

# Krivuljni integrali i primjena na izračunavanje magnetskog polja zavojnice

---

**Pernar, Matej**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:200:382080>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-09**

*Repository / Repozitorij:*

[Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek](#)



**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I  
INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA**

**Sveučilišni studij**

**KRIVULJNI INTEGRALI I PRIMJENA NA  
IZRAČUNAVANJE MAGNETSKOG POLJA  
ZAVOJNICE**

**Završni rad**

**Matej Pernar**

**Osijek, 2021.**

# SADRŽAJ

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1. UVOD</b> .....   | <b>1</b>  |
| <b>1.1. Zadatak završnog rada</b> .....                                | <b>1</b>  |
| <b>2. KRIVULJNI INTEGRALI</b> .....                                    | <b>2</b>  |
| <b>2.1. Krivuljni integrali 1. vrste</b> .....                         | <b>2</b>  |
| 2.1.1. Izračunavanje krivuljnog integrala 1. vrste.....                | 2         |
| 2.1.2. Primjene krivuljnog integrala 1. vrste.....                     | 3         |
| <b>2.2. Krivuljni integrali 2. vrste</b> .....                         | <b>4</b>  |
| 2.2.1. Izračunavanje krivuljnog integrala 2. vrste.....                | 4         |
| 2.2.2. Primjene krivuljnog integrala 2. vrste.....                     | 5         |
| <b>2.3. Greenova formula</b> .....                                     | <b>5</b>  |
| <b>2.4. Stokesova formula</b> .....                                    | <b>7</b>  |
| <b>2.5. Riješeni primjeri</b> .....                                    | <b>8</b>  |
| <b>3. MAXWELLOVE JEDNADŽBE</b> .....                                   | <b>10</b> |
| <b>3.1. Prva Maxwellova jednadžba</b> .....                            | <b>10</b> |
| <b>3.2. Druga Maxwellova jednadžba</b> .....                           | <b>11</b> |
| <b>3.3. Treća Maxwellova jednadžba</b> .....                           | <b>12</b> |
| <b>3.4. Četvrta Maxwellova jednadžba</b> .....                         | <b>14</b> |
| <b>4. IZRAČUN MAGNETSKOG POLJA ZAVOJNICE</b> .....                     | <b>16</b> |
| <b>4.1. Solenoid</b> .....   | <b>16</b> |
| 4.1.1. Eksperimentalni izračun magnetskog polja solenoida .....        | 16        |
| 4.1.2. Teorijski izračun magnetskog polja solenoida.....               | 17        |
| <b>4.2. Torusni svitak</b> .....                                       | <b>18</b> |
| 4.2.1. Eksperimentalni izračun magnetskog polja torusnog svitka .....  | 19        |
| 4.2.2. Teorijski izračun magnetskog polja torusnog svitka.....         | 20        |
| <b>4.3. Kružna zavojnica</b> .....                                     | <b>21</b> |
| 4.3.1. Eksperimentalni izračun magnetskog polja kružne zavojnice ..... | 21        |
| 4.3.2. Teorijski izračun magnetskog polja kružne zavojnice .....       | 22        |
| <b>5. ZAKLJUČAK</b> .....  | <b>24</b> |
| <b>LITERATURA</b> .....  | <b>25</b> |

|                       |           |
|-----------------------|-----------|
| <b>SAŽETAK.....</b>   | <b>26</b> |
| <b>ABSTRACT .....</b> | <b>27</b> |
| <b>ŽIVOTOPIS.....</b> | <b>28</b> |

# 1. UVOD

Krivuljni integral predstavlja određeni integral kojemu je područje integracije krivulja i definiran je za funkcije dvije ili tri varijable. Razlikujemo krivuljne integrale skalarnog polja, koji predstavljaju krivuljne integrale 1. vrste i krivuljne integrale vektorskog polja, koji predstavljaju krivuljne integrale 2. vrste. Svaki od njih ima brojne primjene pa se tako krivuljni integrali 1. vrste primjenjuje za izračun duljine krivulje po kojoj se integrira, dok se krivuljni integrali 2. vrste primjenjuje za računanje površine unutar zatvorene krivulje, ali i za računanje magnetske indukcije pomoću Ampèreova zakona. Upravo to zadnje će nam kasnije pomoći u izračunavanju magnetskog polja zavojnice. Također postoje dvije važne formule koje ću objasniti, a vezane su za krivuljne integrale, nazivaju se Greenova i Stokesova formula, gdje je Stokesova formula zapravo proširenje Greenove formule. Svi navedeni integrali i formule biti će prikazani kroz nekoliko riješenih primjera. Sve ovo do sad opisano predstavlja osnovu za četiri Maxwellove jednadžbe koje opisuju električno i magnetsko polje i one će biti opisane i prikazane u integralnom obliku pomoću krivuljnih integrala. Na temelju obrađenog o krivuljnim integralima i na temelju Maxwellovih jednadžbi možemo izračunati magnetsko polje zavojnice, odnosno izračunat ćemo magnetsko polje za tri tipa zavojnice: solenoida, torusnog svitka i kružne zavojnice, ali prije toga ćemo eksperimentalno odrediti magnetsko polje zavojnica kako bi mogli usporediti dobivene rezultate sa izračunatim vrijednostima.

U drugom poglavlju opisani su krivuljni integrali 1. vrste, krivuljni integrali 2. vrste, Greenova i Stokesova formula i riješeni su neki primjer. U trećem poglavlju Maxwellove jednadžbe napisane su u integralnom obliku i objašnjene su. U četvrtom poglavlju eksperimentalno i teorijski izračunato je magnetsko polje za tri tipa zavojnica. Posljednje poglavlje predstavlja zaključak završnog rada.

## 1.1. Zadatak završnog rada

U završnom radu potrebno je detaljno opisati krivuljne integrale 1. i 2. vrste kao i Greenovu i Stokesovu formulu koje se prikazuju pomoću krivuljnih integrala. Također je potrebno riješiti neke primjere koji će nam pokazati način rješavanja krivuljnih integrala, ali i primjenu Greenove i Stokesove formule. Zatim je potrebno napisati četiri Maxwellove jednadžbe pomoću integrala i objasniti ih. Na kraju je potrebno primjenom krivuljnih integrala izračunati magnetsko polje zavojnice, odnosno eksperimentalno i teorijski odredit ćemo magnetsko polje solenoida, torusnog svitka i kružne zavojnice.

## 2. KRIVULJNI INTEGRALI

Za krivuljni integral možemo reći da je poopćenje određenog integrala na segmentu  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  na određeni integral po nekoj krivulji  $C$  koji može biti definiran za funkcije dvije ili tri varijable. Ovisno koja vrsta polja se integrira tim krivuljnim integralima, razlikujemo krivuljne integrale skalarnog polja, koji predstavljaju krivuljne integrale 1. vrste i krivuljne integrale vektorskog polja, koji predstavljaju krivuljne integrale 2. vrste

### 2.1. Krivuljni integrali 1. vrste

Ako integralne sume

$$o = \sum_{k=0}^{n-1} f(M_K) \Delta I_K \quad (2.1.)$$

imaju konačni limes kada  $n \rightarrow \infty$  i  $\Delta I_K \rightarrow 0$  ( $\forall k = 0, 1, \dots, n-1$ ), koji ne ovisi o načinu na koji je glatka krivulja  $C$  razdijeljena niti o načinu odabira točaka  $M_K$ , onda se taj limes naziva krivuljni integral 1. vrste funkcije  $f$  duž krivulje  $C$  i označava se:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta I_K \rightarrow 0}} \sum_{k=0}^{n-1} f(M_K) \cdot \Delta I_K = \int_C f(M) dl = \int_C f(x, y) dl. \quad (2.2.)$$

Funkcija  $f$  se tada naziva integrabilnom funkcijom duž krivulje  $C$  koja predstavlja krivulju integracije, gdje su točke  $A$  i  $B$  rubne točke krivulje integracije. Ako vrijedi uvjet da je funkcija  $f$  neprekidna duž krivulje  $C$ , tada postoji krivuljni integral 1. vrste  $\int_C f(M) dl$ . [1]

#### 2.1.1. Izračunavanje krivuljnog integrala 1. vrste

Način izračunavanja krivuljnog integrala 1. vrste je takav da se svede na odgovarajući određeni integral, ovisno o krivulji integracije  $C$ . Ona može biti zadana parametarski, eksplicitno ili preko polarnih koordinata. U slučaju da je krivulja  $C$  zadana parametarski:  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , te neka su  $\varphi$  i  $\psi$  neprekidne funkcije na segmentu  $[a, b]$ , kao i njihove derivacije  $\varphi'$  i  $\psi'$ . Tada je

$$\int_C f(x, y) dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt, \quad (2.3.)$$

gdje je infinitezimalni dio duljine luka krivulje  $dl = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt$ .

Ako je krivulja integracije zadana eksplicitno jednadžbom:  $y = \varphi(x), x \in [a, b]$ , gdje je funkcija  $\varphi$  neprekidno diferencijabilna na  $[a, b]$  onda vrijedi: [1]

$$\int_C f(x, y) dl = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx. \quad (2.4.)$$

### 2.1.2. Primjene krivuljnog integrala 1. vrste

Krivuljni integral 1. vrste može se primijeniti za izračunavanje duljine  $L$  krivulje  $C$  pod uvjetom da je podintegralna funkcija  $f(M) = 1, \forall M \in C$  i tada je duljina krivulje:

$$L = \int_C dl. \quad (2.5.)$$

Osim za izračun duljine krivulje, ovu vrstu krivuljnog integrala možemo primijeniti i za izračunavanje mase žice odnosno mase krivulje  $k$ :

$$m = \int_k f(x, y) dl. \quad (2.6.)$$

gdje je funkcija  $f$  funkcija linijske gustoće.

Bitno svojstvo krivuljnih integrala 1. vrste je to što njegova vrijednost ne ovisi o orijentaciji krivulje integracije jer je  $dl > 0$ . [1] Razmatraju se također krivuljni integrali s funkcijom triju varijabli koji su uzeti po prostornoj krivulji i oni se analogno računaju kao krivuljni integrali s funkcijom dviju varijabli. [2]

## 2.2. Krivuljni integrali 2. vrste

Ako postoji limes integralnih suma

$$o = \sum_{k=0}^{n-1} [P(\varepsilon_k, \theta_k) \cdot \Delta x_k + Q(\varepsilon_k, \theta_k) \cdot \Delta y_k], \quad (2.7.)$$

gdje je  $(\Delta x_k = x_{k+1} - x_k, \Delta y_k = y_{k+1} - y_k, k = 0, 1, \dots, n-1)$  kada  $n \rightarrow \infty$  i  $\Delta x_k \rightarrow 0$  i  $\Delta y_k \rightarrow 0 \forall k$ , koji ne ovisi o načinima odabira točaka  $M_k = (\varepsilon_k, \theta_k)$  na dijelovima lukova i ne ovisi o načinima razdiobe krivulje  $C$  na  $n$  dijelova onda se taj limes (broj) naziva krivuljni integral 2. vrste za funkcije  $P$  i  $Q$  duž krivulje  $C$ . Označava se s

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} [P(\varepsilon_k, \theta_k) \cdot \Delta x_k + Q(\varepsilon_k, \theta_k) \cdot \Delta y_k] = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy. \quad (2.8.)$$

Krivuljni integral 2. vrste ovisi o orijentaciji krivulje duž koje se integrira, tj. ako se promjeni orijentacija krivuljne integracije onda će se promijeniti predznak pripadnog krivuljnog integrala 2. vrste: [1]

$$\int_C \vec{F} d\vec{r} = - \int_C \vec{F} d\vec{r} \quad (2.9.)$$

### 2.2.1. Izračunavanje krivuljnog integrala 2. vrste

Krivulja kod ovih integrala može biti zadana parametarski ili eksplicitno što utječe na način izračunavanja krivuljnog integrala. Ako je krivulja  $C$  zadana parametarski jednadžbom:  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , gdje su funkcije  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\varphi'$  i  $\psi'$  neprekidne na segmentu  $[a, b]$  i ako su funkcije  $P$  i  $Q$  neprekidne u domeni  $D \subset \mathbb{R}^2$  koja sadrži krivulju  $C$ , tada se krivuljni integral 2. vrste svodi na određeni integral

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b (P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)) dt. \quad (2.20.)$$

U drugom slučaju ako je krivulja  $C$  dana eksplicitno:  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , gdje su funkcije  $\varphi$ ,  $\varphi'$  neprekidne funkcije na segmentu  $[a, b]$  i također ako vrijedi da su funkcije  $P$  i  $Q$  neprekidne u domeni  $D \subset \mathbb{R}^2$  koja sadrži krivulju  $C$ , tada se krivuljni integral 2. vrste svodi na određeni integral



$$\int_c P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \left( P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \right) dx. \quad (2.31.)$$

Sve spomenute formule analogno vrijede i za krivuljne integrale 2. vrste uzete po prostornoj krivulji. [1]

### 2.2.2. Primjene krivuljnog integrala 2. vrste

Ova vrsta krivuljnog integrala primjenjuje se za računanje površine unutar zatvorene krivulje C u ravnini:

$$P = \frac{1}{2} \oint_c -ydx + xdy, \quad (2.42.)$$

za izražavanje rada W sile  $\vec{F}(x, y)$  na putu koji predstavlja krivulju C:

$$W = \int_c P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_c \vec{F}(x, y)d\vec{r}, \quad (2.53.)$$

ali i za razne primjene u elektromagnetizmu kod npr. Ampèreova zakona:

$$\oint_l \vec{B}d\vec{r} = \frac{i_s(r)}{\epsilon_0 c^2}, \quad (2.64.)$$

gdje je  $i_s(r)$  struja kroz plohu S čiji je rub zatvorena krivulja l,  $\epsilon_0$  i c su konstante, a  $\vec{B}$  vektor magnetske indukcije.[1]

### 2.3. Greenova formula

Greenova formula je formula integralnog računa za funkcije dvije varijable, koja je prirodno poopćenje Newton-Leibnizove formule. Ova formula predstavlja vezu između poznatog nam krivuljnog integrala 2. vrste koji je uzet po ravnoj zatvorenoj krivulji C i dvostrukog integrala uzetog po površini koju ta krivulja C omeđuje.

Ako su u zatvorenom području D, omeđenom po dijelovima glatkom krivuljom C, funkcije P i Q neprekidne i imaju neprekidne parcijalne derivacije  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  i  $\frac{\partial P}{\partial y}$ . Tada vrijedi Greenova formula:

$$\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (2.75.)$$

gdje je zatvorena krivulja C granica odnosno rub područja D i smjer obilaska krivulje C je u pozitivnom smjeru, tako da se područje D nalazi s lijeve strane.

Postoji poseban slučaj Greenove formule koji kaže ako se u Greenovoj formuli uzme da je:

$$P(x, y) = -\frac{1}{2}y, \quad Q(x, y) = \frac{1}{2}x \quad \text{onda je}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2},$$

te se uvrštavanjem u Greenovu formulu dobiva sljedeće:

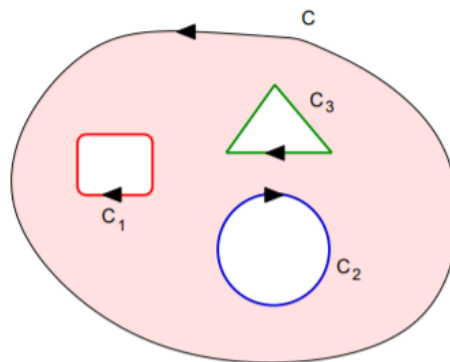
$$\oint_C -\frac{1}{2}ydx + \frac{1}{2}xdy = \iint_D \left( \frac{1}{2} - \left( -\frac{1}{2} \right) \right) dx dy = \iint_D dx dy = P_D, \quad (2.86.)$$

gdje  $P_D$  predstavlja površinu područja D. Stoga se površina područja D u ravnini može dobiti računanjem sljedećeg krivuljnog integrala 2. vrste duž ruba C od D: [1]

$$P_D = \frac{1}{2} \oint_C -ydx + xdy. \quad (2.97.)$$

Greenova formula se može primijeniti na područje s "rupama" (slika 2.1) gdje krivulje  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , moraju biti negativno orijentirane:

$$\iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C Pdx + Qdy + \sum_{i=1}^k \oint_{C_i} Pdx + Qdy \quad (2.108.)$$



Sl. 2.1. Područje s više zatvorenih krivulja

## 2.4. Stokesova formula

Stokesova formula predstavlja proširenje Greenove formule i bitna razlika između te dvije formule je ta što Greenova formula svodi integral uzet po ravninskoj plohi na integral po ravninskoj krivulji, dok Stokesova formula svodi integral uzet po zakrivljenoj plohi, točnije plošni integral, na integral po prostornoj krivulji. [3]

Ako su funkcije  $P = P(x, y, z)$ ,  $Q = Q(x, y, z)$ ,  $R = R(x, y, z)$  neprekinuto derivabilne i ako je  $C$  zatvorena po dijelovima glatka krivulja koja omeđuje glatku plohu  $S$ , tada vrijedi Stokesova formula:

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left[ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS, \quad (2.119.)$$

gdje su  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$  kosinusi smjera normale na plohu  $S$ , pri čemu se smjer normale određuje tako da gledano iz vrha normale, obilazak krivulje  $C$  bude suprotan smjeru gibanja kazaljke na satu u desnom koordinatnom sustavu. [2] Stokesovu formulu možemo i drugačije zapisati ukoliko uzmemo da vrijedi:  $dS \cos \alpha = dydz$ ,  $dS \cos \beta = dx dz$ ,  $dS \cos \gamma = dx dy$  tada je Stokesova formula:

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (2.20.)$$

Obzirom da je po Stokesovoj formuli vrijednost plošnog integrala po površini  $S$  već zadana vrijednošću krivuljnog integrala uzetog duž zatvorene krivulje  $C$ , koja tu plohu  $S$  omeđuje, za plohu  $S$  možemo uzeti bilo koju plohu, koju pravci paralelni s osi  $Z$  probadaju najviše u jednoj točki.

## 2.5. Riješeni primjeri

1. Izračunajmo krivuljni integral 1. vrste  $\int_C f(x,y)dl$  pri čemu je  $f(x,y,z) = x + z$  i krivulja C zadana je jednačbama:  $x = t$ ,  $y = \frac{\sqrt{6}}{2} t^2$ ,  $z = t^3$ ,  $t \in [0,1]$

$$\int_C f(x,y,z)dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt$$

$$\int_0^1 (t + t^3) \sqrt{1 + 6t^2 + 9t^4} dt = \int_0^1 (t + t^3)(1 + 3t^2) dt = \int_0^1 (t + 4t^3 + 3t^5) dt = 2$$

2. Izračunajmo krivuljni integral 2. vrste  $\int_k xdy - ydx$ , duž dijela parabole  $y = x^2$  koji povezuje točke: od  $A(0,0)$  do  $B(1,1)$ .

$$y = x^2 \Rightarrow dy = 2x \cdot dx$$

$$\int_0^1 -x^2 dx + x \cdot 2x dx = \int_0^1 (-x^2 + 2 \cdot x^2) dx$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

3. Pomoću Greenove formule izračunajmo  $\int_C y^3 dx + xy^2 dy$ , gdje je C pozitivno orijentirana krivulja koja zatvara lik omeđen parabolama  $y = x^2$  i  $x = y^2$ .

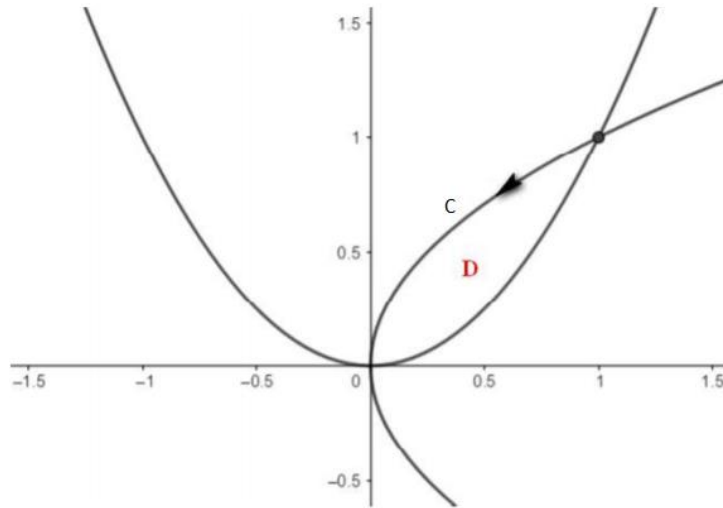
$$P(x,y) = y^3 \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 3y^2$$

$$Q(x,y) = xy^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$$

$$\int_C y^3 dx + xy^2 dy = \iint_D (y^2 - 3y^2) dx dy = \iint_D (-2y^2) dx dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (-2y^2) dy = -2 \int_0^1 \frac{y^3}{3} \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = -\frac{2}{3} \int_0^1 (x^{\frac{3}{2}} - x^6) dx$$

$$-\frac{2}{3} \left( \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_0^1 = -\frac{2}{3} \left( \frac{2}{5} - \frac{1}{7} \right) = -\frac{6}{35}$$



Sl. 2.2. Krivulja C i lik D omeđen krivuljama

4. Primjenom Stokesove formule transformirat ćemo integral:  $\oint_K x^2 y^3 dx + dy + z dz$  gdje je k kružnica  $x^2 + y^2 = r^2, z = 0$ .

$$z = 0, \quad dz = 0, \quad x = R \cos t, \quad y = R \sin t$$

$$dx = -R \sin t dt, \quad dy = R \cos t dt$$

$$P(x, y, z) = x^2 y^3, \quad Q(x, y, z) = 1, \quad R(x, y, z) = z$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3x^2 y^2$$

$$\iint_S (-3x^2 y^2) dx dy = -3 \iint_S \rho^2 \cos^2 \varphi \cdot \rho^2 \sin^2 \varphi \cdot \rho \cdot d\rho d\varphi =$$

$$-3 \iint_S \rho^5 \cos^2 \varphi \cdot \rho^2 \sin^2 \varphi \cdot d\rho d\varphi = -3 \left( \frac{1}{8} \left( \varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4} \right) \Big|_0^{2\pi} \cdot \left( \frac{\rho^6}{6} \right) \Big|_0^R \right) = \frac{-\pi R^6}{8}$$

### 3. MAXWELLOVE JEDNADŽBE

Maxwellove jednadžbe su osnovne jednadžbe elektromagnetizma koje opisuju ovisnost električnog i magnetskog polja o nabojima i strujama, a također i njihovo međudjelovanje do kojeg dolazi kada se mijenjaju u vremenu. Točnije, promjene u električnom polju uzrokuju promjene u magnetskome polju i obrnuto, te je dovoljno poznavati električno i magnetsko polje u prostoru kako bi se mogle odrediti buduće vremenske promjene polja. Ove jednadžbe predstavljaju temelj klasične elektrodinamike i teorijske elektrotehnike. Razvio ih je James Clerk Maxwell koristeći Ampèreov zakon za struje u vodičima, Faradayev zakon elektromagnetske indukcije, Gaussov zakon za električnu energiju i Gaussov zakon za magnetizam, te nakon što je postavio hipotezu o struji pomaka, Maxwell ih je ujedinio u skladu s jednadžbom kontinuiteta. One daju matematički model za električne, optičke i radijske tehnologije, poput proizvodnje energije, elektromotora, bežične komunikacije itd. Maxwellove jednadžbe mogu se zapisati u diferencijalnom i integralnom obliku, no u nastavku će biti zapisane i opisane u integralnom obliku. [4]

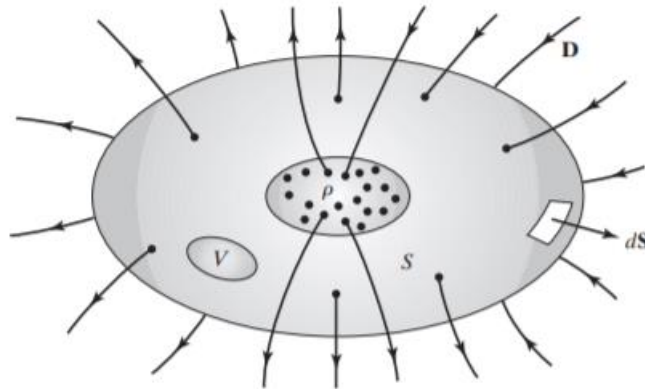
#### 3.1. Prva Maxwellova jednadžba

Gaussov zakon električnog polja je prva Maxwellova jednadžba koja nam govori da je električni naboj izvor električnog polja, odnosno da ukupni tok pomaka koji proizlazi iz zatvorene površine  $S$  je jednak ukupnom naboju sadržanom u volumenu  $V$  koji je omeđen tom površinom  $S$ . Gaussov zakon za električno polje može se prikazati slikom 3.1. U matematičkom obliku, Gaussov zakon za električno polje dan je izrazom (3.1.)

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV, \quad (3.1.)$$

gdje je  $D$  električni pomak koji je jednak umnošku dielektrične konstante  $\epsilon$  i jakosti električnog polja  $E$ , a  $\rho$  je prostorna gustoća naboja jednaka kvocijentu količine naboja  $Q$  i volumena  $V$ . Lijevi dio Maxwellove jednadžbe (3.1.) znači da želimo zbrojiti vrijednosti električnog pomaka  $D$  u svakoj točki duž površine  $S$ . Desna strana jednadžbe predstavlja naboj koji se nalazi u volumenu  $V$  koji je omeđen površinom  $S$  koja je povezana s količinom s lijeve strane. To se može formulirati i u smislu prostorne gustoće naboja koja uključuje plošne naboje, linijske naboje i točkaste naboje koje zatvara površina  $S$  što predstavlja algebarski zbroj svih naboja sadržanih u volumenu  $V$ . [5] Ako se dogodi slučaj da unutar te zatvorene površine  $S$  nema električnog naboja onda će ukupni električni tok kroz tu zatvorenu površinu biti jednak nuli. No, to ne znači da u tom volumenu nema

električnog polja, već samo da ukupni tok iščezava. Ako unutar volumena postoji pozitivan naboj, onda postoji pozitivna količina električnog toka koji izlazi iz bilo kojeg volumena koji okružuje naboj, a ako postoji negativan naboj unutar volumena, tada postoji negativna količina električnog toka koji izlazi. Integralni oblik Gaussova zakona nalazi primjenu u izračunavanju električnih polja oko nabijenih objekata.



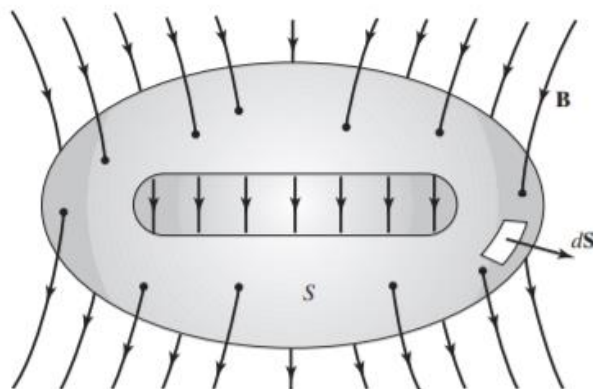
Sl. 3.1. Prikaz Gaussovog zakona za električno polje[5]

### 3.2. Druga Maxwellova jednačnja

Kao što se i prva Maxwellova jednačnja temelji na Gaussovom zakonu tako će se i druga temeljiti na Gaussovom zakonu, ali za magnetsko polje. Gaussov zakon za magnetsko polje kaže da je ukupni magnetski tok koji proizlazi iz zatvorene površine S jednak nuli. U matematičkom obliku to se može zapisati izrazom (3.2.)

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (3.2.)$$

gdje je  $B$  gustoća magnetskog toka koja je jednaka umnošku permeabilnosti  $\mu$  i jakosti magnetskog polja  $H$ . U fizičkom smislu izraz (3.2.) znači da magnetski naboji ne postoje i da su linije magnetskog toka zatvorene. Bez obzira na to što magnetski tok ulazi (ili izlazi), određeni dio zatvorene površine mora izaći (ili ući) kroz ostatak zatvorene površine, kao što je prikazano na slici 3.2. Odnosno u svakoj točki prostora, količina silnica magnetskog polja koja ulazi u tu točku jednaka je količini silnica koje izlaze iz te točke. Magnetske silnice su zatvorene krivulje i one nigdje nemaju ni izvora ni ponora, te zato magnetski tok kroz zatvorenu plohu S uvijek iščezava.[5]



Sl. 3.2. Prikaz Gaussovog zakona za magnetsko polje [5]

### 3.3. Treća Maxwelllova jednadžba

Faradayev zakon elektromagnetske indukcije predstavlja treću Maxwelllovu jednadžbu i ona nam govori da je brzina promjene toka magnetske indukcije kroz petlju jednaka elektromotornoj sili induciranoj u petlji. Ova jednadžba posljedica je eksperimentalnog otkrića Michaela Faradaya koji je otkrio da magnetska polja koja mijenjaju vrijeme stvaraju električna polja i stoga se jednadžba još zove Faradayev zakon. Faraday je otkrio da se, kad se magnetski tok zatvoren petljom žice s vremenom mijenja, u petlji stvara struja, što ukazuje na to da se oko petlje inducira napon ili elektromotorna sila (EMS). [5] To se može zapisati kao:

$$EMS = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (3.3.)$$

U izrazu (3.3.)  $\Phi$  je magnetski tok unutar kruga, a  $EMS$  elektromotorna sila koja je zapravo izvor napona i onda nam ta jednadžba govori da je inducirani napon u krugu suprotan vremenskoj brzini promjene magnetskog toka. Ova je jednadžba poznata kao Faraday-Lenzov zakon zbog Faradayevog otkrića i Lenzovog pravila. Lenzovo pravilo je posljedica očuvanja energije primijenjene na elektromagnetsku indukciju i zbog tog je pravila minus ispred u jednadžbi (3.3.). Pravilo govori da se napon uvijek inducira na način da struja koja nastane tim naponom stvara magnetsko polje koje svojim smjerom uvijek nastoji poništiti promjenu magnetskog toka. Nadalje ukupni magnetski tok  $\Phi$  je integral polja  $B$  na području  $S$  koje je okruženo žicom i to se može prikazati izrazom (3.4.).

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.4.)$$



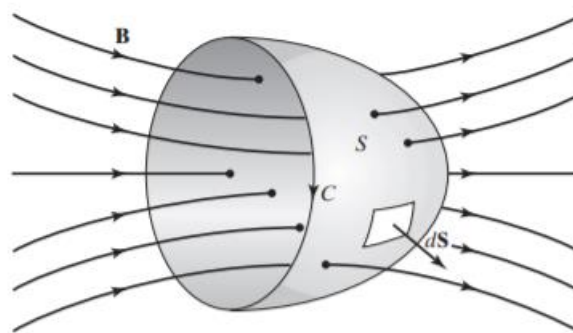
Zatim ukupna EMS oko kruga je jednaka sumi padova napona na konturi C koja se može predstaviti krivuljnim integralom. Ovo je dano izrazom (3.5.).

$$\text{EMS} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.5.)$$

Do treće Maxwellove jednačbe dolazimo tako da se u izraz Faraday-Lenzovog zakona (3.3.) uvrste jednačbe (3.4.) i (3.5.), te dobijemo da je integral vektora električnog polja po zatvorenoj krivulji jednak negativnoj promjeni po vremenu magnetskog toka obuhvaćenog tom krivuljom[4] i onda treća Maxwellova jednačba izgleda ovako:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (3.6.)$$

gdje je  $S$  površina omeđena konturom C. Da bi Faradayev zakon bio jedinstven, površina  $S$  ne mora biti ravna površina i može biti bilo koja zakrivljena površina omeđena s C, kako je prikazano na slici 3.3. To nam govori da magnetski tok kroz sve moguće površine omeđen C mora biti isti. Za konturu C možemo reći da ne mora predstavljati petlju od žice, već može biti zamišljena zatvorena putanja. To znači da magnetski tok koji varira u vremenu inducira električno polje u okolini, što rezultira EMS-om oko zatvorene putanje. Ako se žica postavi u položaj koji zauzima zatvorena putanja, EMS će proizvesti struju u petlji jednostavno zato što su naboji u žici ograničeni za kretanje duž žice.



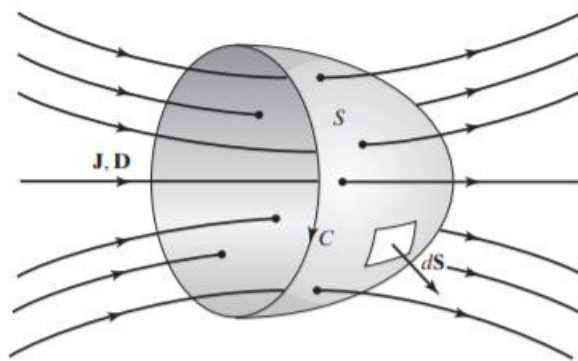
Sl. 3.3. Prikaz Faradayevog zakona elektromagnetske indukcije[5]

### 3.4. Četvrta Maxwellova jednađba

Četvrtu Maxwellovu jednađbu predstavlja Ampèreov kružni zakon koji je kombinacija eksperimentalnog otkrića Oersteda da električne struje stvaraju magnetska polja i matematičkog doprinosa Maxwella da električna polja koja variraju u vremenu stvaraju magnetska polja. Upravo je ovaj Maxwellov doprinos doveo do predviđanja širenja elektromagnetskih valova čak i prije nego što je fenomen eksperimentalno otkriven. U matematičkom obliku, Ampereov kružni zakon analogan je Faradayevom zakonu i dan je:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (3.7.)$$

gdje je  $S$  svaka površina omeđena sa  $C$  kako je prikazano na slici 3.4. Veličina  $J$  s desne strane (3.7) je vektor gustoće struje čija je veličina jednaka najvećoj vrijednosti struje po jedinici površine ( $A/m^2$ ) u razmatranoj točki. Plošni integral  $\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$  predstavlja algebarski zbroj svih struja zbog protoka naboja koji prelaze površinu  $S$  omeđenu sa  $C$ . Također uključuje i linijske struje, odnosno struje koje teku uz tanke nitaste žice zatvorene sa  $C$  i površinske struje, odnosno struje koje teku duž žica nalik na vrpce zatvorene sa  $C$ .



Sl. 3.4. Prikaz Ampèreovog kružnog zakona[5]

Plošni integral  $\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$  je tok vektorskog polja  $D$ . Vektor  $\vec{D}$  poznat je kao vektor pomaka ili vektor gustoće toka pomaka. Fizikalna veličina  $D$  može se prikazati i kao umnožak dielektrične konstante  $\epsilon$  i jakosti električnog polja  $E$ , te joj je mjerna jedinica  $C/m^2$ , odnosno jedinica naboja po jedinici površine. Cjelokupan izraz i dio jednađbe treće Maxwellove jednađbe  $I_{pom} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$  predstavlja ukupnu struju pomaka kroz zatvorenu površinu. Do pojma struje pomaka

se došlo promatranjem nabijanja ili izbijanja kondenzatora. Dok se kondenzator nabija, vodičem teče struja, a na pločama kondenzatora se skuplja naboj i pojačava električno polje između kondenzatora. Kondenzator predstavlja prekid strujnog kruga, pa pretpostavljamo da provodna struja koja vodičem dođe do kondenzatora, nastavlja teći između ploča kondenzatora kao struja pomaka. Kako bi vrijedila jednačba kontinuiteta Maxwell uvodi struju pomaka koja je, zbog zakona očuvanja naboja, jednaka provodnoj struji. Provodnu struju prikazujemo pomoću gustoće struje i jednaka je  $I_{prov} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$ .

Izraz  $\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l}$  na lijevoj strani jednačbe (3.7.) je krivuljni integral vektorskog polja  $H$  oko zatvorene putanje  $C$ . Vektor  $\vec{H}$  poznat je kao vektor jakosti magnetskog polja i jednak je kvocijentu magnetske indukcije  $\vec{B}$  i permeabilnosti  $\mu$  ( $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ ). Jakost magnetskog polja možemo izraziti mjernom jedinicom A/m. [5]

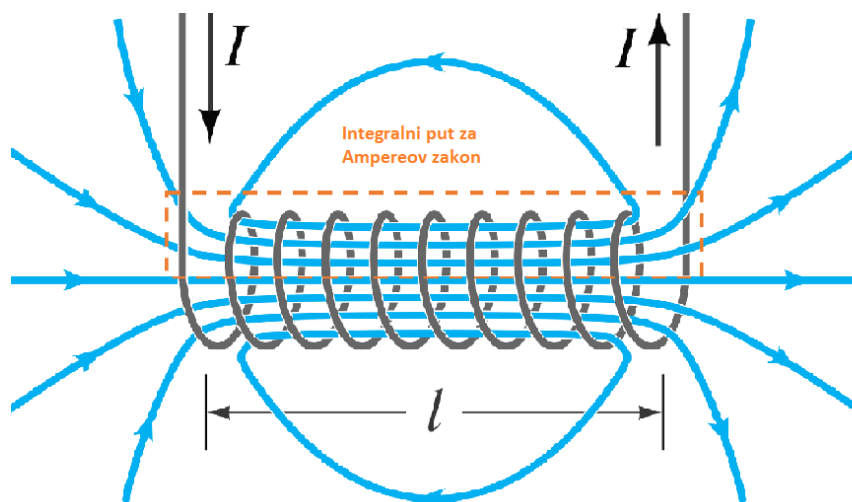
Na temelju obrađenog i kada se sve spoji u cjelinu dobivamo četvrtu Maxwellovu jednačbu odnosno Ampèreov kružni zakon koji govori da je krivuljni integral magnetskog polja jednak zbroju provodne struje i struje pomaka koju ta petlja sadržava.

## 4. IZRAČUN MAGNETSKOG POLJA ZAVOJNICE

U ovome poglavlju će se mjeriti i računati magnetsko polje za tri vrste zavojnice odnosno za solenoid, torusni svitak i kružnu zavojnicu. Zavojnice će se spojiti u jednostavni strujni krug i pomoću teslametra i njegove sonde će se mjeriti magnetsko polje. Magnetsko polje zavojnice će se mjeriti odnosno računati tako što će se određivati magnetska indukcija  $B$  pomoću koje se mogu opisati svojstva magnetskog polja.

### 4.1. Solenoid

Solenoid je jednoslojni valjkasti svitak s  $N$  gusto namotanih zavoja na cilindričnu jezgru dužine  $l$  i polumjera  $a$ . Prolaskom električne struje kroz solenoid stvara se magnetsko polje koje ovisi o gustoći zavoja, struji koja prolazi kroz te zavoje i magnetskim svojstvima jezgre. [6]



Sl. 4.1. Solenoid

#### 4.1.1. Eksperimentalni izračun magnetskog polja solenoida

Da bi se izmjerilo magnetsko polje solenoida potrebno ga je spojiti u strujni krug. Spojit će se serijski sa istosmjernim izvorom napona i promjenjivim otpornikom pomoću kojeg ćemo regulirat struju. Pomoću teslametra određivat će se magnetsko polje tako što će se sonda teslametra postaviti u središte jezgre solenoida. Također će se postaviti sonda na 3 cm od samoga solenoida kako bi se i tamo izmjerilo magnetsko polje. Struja kroz zavojnicu će se postaviti na pet različitih vrijednosti i za svaku vrijednost struje će se izmjeriti magnetsko polje. Vrijednost napona će uvijek biti ista.

Tablica 4.1. Eksperimentalni izračun magnetskog polja solenoida

| Struja [A] | Napon [V] | Magnetska indukcija u jezgri [mT] | Magnetska indukcija izvan jezgre [mT] |
|------------|-----------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| 0,99 A     | 11,3 V    | 1,94 mT                           | 0,02 mT                               |
| 1,5 A      | 11,3 V    | 2,33 mT                           | 0 mT                                  |
| 2 A        | 11,3 V    | 3,07 mT                           | 0,05 mT                               |
| 2,5 A      | 11,3 V    | 3,98 mT                           | 0,01 mT                               |
| 2,99 A     | 11,3 V    | 4,30 mT                           | 0,02 mT                               |

#### 4.1.2. Teorijski izračun magnetskog polja solenoida

Kako bi izračunali magnetsku indukciju solenoida potrebno je primijeniti Ampèreov zakon na solenoid. Promatrat će se pravokutna petlja koja je prikazana na slici (4.1.) oko koje treba primijeniti Ampèreov zakon tako da je duljina stranice  $l$  paralelna s magnetskim poljem koji daje doprinos  $Bl$  unutar zavojnice i tada dobivamo jednadžbu:

$$Bl = \mu_0 NI. \quad (4.1.)$$

Iz koje slijedi da je magnetska indukcija solenoida:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l}, \quad (4.2.)$$

gdje je  $\mu_0$  permeabilnost vakuuma,  $N$  broj zavoja,  $I$  struja, a  $l$  duljina solenoida. Ako su nam poznate specifikacije solenoida kojem se izračunala magnetska indukcija u eksperimentalnom dijelu, onda se može izračunati magnetska indukcija u jezgri pomoću izraza (4.2.). Magnetska indukcija izvan jezgre će se izračunavati pomoću izraza (4.3.)

$$B = \frac{\mu_0 NI}{l} \left( \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + a^2}} - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + a^2}} \right) \quad (4.3.)$$

gdje je  $a$  polumjer solenoida, a  $x_1$  i  $x_2$  udaljenosti su od krajeva solenoida do točke mjerenja magnetskog polja.

Specifikacije solenoida:

$N = 100$  – broj zavoja

$l = 15 \text{ cm}$  – duljina solenoida  $\Rightarrow x_1 = 3 \text{ cm}$  ,  $x_2 = 18 \text{ cm}$

$a = 1 \text{ cm}$  – polumjer solenoida

Tablica 4.2. Teorijski izračun magnetskog polja solenoida

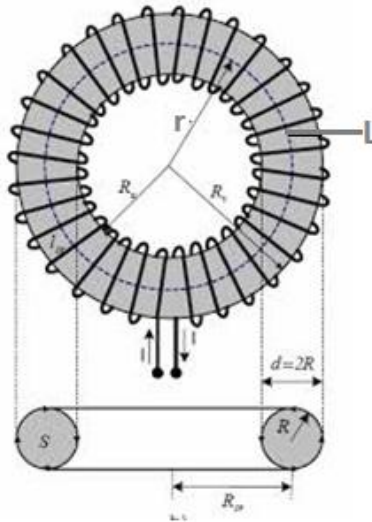
| Struja [A] | Magnetska indukcija u jezgri [mT] | Magnetska indukcija izvan jezgre [mT] |
|------------|-----------------------------------|---------------------------------------|
| 0.99 A     | 0,83 mT                           | 0,042 mT                              |
| 1.5 A      | 1.26 mT                           | 0.063 mT                              |
| 2 A        | 1.68 mT                           | 0,083 mT                              |
| 2.5 A      | 2,10 mT                           | 0,104 mT                              |
| 2.99 A     | 2,50 mT                           | 0,125 mT                              |

Iz tablica (4.1.) i (4.2.) se može vidjeti da postoje određene razlike između izračunatih i izmjerenih vrijednosti magnetske indukcije u jezgri. Vrijednosti izmjerene magnetske indukcije malo su veće od izračunati, no i jedne i druge vrijednosti se povećavaju kako se struja povećava. Vrijednosti magnetske indukcije izvan jezgre su približno oko nule, kao što se moglo i pretpostaviti jer je magnetsko polje izvan solenoida jako slabo.

## 4.2. Torusni svitak

Torusni svitak je zavojnica koja ima  $N$  gusto namotanih zavoja na jezgri prstenastog oblika. Presjek torusnog svitka u našem slučaju će biti krug. Izvan jezgre postoji magnetsko polje oko svakog zavoja, koje je puno manje nego unutar jezgre, pa ćemo to polje izvan jezgre zanemariti.

[6]



Sl. 4.2. Torusni svitak

#### 4.2.1. Eksperimentalni izračun magnetskog polja torusnog svitka

Kako bi se izmjerilo magnetsko polje torusnog svitka potrebno ga je spojiti u strujni krug. Spojit će se serijski sa istosmjernim izvorom napona i promjenjivim otpornikom pomoću kojeg ćemo regulirat struju. Pomoću teslametra određivat će se magnetsko polje tako što će se sonda teslametra postaviti u središte jezgre torusnog svitka. Struja kroz zavojnicu će se postaviti na pet različitih vrijednosti  $i$  za svaku vrijednost struje će se izmjeriti magnetsko polje. Vrijednost napona će uvijek biti ista.

Tablica 4.3. Eksperimentalni izračun magnetskog polja torusnog svitka

| Struja [A] | Napon [V] | Magnetska indukcija [mT] |
|------------|-----------|--------------------------|
| 1 A        | 10 V      | 0,10 mT                  |
| 1,5 A      | 10 V      | 0,10 mT                  |
| 2 A        | 10 V      | 0,10 mT                  |
| 2,5 A      | 10 V      | 0,08 mT                  |
| 3A         | 10 V      | 0,11 mT                  |

#### 4.2.2. Teorijski izračun magnetskog polja torusnog svitka

Kako bi izračunali magnetsku indukciju torusnog svitka potrebno je primijeniti Ampèreov zakon na konturu L sa slike (4.2.) i time dobivamo:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 N I, \quad (4.4.)$$

pa je tražena magnetska indukcija u torusnoj jezgri:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}, \quad (4.5.)$$

gdje  $2\pi r$  možemo zamijeniti sa  $l$  što predstavlja dužinu srednje silnice. Ako su nam poznate specifikacije torusnog svitka kojem se izračunala magnetska indukcija u eksperimentalnom dijelu, onda se može izračunati magnetska indukcija pomoću izraza (4.5.).

Specifikacije torusnog svitka:

$N = 50$  – broj zavoja

$r = 70\text{mm}$  – polumjer kružne silnice L

$l = 440\text{mm}$  – duljina kružne silnice L

Tablica 4.4. Teorijski izračun magnetskog polja torusnog svitka

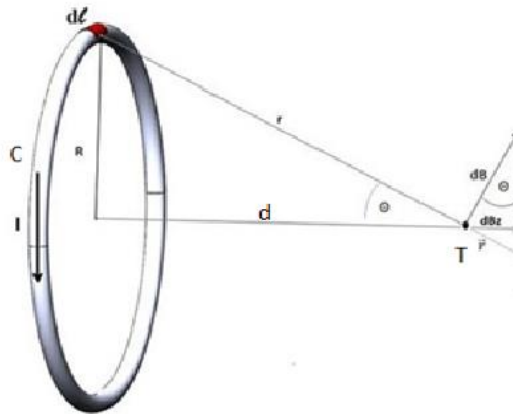
| Struja [A] | Magnetska indukcija [mT] |
|------------|--------------------------|
| 1 A        | 0,143 mT                 |
| 1,5 A      | 0,214 mT                 |
| 2 A        | 0,286 mT                 |
| 2,5 A      | 0,357 mT                 |
| 3A         | 0,429 mT                 |

Na temelju izračunati i izmjerenih rezultata može se zaključiti kako postoje mala odstupanja izračunatih vrijednosti od izmjerenih zbog nesavršenosti mjerne opreme. Također izmjerena magnetska indukcija je za različite vrijednosti struje približno jednaka, dok izračunata magnetska indukcija se povećava kako povećavamo vrijednost struje.



### 4.3. Kružna zavojnica

Na slici 4.3. prikazan je kružni zavoj kroz koji protječe struja  $I$ . Element  $d\vec{l}$  kružne konture  $C$  kojom teče struja, stvara u točki  $T$  na osi  $x$  magnetsku indukciju  $d\vec{B}$ . Pošto je suma normalnih komponenti indukcije jednaka nuli, slijedi da je rezultirajuća indukcija na osi  $x$  u smjeru osi  $x$ . Zbog toga je potrebno integrirati samo komponentu  $dB_x$  kako bi se odredilo magnetsko polje. [6]



Sl. 4.3. Kružni zavoj

#### 4.3.1. Eksperimentalni izračun magnetskog polja kružne zavojnice

Da bi se izmjerilo magnetsko polje kružne zavojnice potrebno ju je spojiti u strujni krug. Spojit će se serijski sa istosmjernim izvorom napona i promjenjivim otpornikom pomoću kojeg ćemo regulirat struju. Pomoću teslametra određivat će se magnetsko polje tako što će se sonda teslametra postaviti u centar kružne zavojnice. Također će se postaviti sonda na os kružne zavojnice 4 cm od nje kako bi se i tamo izmjerilo magnetsko polje. Struja kroz zavojnicu će se postaviti na pet različitih vrijednosti i za svaku vrijednost struje će se izmjeriti magnetsko polje. Vrijednost napona neće biti ista za sve struje, nego će varirati ovisno o struji.

Tablica 4.5. Eksperimentalni izračun magnetskog polja kružnog zavoja

| Struja [A] | Napon [V] | Magnetska indukcija<br>u centru [mT] | Magnetska indukcija<br>izvan zavojnice [mT] |
|------------|-----------|--------------------------------------|---|
| 0,4 A      | 10 V      | 7,30 mT                              | 0,10 mT                                     |
| 0,5 A      | 15 V      | 8,95 mT                              | 0,20 mT                                     |
| 0,6 A      | 15 V      | 11,42 mT                             | 0,23 mT                                     |
| 0,7 A      | 15 V      | 13,04 mT                             | 0,35 mT                                     |
| 0,8 A      | 20 V      | 15,14 mT                             | 0,27 mT                                     |

### 4.3.2. Teorijski izračun magnetskog polja kružne zavojnice

Kako bi se mogla izračunati magnetska indukcija u centru kružne zavojnice potrebno je integrirati sljedeći izraz po krivulji C:

$$dB = \frac{\mu_0 N I dl}{4\pi a^2} \quad (4.6.)$$

i onda imamo:

$$B = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 N I}{4\pi a^2} dl = \frac{\mu_0 N I}{2a} \quad (4.7.)$$

gdje je  $a$  polumjer kružne zavojnice. Formula pomoću koje se može izračunati magnetska indukcija na određenoj udaljenosti od centra kružne zavojnice je:

$$B = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 N I}{4\pi a^2} dl \sin \varphi = \frac{\mu_0 N I}{2a} \sin^3 \varphi = \frac{\mu_0 N I a^2}{2(a^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.8.)$$

gdje je  $d$  udaljenost po osi x od centra kružne zavojnice, a  $\varphi$  kut koji x os zatvara s vektorom  $\vec{r}$ . Iznos magnetske indukcije će opadati što je vrijednost  $d$  veća. Ako su nam poznate specifikacije kružne zavojnice pomoću kojih se izračunala magnetska indukcija u eksperimentalnom dijelu, onda se može izračunati magnetska indukcija u centru pomoću izraza (4.7.) i magnetska indukcija izvan zavojnice pomoću izraza (4.8.).

Specifikacije kružne zavojnice:

$N = 700$  – broj zavoja

$a = 2,5$  cm – polumjer kružne zavojnice

$d = 8 \text{ cm}$  – udaljenost po osi x od centra kružne zavojnice

Tablica 4.6. Teorijski izračun magnetskog polja kružne zavojnice

| Struja [A] | Magnetska indukcija u centru [mT] | Magnetska indukcija izvan zavojnice [mT] |
|------------|-----------------------------------|--|
| 0,4 A      | 7,037 mT                          | 0,187 mT                                 |
| 0,5 A      | 8,796 mT                          | 0,233 mT                                 |
| 0,6 A      | 10,556 mT                         | 0,280 mT                                 |
| 0,7 A      | 12,315 mT                         | 0,327 mT                                 |
| 0,8 A      | 14,074 mT                         | 0,373 mT                                 |

Nakon što se usporede izmjereni i izračunati rezultati, može se vidjeti da su približno jednaki i rezultati magnetske indukcije u centru kružne zavojnice i magnetske indukcije izvan kružne zavojnice. Kao što je bio slučaj u prethodne dvije zavojnice, tako se i u ovoj zavojnici magnetsko polje povećava porastom struje i magnetsko polje izvan zavojnice je vrlo slabo.

## 5. ZAKLJUČAK

Krivuljni integrali 1. i 2. vrste predstavljaju poopćenje određenog integrala po nekoj krivulji integracije  $C$  i definirani su za funkcije dvije ili tri varijable. Brojne su primjene ovih krivuljnih integrala kao npr. krivuljni integral 2. vrste se primjenjuje kod Ampèreovog zakona, koji je temelj četvrte Maxwellove jednadžbe, a i koristimo ga za izračunavanje magnetskog polja, točnije magnetske indukcije kod zavojnica. Također krivuljni integrali koriste se za prikaz Greenove i Stokesove formule koje nam olakšavaju računanje krivuljnih integrala pomoću dvostrukog integrala odnosno plošnog integrala, ali i obrnuto. Maxwellove jednadžbe prikazane su upravo u integralnom obliku i one opisuju ovisnosti električnog i magnetskog polja o nabojima i strujama, ali i njihovo međudjelovanje. Maxwell je zakone (Gaussov zakon za električnu energiju, Gaussov zakon za magnetizam, Faradayev zakon elektromagnetske indukcije i Ampèreov zakon za struje u vodičima) povezo u jednu cjelinu i nadopunio ih i tako su nastale četiri Maxwellove jednadžbe. Prve dvije jednadžbe relevantne su za plošne integrale električnog i magnetskog polja na zatvorenim površinama, a druge povezane su sa krivuljnim integralima električnog i magnetskog polja oko zatvorenih krivulja. Mjerena je i računata magnetska indukcija za tri različite zavojnice i na temelju rezultata može se zaključiti da magnetsko polje ovisi o broju zavoja zavojnice kao i o samom obliku zavojnice, ali i o jakosti struje koja teče zavojnicom. Što je veća struja, veća će biti i magnetska indukcija. Također magnetsko polje je najjače unutar zavojnica u njihovom središtu, dok što se više udaljavamo od zavojnice vrijednost magnetske indukcije sve je bliža nuli. Između izračunatih i izmjerenih vrijednosti postoje male razlike u rezultatima, no nema značajnijih odstupanja.

## LITERATURA

- [1] T. Marošević, Krivoljni integrali, nastavni materijali na predmetu Matematika 3 [Moodle], Sveučilište Josipa Juraja Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija, 2020.
- [2] B.P. Demidovič, Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke znanosti, Tehnička knjiga, Zagreb, 1974.
- [3] B. Apsen, Repetitorij više matematike, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
- [4] University of Illinois, Chapter 2, Maxwell's equations in integral form, dostupno na: <https://ws.engr.illinois.edu/sitemanager/getfile.asp?id=194> [Pristupljeno: 3.9.2021.]
- [5] Šta su to Maxwellove jednadžbe? Koliko ih ima i koje su? (20.6.2017.), dostupno na: <https://svafizika.org/2017/06/20/sta-su-to-maxwellove-jednadzbe-koliko-ih-ima-i-koje-su/> [Pristupljeno: 3.9.2021.]
- [6] B. Kuzmanović, Osnove elektrotehnike 1, Element, Zagreb, 2000.

## SAŽETAK

U završnom radu potrebno je dati općeniti prikaz krivuljnih integrala 1. i 2. vrste, te prikazati i objasniti Greenovu i Stokesovu formulu na temelju krivuljnih integrala i općenito integrala. Naučeno o integralima potrebno je prikazati kroz nekoliko riješenih primjera. Zatim potrebno je prikazati četiri Maxwelllove jednadžbe u integralnom obliku i objasniti svaku od njih na temelju fizikalnih veličina u svakoj pojedinoj jednadžbi. Također potrebno je izmjeriti i izračunati magnetsko polje za tri različite zavojnice i usporediti dobivene rezultate. Kako bi se riješili zadani problemi, potrebno je koristiti različitu literaturu kako bi se razumjeli krivuljni integrali, koji predstavljaju osnovu za Maxwelllove jednadžbe, ali i za izračun magnetskog polja zavojnice. Mjerenje magnetskog polja zavojnice potrebno je provesti u laboratoriju sa svom potrebnom opremom. Ovim završnim radom postiglo se znanje o krivuljnim integralima, razumijevanje Maxwellovih jednadžbi kao i uvid u jakost magnetskog polja kod različitih zavojnica, te na koji ih način izračunati.

Ključne riječi: krivuljni integrali, Maxwelllove jednadžbe, magnetsko polje, zavojnice.

## **ABSTRACT**

In the final paper, it is necessary to give a general overview of curve integrals of the 1st and 2nd type, and to present and explain the Green and Stokes formula based on curve integrals and aintegrals in general. What has been learned about integrals needs to be presented through several solved examples. It is then necessary to present four Maxwell equations in integral form and explain each of them based on the physical quantities in each individual equation. It is also necessary to measure and calculate the magnetic field for three different coils and compare the results obtained. In order to solve the latter problems, it is necessary to use different literature to understand the curve integrals, which form the basis for Maxwell's equations, but also for the calculation of the magnetic field of the coil. The measurement of the magnetic field of the coil should be carried out in the laboratory with all the necessary equipment. With this final work, knowledge of curve integrals, understanding of Maxwell's equations as well as insight into the strength of the magnetic field in different coils, and how to calculate them were achieved.

Keywords: curve integrals, Maxwell equations, magnetic field, coils.

## **ŽIVOTOPIS**

Autor ovog završnog rada, Matej Pernar, rođen je u Vinkovcima 22.12.1999. godine. Nakon završetka osnovne škole Ivana Mažuranića u Vinkovcima, upisuje Gimnaziju Matije Antuna Reljkovića u Vinkovcima, smjer: prirodoslovno-matematička gimnazija. Nakon završetka srednje škole, upisuje preddiplomski sveučilišni studij elektrotehnike i informacijskih tehnologija na Fakultetu elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija u Osijeku.

---

Potpis autora