zeta=0.9$

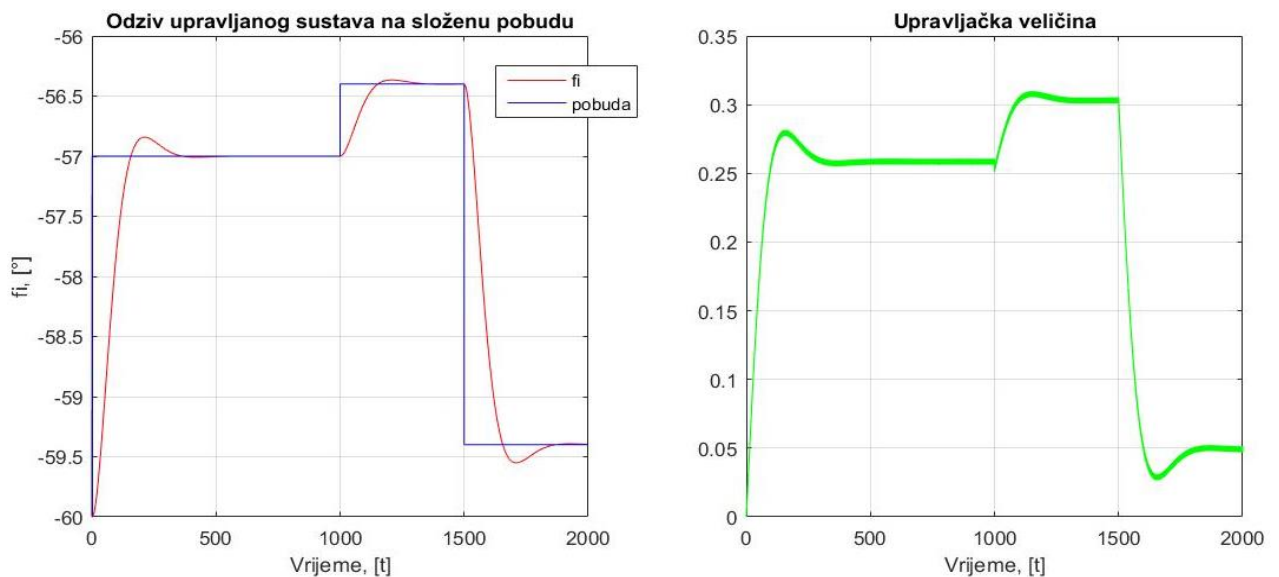
## 5.2. Proces 3. reda

Slika 5.4. prikazuje odziv i upravljačku veličinu procesa upravljanog PID regulatorom. Upravljeni proces je brži od neupravljanog i nema pogreške u ustaljenom stanju.



**Slika 5.4.** Odziv procesa upravljanog PID regulatorom na pobudu  $0.9\varphi_0$ .

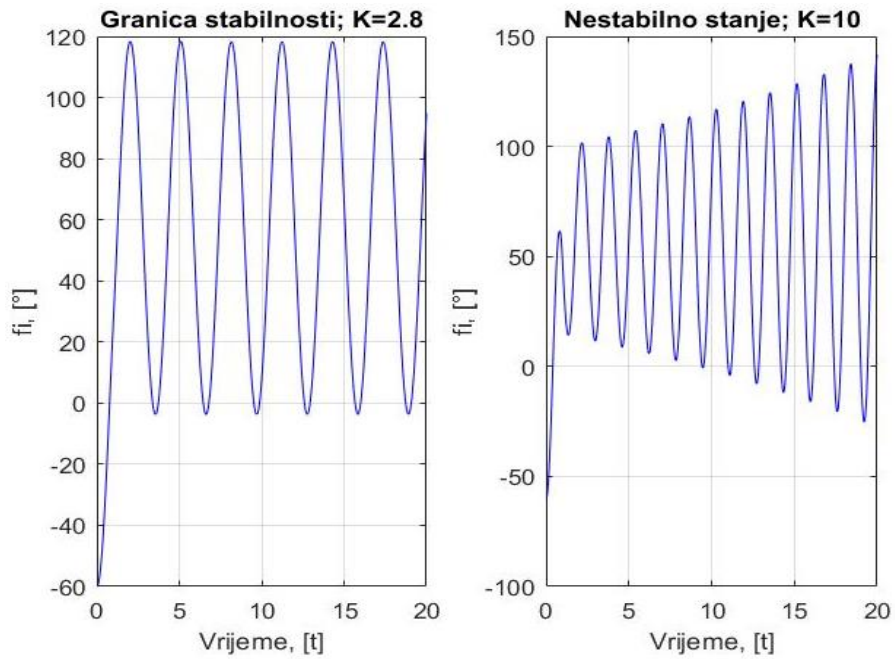
Slika 5.5. prikazuje odziv procesa na složenu pobudu oblika  $\varphi_0 \cdot (S(t) - 0.05S(t-1) - 0.01S(t-1000) + 0.08S(t-1500))$ . Izlazna veličina prati pobudu te nema pogreške u stacionarnom stanju.



**Slika 5.5.** Odziv procesa upravljanog PID regulatorom na složenu pobudu



Na slici 5.6. je prikazano što se događa kada se pojačanje PID regulatora postavi tako da je sustav na granici stabilnosti, odnosno tako da sustav postane nestabilan. Pri pojačanju od 2.8 javljaju se oscilacije konstantne amplitude. Ako se pojačanje postavi iznad granice (npr. 10), proces postaje nestabilan i amplitude oscilacija rastu s vremenom.



**Slika 5.6.** Dovođenje procesa na granicu stabilnosti, odnosno u nestabilno stanje promjenom pojačanja

## 6. ZAKLJUČAK

Cilj rada je bio izvršiti analizu procesa i napraviti sintezu PID regulatora koji će upravljati robotskom rukom tako da pojačanje regulatora odgovara relativnom koeficijentu prigušenja 0.7. Na temelju dobivenih rezultata analize procesa može se zaključiti kako su oba procesa stabilna, ali nemaju željenu dinamiku. Dinamika procesa se poboljšala ugradnjom PID regulatora. Na temelju dobivenih rezultata simulacije procesa može se zaključiti kako PID regulator poboljšava dinamiku tako što uklanja pogrešku u stacionarnom stanju te čini sam proces bržim (ili sporijim) podešavanjem relativnog koeficijenta prigušenja. Sustav upravljanja je također testiran složenom pobudom i dao je zadovoljavajuće rezultate.

## LITERATURA

- [1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Robotic\\_arm](https://en.wikipedia.org/wiki/Robotic_arm) (14.6.2019.)
  
- [2] [https://loomen.carnet.hr/pluginfile.php/312109/mod\\_resource/content/1/AV/OAU\\_zadaci\\_vjezba\\_1.pdf](https://loomen.carnet.hr/pluginfile.php/312109/mod_resource/content/1/AV/OAU_zadaci_vjezba_1.pdf) (6.7.2019)
  
- [3] Osnove automatskog upravljanja - Priručnik za laboratorijske vježbe, E. K. Nyarko, R. Grbić, D. Slišković, R. Cupec, Osijek 2015.
  
- [4] N. Perić, Automatsko upravljanje - predavanja, Zavodska skripta, FER, Zagreb, 1998.
  
- [5] Bilješke sa predavanja - "Osnove automatskog upravljanja"

## **SAŽETAK**

Glavni problem kojim se bavio rad je sinteza sustava upravljanja koji će upravljati procesom na zadovoljavajući način. Nakon opisa procesa nelinearnim modelom i prijenosnom funkcijom izvršena je analiza procesa grafoanalitičkim i analitičkim metodama u programu MATLAB na temelju kojih je zaključeno kakav je regulator potreban za postizanje zadovoljavajućih rezultata. Sinteza regulatora je obavljena pomoću krivulje mjesta korijena. Nelinearni model procesa je prikazan pomoću funkcijskih blokova u Simulink programu pomoću kojih se vršila simulacija sustava upravljanja. Rezultati simulacija ukazuju na to da je sustav upravljanja uspješno projektiran.

Ključne riječi: analiza, sinteza, proces, sustav upravljanja, PID, MATLAB, Simulink, nelinearni model, prijenosna funkcija.

### **Control system analysis and synthesis for single joint robotic arm**

Main problem this paper dealt with was synthesis of control system which will control the process in a satisfactory manner. After describing the process with nonlinear model and transfer function graphoanalytical and analytical analysis was performed to determine what type of controller was necessary to achieve desired results. Controller synthesis was carried out using root locus method and control system simulation was done with nonlinear Simulink model of the process. Results have shown that control system was designed successfully.

Key words: analysis, synthesis, process, control system, PID, MATLAB, Simulink, nonlinear model, transfer function.

## PRILOG

### P4.1. MATLAB skripta za određivanje prijenosne funkcije procesa, regulatora i otvorenog regulacijskog kruga procesa 2. reda

```
1 - clear;
2 - close all;
3 - clc;
4
5 - L=0.2;      % Duljina ruke
6 - m=0.05;    % Masa predmeta u hvataljkama
7 - J=0.8;     % Moment inercije
8 - g=10;     % Gravitacijsko ubrzanje
9 - b=0.08;    % Koeficijent trenja
10 - fi0=-pi/3; % Kut
11 - M=0.5;    % Masa ruke
12 - Ra=0.5;   % Otpor armaturnog kruga
13 - La=0.017; % Induktivitet armaturnog kruga
14 - K=3;      % Konstanta [Vs]
15 - K_PID=0.102;
16
17 - tau0 = m*g*L*cos(fi0);
18 - omega0 = 0;
19 - Ia0 = tau0/K;
20 - Ua0 = Ia0*Ra;
21
22 - A=1;
23 - B=[J b -m*g*L*sin(fi0)];
24 - Gp=tf(A,B);
25
26 - zpk(Gp);
27 - [z,p,k]=zpkdata(Gp, 'v');
28
29 - s1=p(1,1);
30 - s2=p(2,1);
31 - s3=10*real(p(1,1));
32
33 - C=[1 -2*real(p(1,1)) real(p(1,1))*real(p(2,1))-imag(p(1,1))*imag(p(2,1))];
34 - D=[1 -s3 0];
35 - Gr=tf(C,D);
36 - Gp=zpk(Gp)
37 - Gr=zpk(Gr)
38
39 - s=tf('s');
40 - G_PID=k/(s*(s-s3));
41 - G_PID=zpk(G_PID)
```

## P4.2. MATLAB skripta za određivanje prijenosne funkcije procesa, regulatora i otvorenog regulacijskog kruga procesa 3. reda

```

1 - clear;
2 - close all;
3 - clc;
4 - L=0.2;      % Duljina ruke
5 - m=0.05;    % Masa predmeta u hvataljkama
6 - J=0.8;     % Moment inercije
7 - g=10;     % Gravitacijsko ubrzanje
8 - b=0.08;   % Koeficijent trenja
9 - fi0=-pi/3; % Kut
10 - M=0.5;    % Masa ruke
11 - Ra=0.5;   % Otpor armaturnog kruga
12 - La=0.017; % Induktivitet armaturnog kruga
13 - K=3;      % Konstanta [Vs]
14 - K_PID=0.000282;
15
16 - tau0 = ((2*m + M)/2)*g*L* cos(fi0);
17 - omega0 = 0;
18 - Ia0 = tau0/K;
19 - Ua0 = Ia0*Ra;
20
21 - A=K;
22 - B=[La*J (La*b+Ra*J) 0.5*(2*Ra*b-(La*M+La*2*m))*g*L*sin(fi0)+2*K*K) -0.5*(Ra*(M+2*m))*g*L*sin(fi0)];
23 - Gp=tf(A,B);
24
25 - zpk(Gp);
26 - [z,p,k]=zpkdata(Gp, 'v');
27
28 - s1=p(1,1);
29 - s2=p(2,1);
30 - s3=10*real(p(1,1));
31
32 - C=[1 -2*real(p(1,1)) real(p(1,1))*real(p(2,1))-imag(p(1,1))*imag(p(2,1))];
33 - D=[1 -s3 0];
34 - Gr=tf(C,D);
35 - Gp=zpk(Gp);
36 - Gr=zpk(Gr);
37
38 - s=tf('s');
39 - G_PID=k/(s*(s-s3)*(s-p(3,1)));
40 - G_PID=zpk(G_PID);

```