Matematika i glazba

Paravac, Mislav

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:200:716604

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA

Sveučilišni studij

MATEMATIKA I GLAZBA

Završni rad

Mislav Paravac

Osijek, 2021.

Sadržaj

1. UVOD

Teorija glazbe nema aksiomatske temelje u matematici, ali ipak osnova glazbenog zvuka se može opisati matematički (za što je zadužena grana akustike) te glazba pokazuje veliki niz brojčanih svojstava. Elementi glazbe kao što su ritam i mjera, visina tonova i nota, te tempo se mogu povezati s mjerenjem vremena i frekvencije, te imaju analogije u geometriji.

Iako su drevni Kinezi, Egipćani i Mezopotamci proučavali matematičke principe glazbe, Pitagorejci su prvi istraživači koji su proučavali izraze poput glazbene ljestvice te omjere malih brojeve. Njihova doktrina bila je da se sva priroda sastoji od harmonije koja proizlazi iz brojeva.

U teorijskom dijelu ovog rada dat ćemo matematički opis zvuka i glazbe, funkcije korištene za opis istih. Zatim ćemo opisati harmonijsko gibanje i više harmonike, ili alikvote, te kako oni utječu na ono što čujemo. Za kraj ćemo nešto reći o matematici iza digitalnog zapisa zvuka i glazbe.

1.1 Zadatak rada

Kao praktični dio rada napravljena je aplikacija u programskom paketu MATLAB koju ćemo iskoristiti za prikaz zvučnih valova određenih glazbenih tonova i usporediti kako promjena parametara vala utječe na sam val. Također ćemo skladati i prikazati jednostavnu glazbenu skladbu.

2. POVIJEST

Prvi konkretni dokaz osnovne poveznice između matematike i glazbe postavio je rani filozof i matematičar Pitagora (569. – 475. pr. Kr.), često smatran „ocem brojeva“. Također ga možemo smatrati i „ocem harmonije“ jer su njegova otkrića alikvotnih tonova, analiza akustike i omjera u glazbi služila kao temelj harmonije u zapadnoj glazbi. Glazba je bila grana matematike, matematička disciplina poput geometrije ili aritmetike jer se bavila odnosima između brojeva, omjerima i proporcijama[1].

Pitagora je rođen u 6. stoljeću prije Krista na otoku Samosu. Bio je sin draguljara Mnesarha. Geometriju je naučio u Egiptu, o omjerima i brojevima je učio u Fenikiji, a poduku iz astronomije je dobio u Kaldeji, glavnom središtu antičke astronomije. Pitagora je, navodno, eksperimentirao s tonovima proizvedenim povlačenjem žica različitih duljina. Otkrio je da određeni omjeri duljina žice daju ugodne kombinacije („harmonije“), dok drugi omjeri ne daju ugodne tonove. Uspostavio je fiziku intervala, ili udaljenosti između nota, koja formira osnovni harmonijski sustav koji se i danas koristi.

Također je pokazao da je glazba zasnovana na proporcionalnim odnosima. Matematička struktura harmonijskih zvukova počinje s jednim tonom koji se prirodno pojavljuje, a u sebi sadrži niz dodatnih frekvencija iznad svoje osnovne frekvencije (tzv. alikvotnih tonova) kojih najčešće nismo ni svjesni. Unutar tih tonova nalazi se matematička relacija između frekvencija – oni su cjelobrojni višekratnici jedni drugih. Na primjer, ako je osnovna frekvencija 100 Hz, onda bi alikvotni tonovi bili $2 \cdot 100$ (200 Hz), $3 \cdot 100$ (300 Hz) i tako dalje.

Pitagora je promatrajući žice došao do zaključka da što je žica kraća, to je ton viši. Ako žicu skratimo za njenu polovinu (2:1), ton će skočiti za oktavu. Ako je skratimo za jednu trećinu (3:2), ton će skočiti za kvintu, te ako je skratimo za jednu četvrtinu (4:3), ton će biti viši za kvartu. Ako "visinu" tona procjenjujemo kao odnos njegovih frekvencija, kada skraćujemo duljinu žice mi joj zapravo povećavamo frekvenciju. Iz toga izvodimo zaključak da su Pitagorejci otkrili da je odnos frekvencija između nekog tona i tona koji je za oktavu viši 2:1, između tona i njegove kvinte odnos je 3:2, itd. Upravo ovi rezultati su Pitagorin najtrajniji doprinos teoriji glazbe.

3. ZVUK I VALOVI

3.1 Što je zvuk?

Da bi se zvuk mogao širiti, potreban mu je određeni mediji(sredstvo), najčešće zrak. Zvuk se javlja kao vibracija zraka. Da bi razumjeli zvuk kako treba, moramo dobro zamisliti kako zrak zapravo izgleda. Zrak je plin, što znači da atomi i molekule nisu toliko blizu jedni drugima kao što sto su u tekućinama ili krutinama. Zašto onda molekule zraka jednostavno ne padnu na pod?

Odgovor je sadržan u ekstremno brzom gibanju tih atoma i molekula. Prosječna brzina gibanja molekula zraka na sobnoj temperaturi u normalni uvjetima iznosi oko 450 – 500 metara u sekundi. Prosječna putanja slobodnog gibanja molekule zraka iznosi $6 \cdot 10^{-8}$ metara, što znači da u prosjeku molekula pređe ovu udaljenost prije sudara s ostalim molekulama zraka. Sudar između molekula je elastičan, pa ih to ne usporava.

Sada možemo izračunati koliko često se određena molekula sudara s drugom. Frekvencija sudara dana je sljedećom formulom:

$$\text{frekvencija sudara} = \frac{prosječna\ brzina}{prosječna\ putanja} \approx 10^{10} \text{ sudara u sekundi}$$

Sada imamo dobru ideju zašto molekule ne padaju na pod. Prije padanja na pod se odbijaju nazad.

Zrak se sastoji od velikog broja molekula u neposrednoj blizini, koje se neprestano odbijaju jedne od drugih stvarajući privid tlaka zraka. Kada objekt vibrira, on uzrokuje valove promjenjivog tlaka, koje uho percipira kao zvuk.

Zvuk se širi zrakom s otprilike 340 metara u sekundi. To ne znači da se bilo koja molekula zraka giba u smjeru vala ovom brzinom, nego da se poremećaj tlaka širi ovom brzinom. Slično se događa s površinom mora kada val njome prolazi; niti jedna određena molekula se ne giba zajedno s valom, nego se poremećaj na površini širi.

Postoji velika razlika između zvučnih valova i valova na vodi. U slučaju valova na vodi, lokalna gibanja su gore i dolje, što je okomito na smjer širenja vala. Takve valove nazivamo transverzalnim. Elektromagnetski valovi su također transverzalni. U slučaju zvuka, gibanje je u istom smjeru kao i širenje. Valove s tom karakteristikom nazivom longitudinalnim valovima.

Slika 3.1. *Prikaz longitudinalnog vala*

3.1.1 Klasifikacija zvuka

Zvuk možemo podijeliti u četiri glavne skupine, pri čemu su skupine određene na temelju frekvencije samog zvuka. Prva skupina su zvukovi koje ljudsko uho čuje, a nalaze su rasponu frekvencija od 16 Hz do 20000 Hz. Zvukove s frekvencijama nižim od 16 Hz nazivamo infrazvukom, dok frekvencije više od 20000 Hz pripadaju ultrazvuku. Ako je frekvencija viša od 1 GHz, onda takve zvukova nazivamo hiperzvukom.

3.1.2 Brzina zvuka

Brzina zvuka ovisi o mediju u kojem se širi, točnije o njegovoj gustoći. Tako će se zvuk širiti brže u plinovima i tekućinama nego u krutinama. Isaac Newton je brzinu zvuka definirao kao drugi korijen omjera tlaka koji djeluje na mediji i gustoće samog medija.

$$v = \sqrt{\frac{p}{\rho}}\ [\frac{m}{s}]\ .$$

Kasnije je francuski matematičar Laplace pokazao da širenje zvuka nije izotermalno, nego adijabatsko, te je dodao novi faktor u formulu, γ (adijabatski koeficijent). Konačna jednadžba, koja se još i naziva Newton – Laplace jednadžba, izgleda:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}.$$

3.1.3 Jakost zvuka

Jakost zvuka *I*, odnosno energija zvučnog vala, proporcionalna je frekvenciji, amplitudi, brzini zvuka i gustoći medija, te glasi:

$$I = \frac{1}{2}\omega^2 A^2 \rho v.$$

Predstavlja energiju vala u vremenskom intervalu kroz površinu okomitu na smjer širenja vala. Mjerna jedinica je [W/m^2] (vat po metru kvadratnom). Prag čujnosti za ljudsko uho, odnosno minimalna jakost zvuka koje osoba čuje iznosi:

$$I_0 = 1\frac{pW}{m^2} = 1 \cdot\ 10^{-12}\ W/m^2.$$

Razina jakosti zvuka (oznaka *L*) je mjerna veličina prilagođena osjetljivosti ljudskoga uha, deseterostruki logaritam omjera jakosti nekoga zvuka i praga čujnosti, odnosno:

$$L = 10 \cdot log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)[dB].$$

3.1.4 Percepcija zvuka

Zvučni valovi imaju četiri glavna svojstva koja utječu na način kojim ih zapažamo. Prvi je amplituda, koja opisuje veličinu vibracije, te se očituje kao glasnoća. Amplituda zvuka je jako mala, obično mali dio milimetra. Drugo svojstvo je visina, koja zapravo predstavlja frekvenciju vibracije. Treći je boja, koja odgovara obliku frekvencijskog spektra zvuka. Te posljednji je trajanje, koji predstavlja duljinu vremena u kojem čujemo zvuk.

Ovakva notacija nije stroga iz više razloga. Većina vibracija se ne sastoji od samo jedne frekvencije i određivanje određene frekvencije je teško. Drugi razlog je što ova svojstva trebaju biti definirani u smislu percepcije zvuka, a ne samog zvuka. Na primjer, percipirana visina zvuka može predstavljati frekvenciju koja se zapravo ne nalazi u valu. Ovaj fenomen pripada znanosti psihoakustike.

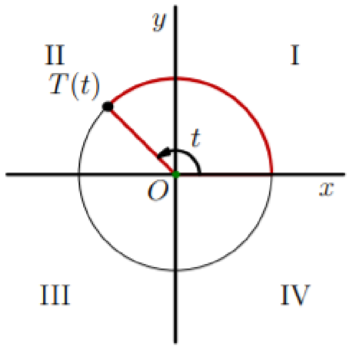
Tablica 2.1. *Svojstva zvuka i njihova percepcija*

Fizikalni	**Perceptivni**
Amplituda	Glasnoća
Frekvencija	Visina
Spektar	Boja
Trajanje	Duljina

3.2 Trigonometrijske funkcije

3.2.1 Brojevna kružnica

Da bi mogli definirati osnovne trigonometrijske funkcije sinusa i kosinusa, potrebno je prvo uvesti i objasniti pojam brojevne kružnice. Jediničnu brojevnu kružnicu ćemo koristiti za definiciju kuta. Ako se po kružnici jediničnog radijusa pomaknemo za kut t u smjeru suprotnom od kazaljke na satu, dobit ćemo kut t u radijanima koji je po definiciji jednak duljini prijeđenog luka[2].

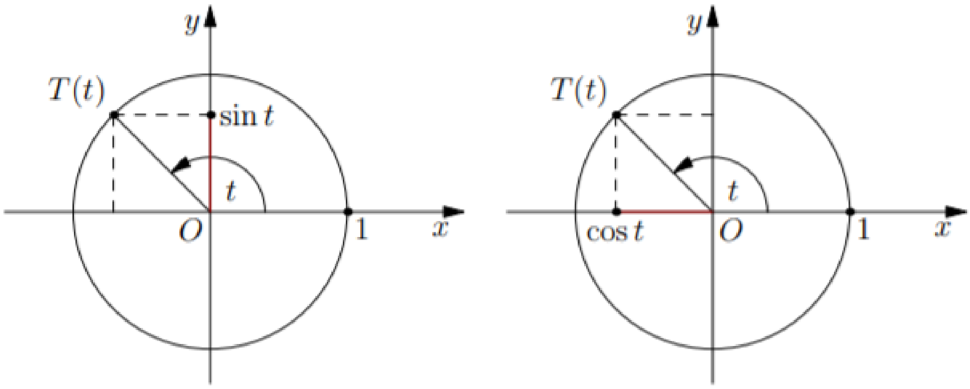


Slika 3.2. *Definicija kuta na jediničnoj kružnici*

Ako obiđemo cijelu kružnicu, duljina prijeđenog luka iznosi 2π (opseg jedinične kružnice), stoga je kut $t + 2k\pi$, $k \in Z$ ekvivalentan kutu t tj. točke $T(t)$ i $T(t + 2k\pi)$ se poklapaju.

3.2.2 Sinus i kosinus

Funkcije sinus i kosinus definiramo na brojevnoj kružnici. Funkcija sinus je ordinata, a kosinus apscisa točke *T(t)* na brojevnoj kružnici.



Slika 3.3. *Definicija sinusa i kosinusa na brojevnoj kružnici [2]*

Apsolutna vrijednost obje funkcije mora biti manja od radijusa jedinične kružnice pa dolazimo do prvog važnog svojstva

$$-1 \leq sint \leq 1 \quad i \quad -1 \leq cost \leq 1.$$

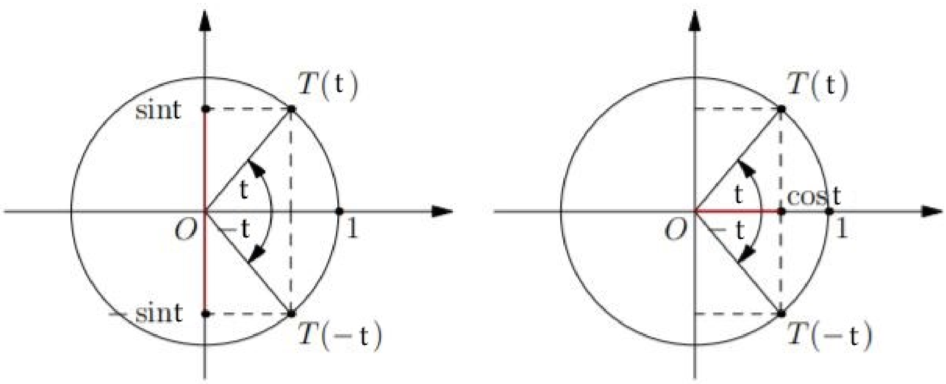
Točka *T(t)* s koordinatama $(T_x, T_y)=(cost,\ sint)$ pripada jediničnoj kružnici samo ako vrijedi Pitagorin poučak:

$$T_x^2 + T_y^2 = 1$$

tj., dolazimo do drugog važnog svojstva funkcija sinus i kosinus

$$sin^2t + cos^2t = 1.$$

Točki *T(t)* na brojevnoj kružnici su pridruženi svi realni brojevi $t + 2k\pi$, gdje je k cijeli broj, odnosno, funkcije sinus i kosinus su periodične s periodom 2π.*[2]*



Slika 3.4. *Parnost funkcija sinus i kosinus[2]*

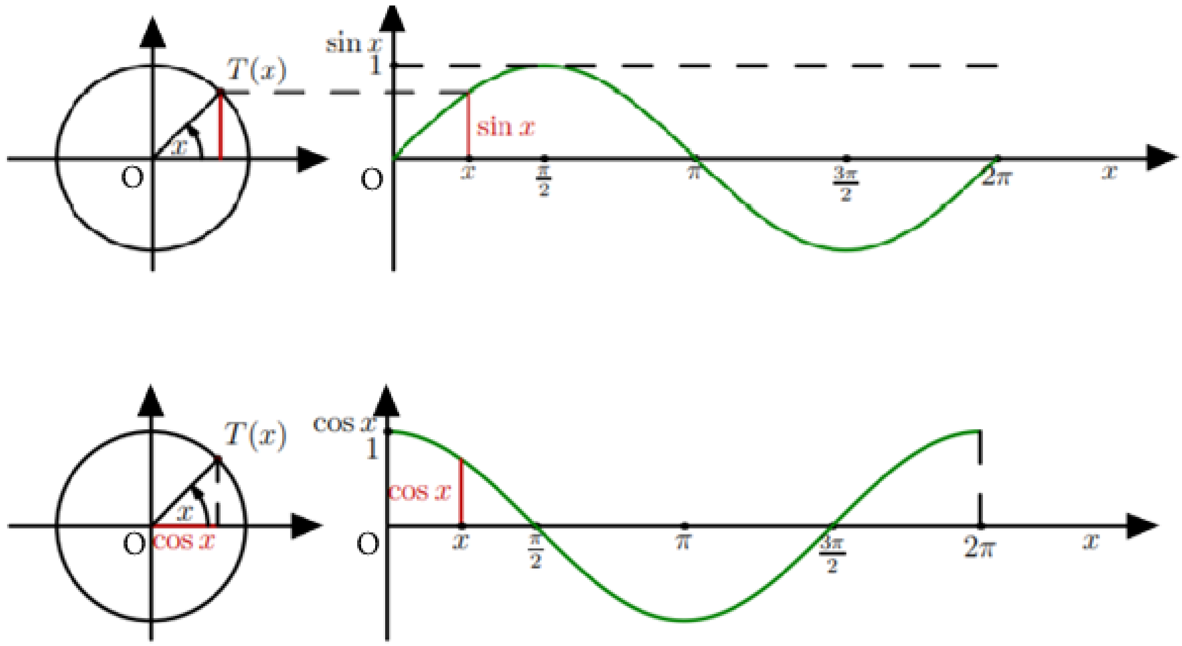
Sa slike 3.4. vidimo na vrijedi

$$\sin(-t) = -sint \quad i \quad \cos(-t) = \cos(t)$$

pa ćemo funkciju sinus nazivati neparnom, a kosinus parnom funkcijom.[2]

3.3.3. Grafički prikaz funkcija sinus i kosinus

Grafove funkcija sinusa i kosinusa konstruiramo pomoću brojevne kružnice. Na os *x* naneseno kut u radijanima, a na os *y* prenesemo ordinatu točke *T(t)*(za sinus; za kosinus stavljamo apscisu točke *T(t)*) te postupak ponavljamo dok ne obiđemo cijelu kružnicu.



Slika 3.5. *Konstrukcija funkcija sinus i kosinus*

Periodi funkcija sinus i kosinus iznose *2π*, pa je dovoljno konstruirati graf na intervalu [*0, 2π*].

3.4 Sinusni valovi

Koje je značenje sinusnih valova u raspravi percepcije visine zvuka ili tona? Možemo li iskoristiti i neku drugu familiju periodičnih funkcija?

Odgovor se nalazi u diferencijalnoj jednadžbi jednostavnih harmonijskih gibanja. Rješenja diferencijalne jednadžbe

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\kappa y$$

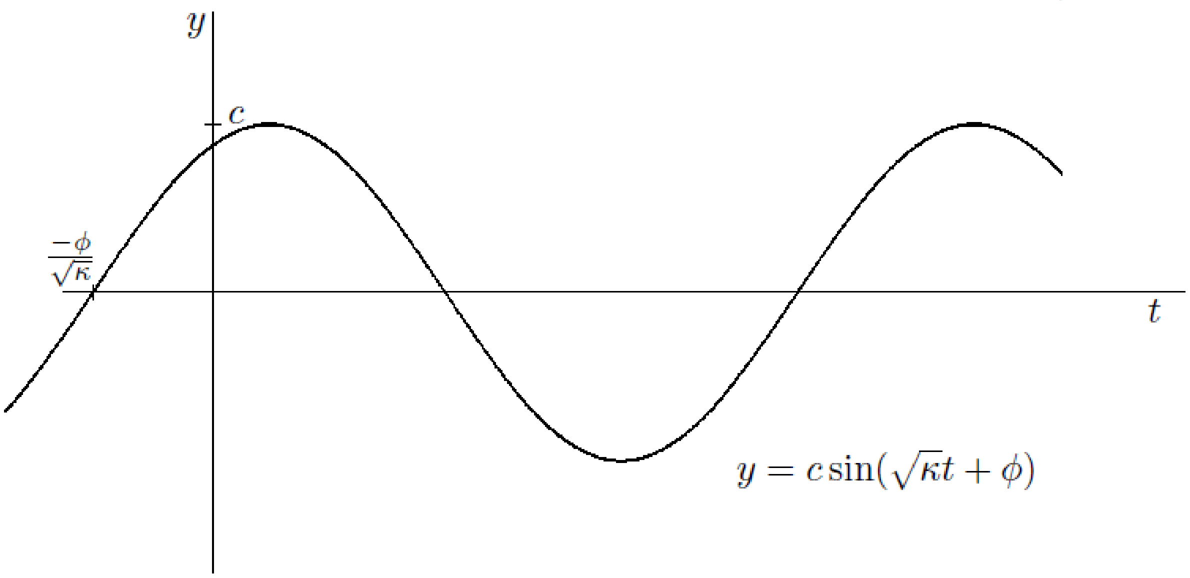
su funkcije

$$y = A\cos\sqrt{\kappa}\,t + B\sin\sqrt{\kappa}t$$

ili ekvivalentno

$$y = C\sin(\sqrt{\kappa}t + \varphi)$$

gdje y predstavlja vrijednost u određenom vremenu t, t predstavlja vrijeme, κ konstantu proporcionalnosti, φ fazni pomak, te C amplitudu funkcije.



Slika 3.6 *Prikaz rješenja diferencijalne jednadžbe harmonijskih gibanja*

Gornja diferencijalne jednadžba opisuje što se događa s objektom kada na njega djelujemo silom prema ravnotežnom položaju, gdje je iznos sile proporcionalan udaljenosti od ravnotežnog položaja.

3.5 Harmonijsko gibanje

Uzmimo česticu mase *m* na koju djelujemo silom *F* prema ravnotežnom položaju, $y = 0$, i čiji je iznos proporcionalan udaljenosti od ravnotežnog položaja *y*.

$$F = -ky$$

Ovdje, *k* predstavlja konstantu proporcionalnosti. Newtonov zakon gibanja daje nam jednadžbu

$$F = ma$$

gdje

$$a = \frac{d^2y}{dt^2}$$

predstavlja ubrzanje čestice i *t* predstavlja vrijeme. Spajanjem ovih dviju jednadžbi dobivamo diferencijalnu jednadžbu drugog reda

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{ky}{m} = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe su funkcije

$$y = Acos(\sqrt{k/m}t) + Bsin(\sqrt{k/m}t).$$

Činjenica da su ovo rješenja diferencijalne jednadžbe, objašnjava zašto koristimo sinusni val, a ne neku drugu periodičnu funkciju, za analizu harmonijskih periodičkih valova.

3.6 Vibrirajuće žice

Zamislimo vibrirajuću žicu koja je učvršćena s obje strane. Pretpostavimo da žica ima kuglicu zakačenu na sredini, takvu da je masa *m* kuglice puno veća od mase žice. Onda žica djeluje silom *F* na kuglicu u smjeru ravnotežnog položaja

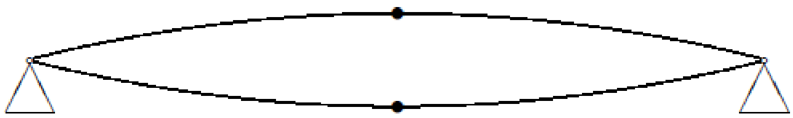
$$F = -ky.$$

Prema prošlom poglavlju, diferencijalna jednadžba i njena rješenja su:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{ky}{m} = 0$$

$$y = Acos(\sqrt{k/m}t) + Bsin(\sqrt{k/m}t)$$

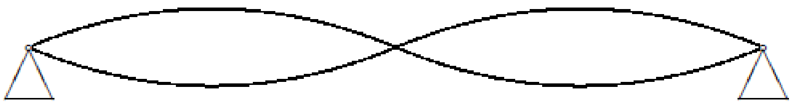
gdje su konstante *A* i *B* određene početnim položajem i brzinom kuglice.



Slika 3.7 *Prikaz gibanja žice s kuglicom u sredini*

Ako je masa žice jednoliko raspoređena, onda su mogući različiti načini vibriranja. Na primjer, središnja točka žice može ostati mirna, dok dvije polovice vibriraju različitim fazama. Na gitari se to može postići držanjem sredine žice, povlačenjem i otpuštanjem. Dobiveni zvuk će biti točno oktavu iznad prirodne visine ili točno dvostruke frekvencije. Korištenje harmonika na ovaj način je uobičajen kod gitarista. Ako svaka polovica žice vibrira čistim sinusnim valom, onda se gibanje svake točke osim središnje može opisati funkcijom

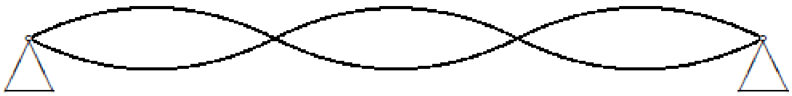
$$y = Acos\left(2\sqrt{k/m}t\right) + Bsin\left(2\sqrt{k/m}t\right).$$



Slika 3.8 *Središnja točka ostaje mirna, dok se polovice gibaju*

Ako točku udaljenu točno trećinu duljinu žice držimo pri povlačenju žice, dobit ćemo zvuk koji je oktavu i čistu kvintu iznad prirodne visine, ili točno trostruke frekvencije. Kao i u prošlom primjeru, ako tri dijela žice vibriraju čistim sinusnim valovima, pri čemu srednja trećina vibrira suprotnom fazom naspram druge dvije, onda je gibanje bilo koje pokretne toče izraženo funkcijom

$$y = Acos\left(3\sqrt{k/m}t\right) + Bsin\left(3\sqrt{k/m}t\right).$$



Slika 3.9 *Gibanje žice s dvije nepokretne točke*

Generalno, povučena žica će vibrirati mješavinom svih načina opisanih višekratnicima prirodne frekvencije s različitim amplitudama. Amplitude će ovisiti o tome je li žica povučena (gitara) ili udarena (klavir). Općenita formula gibanja bilo koje točke na žici će onda biti

$$y = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(n\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B_n\left(n\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)\right).$$

3.7 Sinusni valovi i frekvencijski spektar

Kako se kutovi u matematici mjere radijanima, a ima ih 2π u punom krugu, sinusni val s frekvencijom v u Hertzima, amplitudom C i faznim pomakom φ će odgovarati valu oblika

$$y = C\ sin(2\pi vt + \varphi).$$

Veličina $\omega = 2\pi v$ se naziva kružna frekvencija. Uloga kuta φ je da pokaže gdje sinusni val siječe vremensku os. Na primjer, kosinus je povezan sa sinusom preko jednadžbe $cosx = sin(x + \pi/2)$, što znači da je kosinus zapravo sinusni val s različitom fazom.

440 Hz

Moderni standard stavlja ton A iznad srednjeg C na 440 Hz, te to možemo predstaviti valom oblika

$$y = c\sin(880\pi + \varphi).$$

To možemo pretvoriti u linearnu kombinaciju sinusa i kosinusa koristeći standardne formule za sinus i kosinus zbroja:

$$\sin(A + B) = sinAcosB + cosAsinB$$

$$\cos(A + B) = cosAcosB - sinAsinB.$$

Pa dobivamo

$$c\sin(\omega t + \varphi) = a\ cos\omega t + bsin\omega t$$

gdje

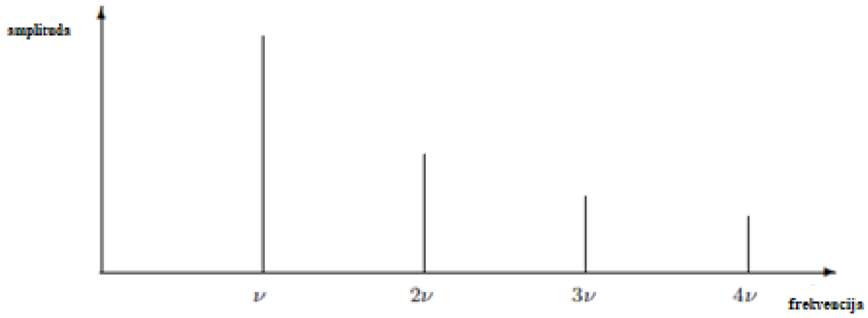
$$a = c\sin\varphi, \quad b = c\cos\varphi.$$

Ili obrnuto, ako su nam zadani a i b, onda c i φ možemo odrediti pomoću

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad tg\varphi = \frac{a}{b}.$$

Poglavlje ćemo završiti uvođenjem koncepta spektra koji igra veliku ulogu u razumijevanju glazbenih nota. Spektar zvuka je graf koji prikazuje amplitude različitih frekvencija zvuka. Slika 3.10 prikazuje spektar vibrirajuće žice s osnovnom frekvencijom

$$v = \frac{\sqrt{k/m}}{2\pi}.$$



Slika 3.10 *Spektar frekvencija vibrirajuće žice*

Graf prikazuje zvuk s diskretnim frekvencijskim spektrom s komponentama frekvencije na cjelobrojnim višekratnicima osnovne frekvencije (*v, 2v, 3v, …*) i s amplitudom koja opada na višim frekvencijama.

4. HARMONIJA

4.1 Alikvote ili harmonici

Kada nota ima određenu visinu, s frekvencijom *v,* zvuk je zapravo periodičan s tom frekvencijom. Fourierova teorija reda, koja je objašnjena u poglavlju 4.3, pokazuje da se takav zvuk može prikazati kao zbroj sinusnih valova s različitim faznim pomacima, na cjelobrojnim višekratnicima frekvencije *v*. Komponenta zvuka s frekvencijom iznosa *v* naziva se osnovni ton. Komponenta s frekvencijom *nv* se naziva *n*-ti harmonik ili (n - 1)-ta alikvota. Na primjer, za *n = 3*, dobivamo treći harmonik ili drugu alikovtu[3].

4.2 Jednostavni cjelobrojni omjeri

Zašto dvije note koje su udaljene za oktavu zvuče konsonatno, dok dvije note udaljene za malo više ili malo manje od oktave zvuče disonantno? Konsonanca i disonanca predstavljaju kategorizaciju istodobnih i uzastopnih tonova. Konsonanca predstavlja kombinaciju tonova koja kod slušatelja izaziva dojam sklada i ugode, dok disonanca izaziva dojam neslaganja i nesuglasja[4].

Interval jedne oktave odgovara udvostručavanju frekvencije vibracije. Na primjer, ton A iznad srednjeg C odgovara frekvenciji od 440 Hz, dok A ispod srednjeg C odgovara frekvenciji od 220 Hz. Ako odsviramo ove note na žičanom ili puhačkom instrumentu, svaka nota će sadržavati ne samo komponentu na toj određenoj frekvenciji, nego i alikvote koje odgovaraju cjelobrojnom višekratniku te frekvencije. Za te dvije note imat ćemo alikvote na:

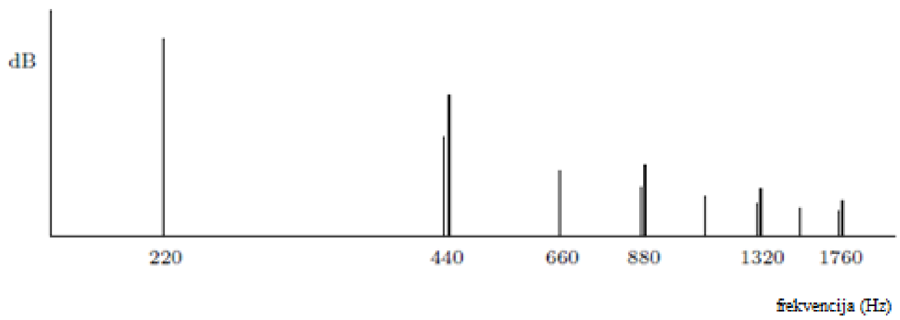
440 Hz, 880 Hz, 1320 Hz, 1760 Hz, …

220 Hz, 440 Hz, 660 Hz, 880 Hz, 1100 Hz, …

Ako u drugu ruku, odsviramo dvije note s frekvencijama na 445 Hz i 220 Hz, onda se alikvote pojavljuju na:

445 Hz, 890 Hz, 1335 Hz, 1780 Hz, . . .

220 Hz, 440 Hz, 660 Hz, 880 Hz, 1100 Hz, 1320 Hz, . . .



Slika 4.1 *Osnovne frekvencije i njene alikvote*

Postojanje komponenti na 440 Hz i 445 Hz, i na 880 Hz i 890 Hz, i tako dalje, uzrokuje osjećaj grubosti koje naše uho interpretira kao disonancu.

Zbog ekstremne konsonance intervala oktave, te njezine uloge u nizu alikvota, ljudski mozak često percipira dvije note koje su udaljene za oktavu kao istu notu, ali s različitim visinama. Kada zbor pjeva jednoglasno, to uobičajeno znači da muškarci i žene zapravo pjevaju udaljeni za oktavu.

Glazbeni interval savršene petine[3] odgovara omjeru frekvencija 3:2. Ako dvije note odsviramo s tim omjerom, onda će se treća alikvota niže note poklopiti s drugom alikvotom više note, te će te note imati zajedničke više harmonike. Ako je ipak omjer malo drukčiji od 3:2, onda će se pojaviti osjećaj grubosti između treće alikvote nižeg tona i druge alikvote višeg tona, te će te note zvučati disonantno.

Pitagora je ovo otkrio u 6.st.pr.Kr. Pokazao je da kada dvije slične žice jednako nategnute proizvedu zvuk zajedno, one daju ugodan zvuk ako su duljine žica u omjeru malih cijelih brojeva.

4.3 Fourierova teorija

Postavlja se pitanje kako žica može vibrirati na više različitih frekvencija u isto vrijeme? Glazbu u fizikalnom smislu čine zvukovi koji nastaju titranjem nekog tijela, odnosno izvora zvuka. Ti titraji tada stvaraju zvučne valove koji se kreću kroz zrak (vodu, metal ili neki drugi medij) i dolaze do našeg uha. Glavna svojstva zvučnog vala su amplituda, intenzitet i frekvencija. Naše uši vibriraju slično izvoru zvuka, te nam omogućavaju da čujemo različite zvukove. Ljudsko uho može razlikovati zvukove po boji, glasnoći i visini. Također, postoji i raspon intenziteta koje ljudsko uho uopće čuje, a kreće se od praga čujnosti (0 dB) do praga bola odnosno (130 dB). Frekvencija je pojam koji se veže uz periodične zvučne valove, kao što su tonovi. Ako je p periodična funkcija temeljnog perioda T, tada je 1/T frekvencija zvučnog vala.

Svojstva zvučnog vala utječu na to kako mi doživljavamo zvuk. Periodične zvučne valove definiramo kao ton, dok aperiodične ćemo doživjeti kao buku. Intenzitet vala (amplituda) doživjeti ćemo kao glasnoću, visinu predstavlja frekvencija vala, a na boju utječe oblik vala. Rastav zvučnog vala u Fourierov red zove se još i harmonijska analiza. Joseph Fourier (1768. - 1830.) francuski je matematičar fizičar po kojemu su Fourierov red i Fourierove transformacije dobile ime. Najvažniji uvjet pri razvoju funkcije u Fourierov red je da je ona periodična, stoga ako je u pitanju aperiodična funkcija, moramo ju napraviti periodičnom. Neka je $p : [0, \infty\rangle \rightarrow \mathbb{R}$. Rekli smo kako periodične zvučne valove doživljavamo kao tonove. Naša funkcija p predstavlja jedan zvučni val. Želimo vidjeti kako oblik vala djeluje na naš doživljaj boje tona. Ovakvu periodičnu funkciju, temeljnog perioda T možemo zapisati u obliku sume trigonometrijskog reda

$$p(t) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(\frac{2n\pi t}{T} + \varphi_n),$$

gdje se koeficijenti Fourierovog reda p_0, A_n, φ_n računaju iz izraza:

$$p_0 = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad sin\varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \; cos\varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}},$$

gdje su

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T p(t)\cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right)dt, \quad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T p(t)\sin(\frac{2n\pi t}{T})\ dt,$$

za proizvoljni $n \in \mathbb{N}$, te koeficijenti A_n monotono padaju prema 0 kada n teži u beskonačno[5]. Kako nas zanimaju glavne ideje, nećemo ulaziti u detalje i diskutirati o različitim vrstama konvergencije ovog reda.

Prvi član $p_1(t) = A_1\sin(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_1)$ pripadnog Fourierovog reda zovemo osnovni ili fundamentalni ton, dok se ostali članovi nazivaju alikvotni tonovi ili viši harmonici. Funkcija p_1 je periodična s temeljnim periodom T, njena je frekvencija $\frac{1}{T}$, što je zapravo jednako frekvenciji početnog vala. Kako su alikvotni tonovi spektar tonova čije su frekvencije cjelobrojni višekratnici frekvencije osnovnog tona, tada frekvencije viših harmonika iznose: $\frac{2}{T}, \frac{3}{T}, \frac{4}{T}, \frac{5}{T}, \ldots$

Neki alikvotni tonovi se ne moraju ni pojaviti u Fourierovom redu iz razloga što neki koeficijenti A_n mogu biti jednaki 0. Osnovna frekvencija tona A je jednaka svim instrumentima, no taj isti ton A zvučati će drukčije na tubi, nego na oboi. Možemo zaključiti kako na doživljaj boje tona utječe distribucija alikvotnih tonova ili matematički veličina koeficijenata A_n i φ_n, za $n \geq 2$.

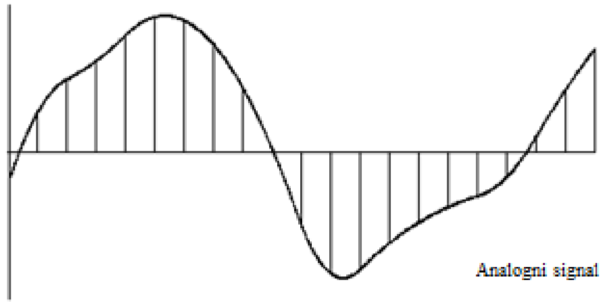
5. DIGITALNI ZVUK

5.1 Digitalni signali

Uobičajena metoda digitalnog prikazivanja zvuka je veoma jednostavna. Da bi digitalizirali analogni signal, uzorkujemo signal puno puta u sekundi te koristimo binarni broj za prikaz visine signala u svakom trenutku uzorkovanja. Oba procesa se ponekad naziva kvantizacijom, ali bitno je znati da su procesi odvojeni.

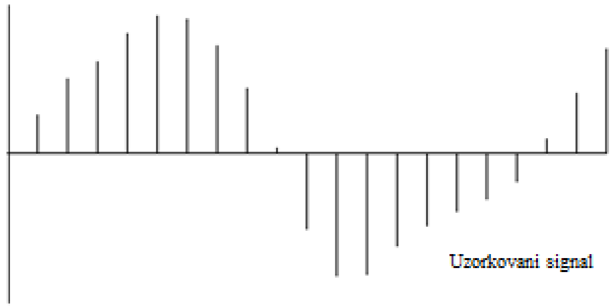
Na primjer, CD je zasnovan na stopi uzorka (eng. *sample rate*) od 44.1 KHz ili 44100 uzoraka u sekundi. Za svaku točku uzorkovanja spremamo binarni broj od 16 znamenki koji predstavlja visinu signala u toj točki.

Dijagram na slici 5.1 ilustrira prvi korak procesa digitalizacije analognog signala.



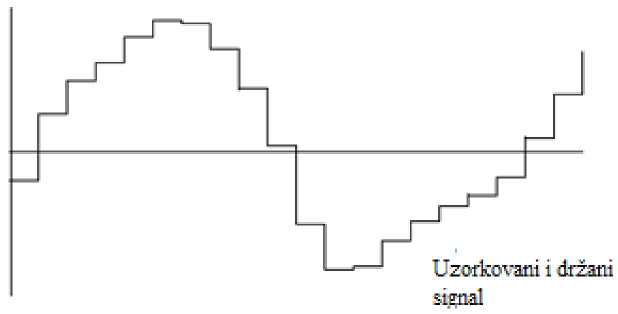
Slika 5.1 *Analogni signal[3]*

Sljedeća slika (Sl. 5.2) prikazuje uzorkovani signal, ali još uvijek s promjenjivim kontinuiranim amplitudama.



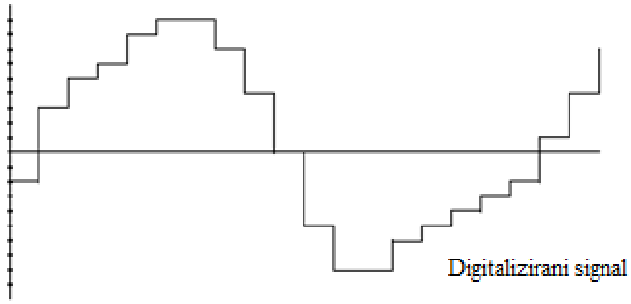
Slika 5.2 *Uzorkovani signal [3]*

Ako na signal primijenimo metodu uzorkovanja i držanja (engl. *„sample and hold“)* dobit ćemo stepeničasti valni oblik koji je prikazan na slici 5.3.



Slika 5.3 *Oblik signala nakon engl. „sample and hold“ procesa[3]*

Konačno, ako digitaliziramo uzorke, svaka vrijednost uzorka će se prilagoditi najbližoj dozvoljenoj vrijednosti. Slika 5.4 prikazuje konačni, digitalni signal.



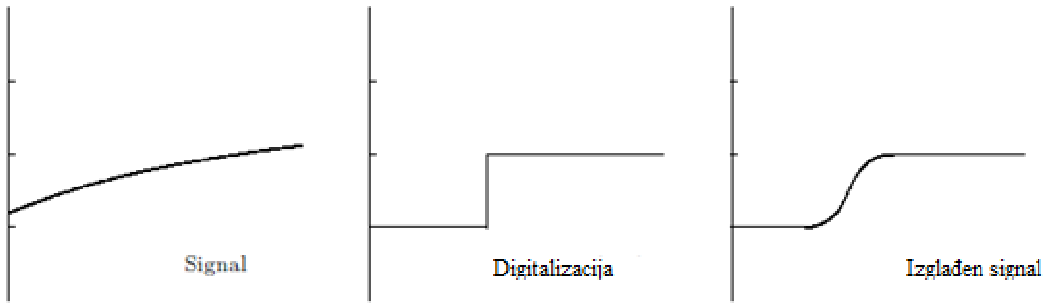
Slika 5.4 *Digitalizirani signal[3]*

U ovom procesu može doći do gubljenja podataka. Na primjer, uzorak s jako malom vrijednosti jednostavno će biti registriran kao nula. Postoji metoda za djelomično ispravljanje ove greške zvana engl. „*dithering*“ i opisana je u sljedećem poglavlju.

5.2 Dither

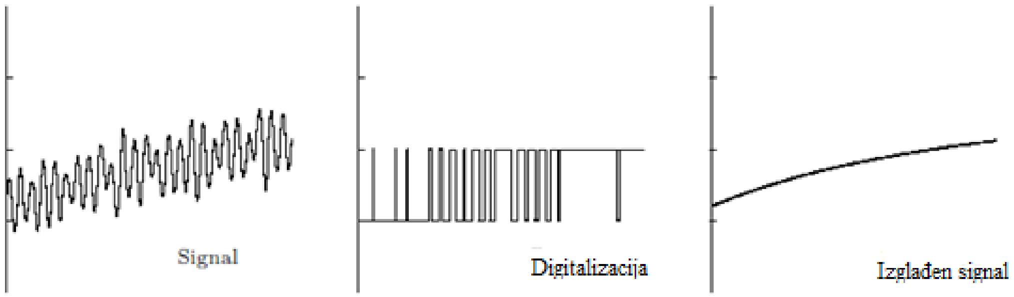
„*Dithering*“ je metoda za smanjivanje distorzija signala niskih razina zbog digitalizacije razine signala. Temelji se na prijedlogu da dodavanje niskorazinskog izvora slučajnog šuma (dithera) može povećati rezoluciju signala. Najbolje radi kada je stopa uzorka visoka u usporedbi sa stopom kojom se signal mijenja.

Da bi vidjeli kako to radi, zamislimo signal koji se polako mijenja i njegovu digitalizaciju (sl. 5.5).



Slika 5.5 *Signal i njegova digitalizacija[3]*

Slika 5.6 prikazuje kako će signal izgledati kada mu dodamo šum na amplitudi otprilike na pola veličine koraka u procesu digitalizacije.



Slika 5.6 *Prikaz signala kojem je dodan šum[3]*

Ovaj proces omogućuje bolju i točnije rekonstrukciju analognog signala iz digitalnog, tj. povećava se točnost digitalnog signala.

6. KORIŠTENJE PROGRAMA MATLAB ZA PRIKAZ I SVIRANJE ZVUČNIH SIGNALA

Kao praktični dio završnog rada, koristeći programski paket MATLAB, napravit ćemo grafičku aplikaciju koja će moći prikazati i odsvirati određene zvučne signale, te ćemo u kasnijim poglavljima analizirati i usporediti dobivene rezultate.

6.1 Uvod u MATLAB

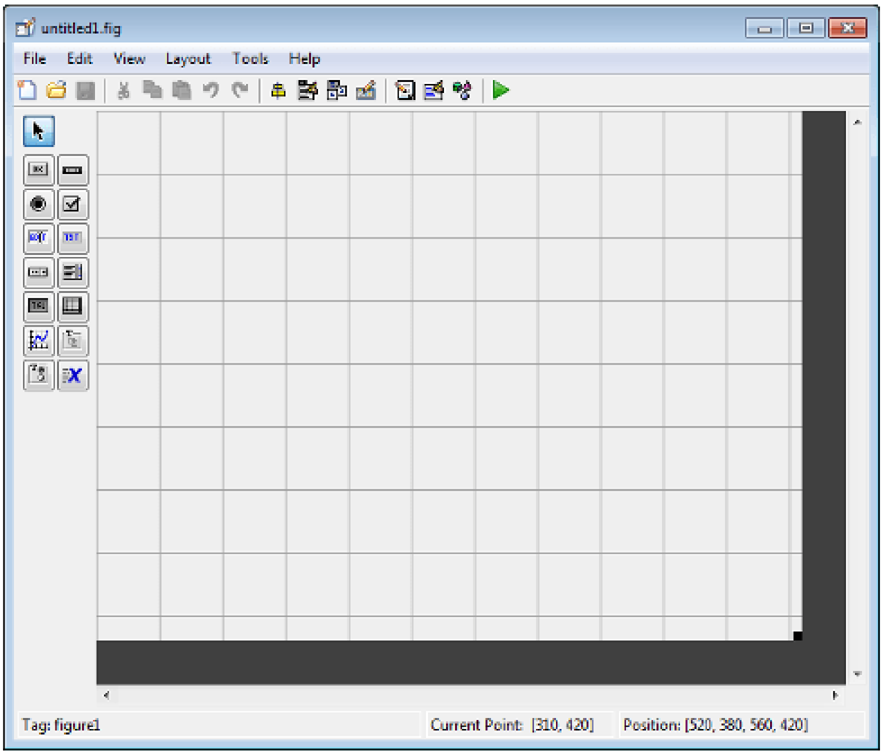
MATLAB je programski jezik visoke razine i interaktivna je okolina za numeričko i matrično računanje, te za vizualizaciju i programiranje. Naziv je nastao kao kratica od engleskih riječi MATrix LABoratory. Prva verzija MATLAB-a napisana je krajem 1970. godine na sveučilištima *Novog Meksika* i *Stanforda*. Pomoću MATLAB-a mogu se analizirati podatci, izraditi algoritmi te stvoriti modeli i aplikacije. Jezik, alati i matematičke funkcije omogućuju brži rad nego s tablicama ili tradicionalnim programskim jezicima, kao što su C/C++ ili Java. MATLAB se može koristiti za niz aplikacija, uključujući obradu signala i komunikacija, obradu sustava kontrole, ispitivanja i mjerenja, računalnih financija i računalne biologije.

6.2 MATLAB GUI

Za kreiranje grafičkog korisničkog sučelja koristit ćemo MATLAB-ovo razvojno okruženje koje se naziva GUIDE. On nam pruža alate za kreiranje korisničkog sučelja. Ti alati pojednostavljuju proces raspoređivanja i programiranja korisničkih sučelja.

Koristeći GUIDE Layout Editor možemo jednostavno, uz pomoć engl. *„click and drag“* opcije, rasporediti komponente korisničkog sučelja – poput osi koordinatnog sustava, gumbe, panele, klizače, tekstualne okvire i mnoge druge. Layout Editor nam također omogućuje kreiranje izbornika. Jednostavno možemo mijenjati veličinu sučelja, oblikovati spomenute komponente, poravnavati ih te vidjeti hijerarhijski popis objekata koji su kreirani za određene komponente. Sve spomenuto lako je vidljivo na slici 6.1.

Nakon što smo odredili željeni raspored, potrebno je programirati ponašanje za svaku od komponenti. GUIDE automatski generira programsku datoteku koja sadrži MATLAB funkcije koje kontroliraju kako se korisničko sučelje ponaša. Ova datoteka pruža kod za inicijalizaciju sučelja, te sadrži *framwork* za UI *callback-ove.* Jednostavnim klikom na komponentu MATLAB nam nudi programiranje *Callback-ova*, tj. funkcija koje se pozivaju na određenu radnju, npr. klik na gumb, pomak klizača itd.



Slika 6.1 *Prikaz MATLAB-ovog Layout Editor-a*

6.3 Funkcije korištene u izradi aplikacije

Koristimo MATLAB-ove ugrađene funkcije za prikaz i sviranje signala. Dvije osnovne funkcije su *plot* i *sound*.

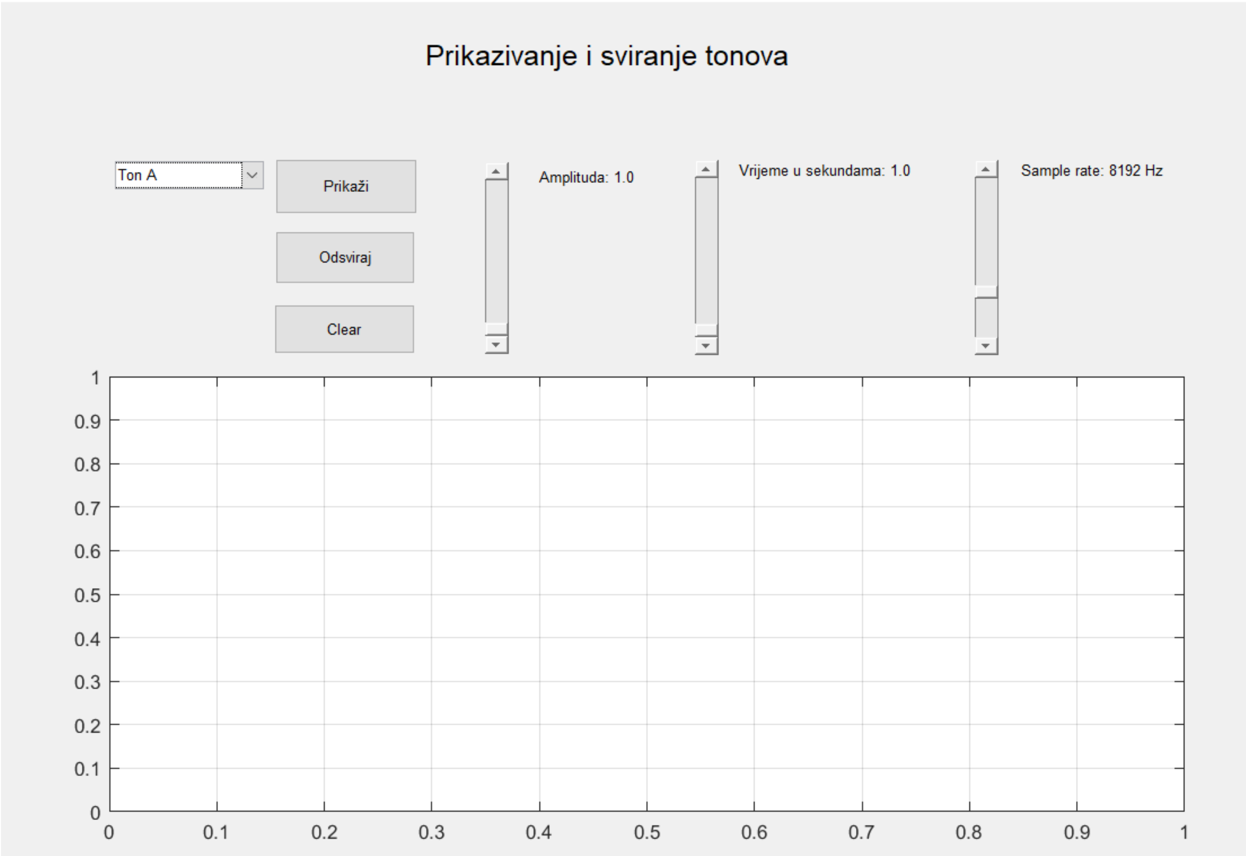
Plot funkcija omogućuje dvodimenzionalni prikaz funkcije na grafu. Funkcije koje ćemo prikazivati su sinusni zvučni signali koji su ovisni o vremenu *t*, što znači da prvo moramo definirati *t*, a onda i funkciju ovisnu o njemu. Primjer je prikazan na slici 6.2.

```
t = [0:0.004:1.0];
A = sin(2*pi*440*t)
plot(A);
```

Slika 6.2 *Ispis koda za prikazivanje sinusnog zvučnog signala*

Funkcija *sound(y)* šalje signal *y* na zvučnike s predefiniranom stopom uzorkovanja od 8192 Hz. Dodatno, možemo i sami zadati stopu uzorkovanja korištenjem funkcije *sound(y, fs)*[6].

6.4 Prikaz aplikacije



Slika 6.3 *Početni izgled aplikacije*

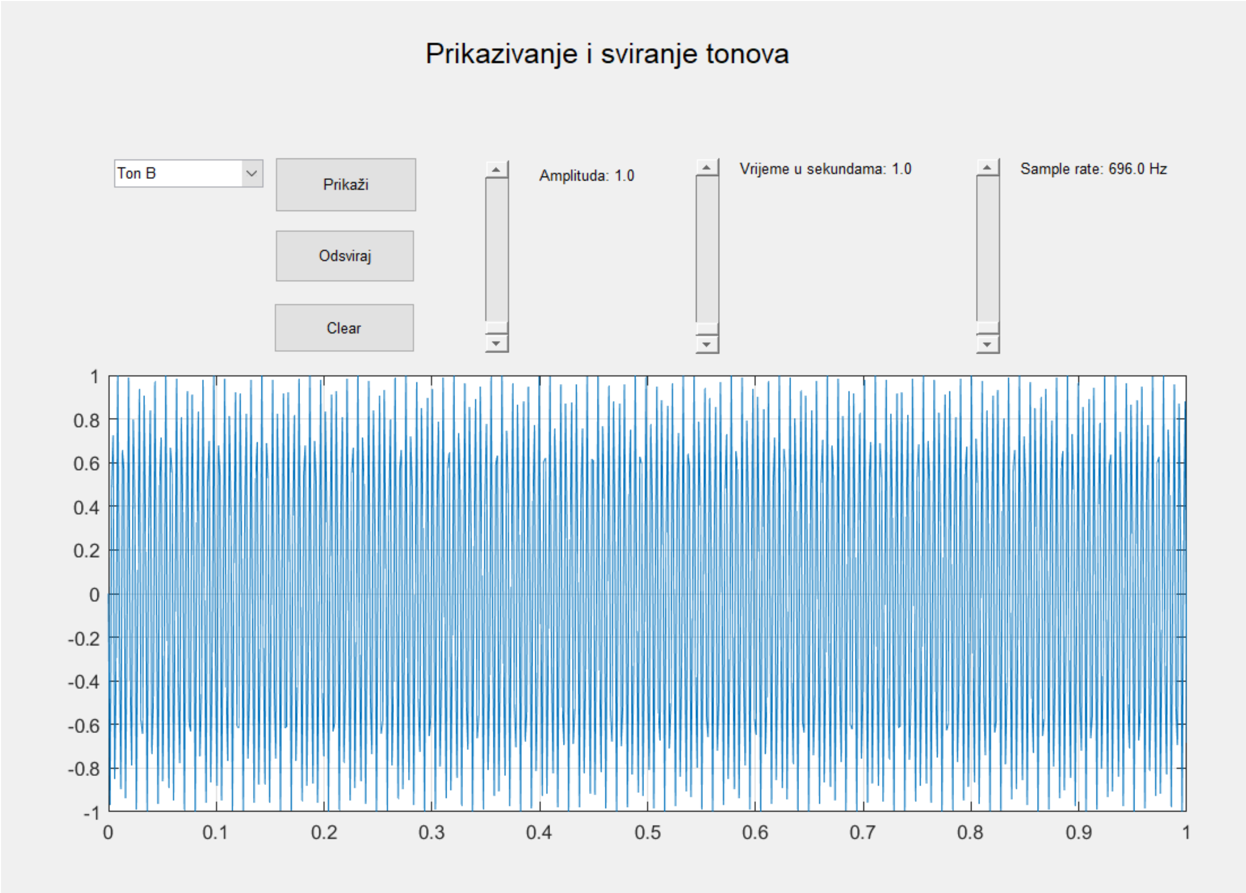
Slika 6.3 prikazuje izgled aplikacije pri njenom pokretanju. Početni korak u korištenju same aplikacije je odabir tona koji želimo prikazati ili odsvirati. Mogućnosti pri odabiru tonova, te njihove frekvencije su prikazani na slici 6.4. Zvučni val svakog od zadanih tonova je oblika

$$A\sin(2\pi f t).$$

Osim odabira tonova, aplikacije omogućuje odabir željene amplitude, vremena trajanja te stope uzorkovanja. Utjecaj ovih parametara će biti opisan i analiziran u sljedećem poglavlju.

Ton	**Frekvencija [Hz]**
A	440
B	493.88
C#	554.37
D	587.33
E	659.26
F#	739.99

Slika 6.4 *Popis tonova i njihove pripadajuće frekvencije*



Slika 6.5 *Prikaz tona B s amplitudom 1, trajanjem od 1 sekunde i stopom uzorka od 696 Hz*

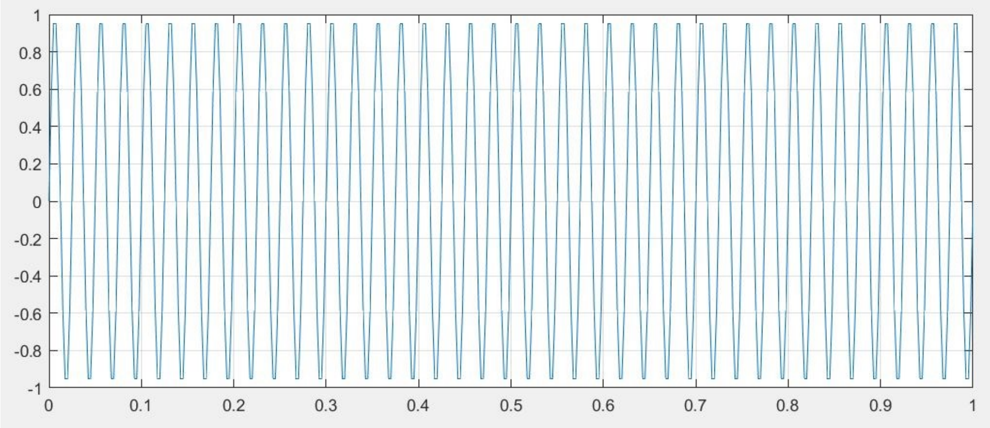
6.5 Analiza utjecaja parametara na zvučni val

U ovom poglavlju ćemo uzeti ton A, mijenjati mu parametre, te promatrati kako će se graf mijenjati ovisno o promjeni pojedinog parametra.

6.5.1 Početni parametri

Za početni graf uzet ćemo parametre kako slijede:

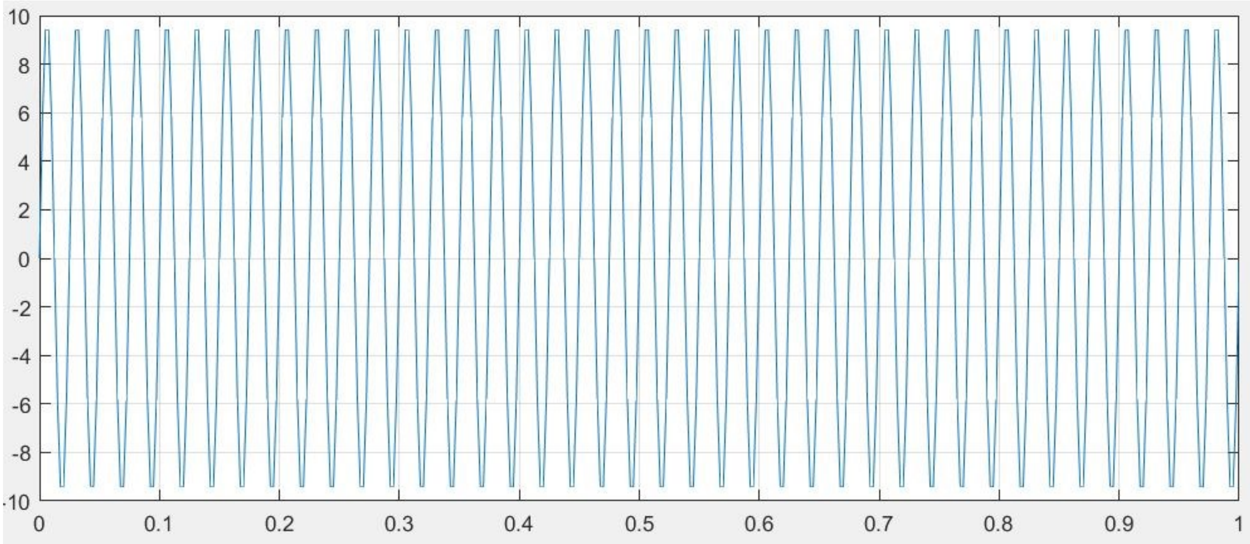
$A = 1$, $t = 1$ s, $f_s = 400$ Hz



Slika 6.6 *Izgled početnog grafa*

6.5.2 Promjena amplitude

Promijenit ćemo amplitudu na $A = 10$.



Slika 6.7 *Izgled grafa kada mu se mijenja samo amplituda*

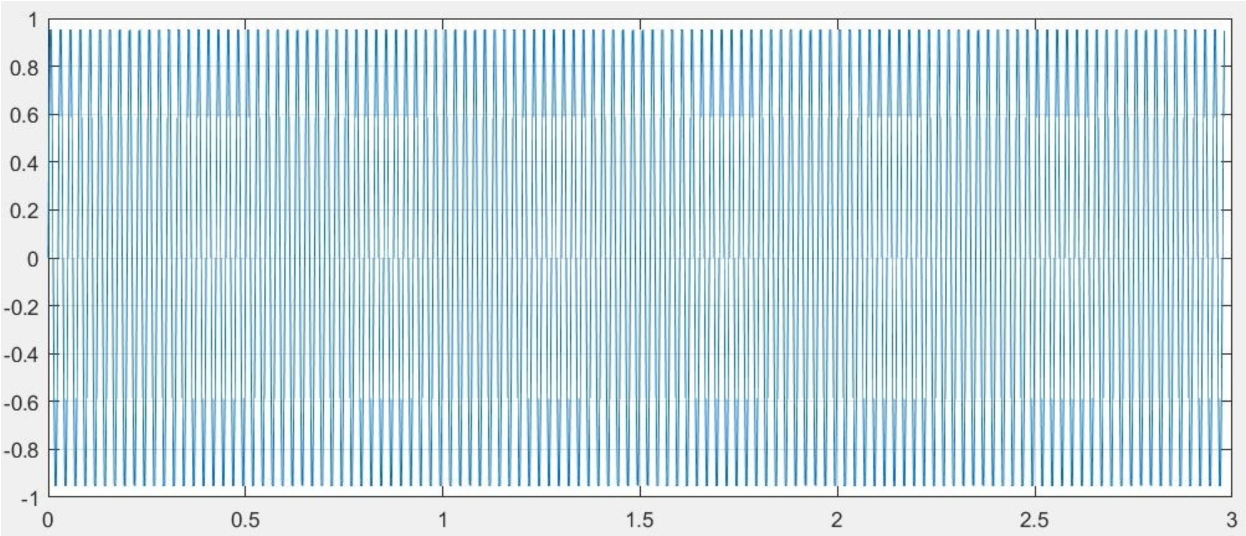
Iz slike možemo zaključiti da će oblik grafa ostati isti, samo će mu se povećati vrijednosti na *y*-osi (amplitudnoj osi) i nikada neće prelaziti 10. Znamo da za svaki realni broj, sinus može poprimiti vrijednosti samo između -1 i 1, tj.

$$\mathbb{R} \rightarrow [-1, 1].$$

Pošto izlaz sinusne funkcije množimo određenom amplitudom (u ovom slučaju amplitudom iznosa 10), zaključujemo da vrijednosti na *y*-osi nikada neće prelaziti -10 i 10, tj. to će biti minimalna i maksimalna vrijednost funkcije.

6.5.3 Promjena vremena trajanja

Umjesto 1 sekunde iz prošlih primjera, koristit ćemo vrijeme trajanja od 3 sekunde.

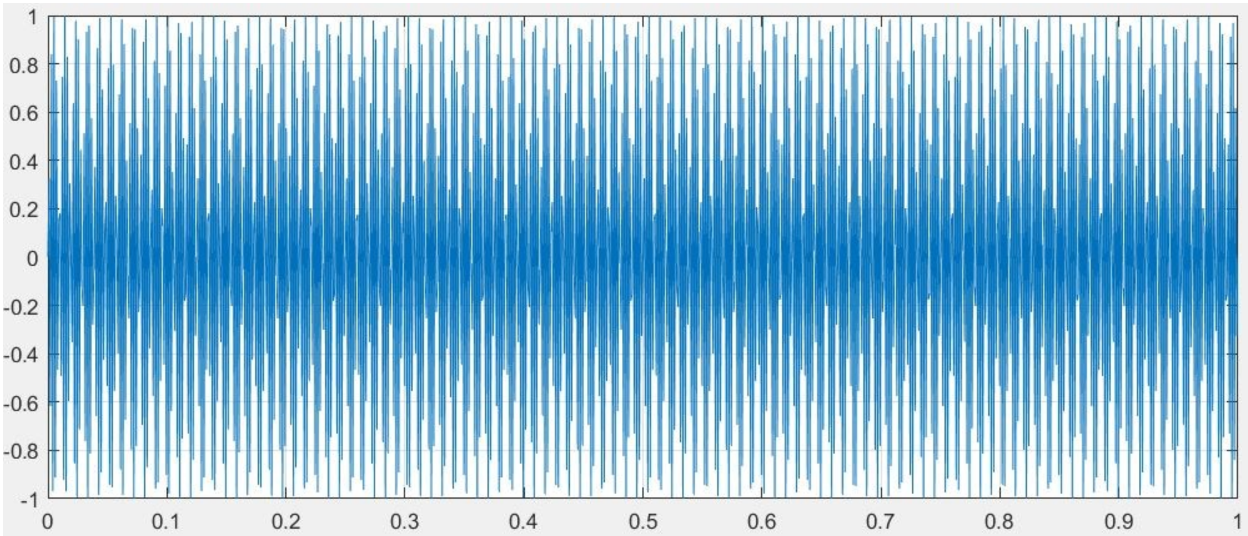


Slika 6.8 *Izgleda grafa kada mu se mijenja vrijeme trajanja*

Iako izgleda da se graf promijenio, tj. da izgleda gušće, zapravo nema promjene u obliku grafa, samo duže traje, što možemo zaključiti gledanjem vrijednosti na vremenskoj osi. Kako znamo da je domena sinusne funkcije skup realnih brojeva ($\mathbb{R}$), povećavanje vremena t neće utjecati na izgled grafa funkcije.

6.5.4. Promjena stope uzorkovanja

Povećavamo stopu uzorkovanja f_s sa 400 Hz na 1000 Hz.



Slika 6.9 *Izgled grafa kada mu se mijenja stopa uzorkovanja*

Ovdje primjećujemo najveće promjene. Povećavanje vrijednosti f_s zapravo dovodi do toga da graf prikazuje više vrijednosti u usporedbi s prošlim grafovima. Iz same definicije stope uzorkovanja možemo zaključiti razliku između grafova, tj. što je veća stopa, više će vrijednosti funkcije tona A biti prikazano na grafu.

6.6 Sinteza i prikaz glazbenog djela

U ovom poglavlju ćemo iskoristiti već definirane osnovne tonove kako bi skladali te prikazali jednu od osnovnih skladbi „Blistaj, blistaj, zvijezdo mala“.

Pošto već imamo definirane osnovne tonove na slici 6.4., sljedeći korak je poredati ih tako da daju željenu pjesmu.

AA	EE	F#F#	EE
DD	C#C#	BB	AA
EE	DD	C#C#	BB

Slika 6.10. *Redoslijed tonova željene skladbe*

Dodatno ćemo ponoviti retke da bi dobili zvuk željene skladbe. Slika 6.11. prikazuje definicije redaka i pjesme u MATLAB-u.

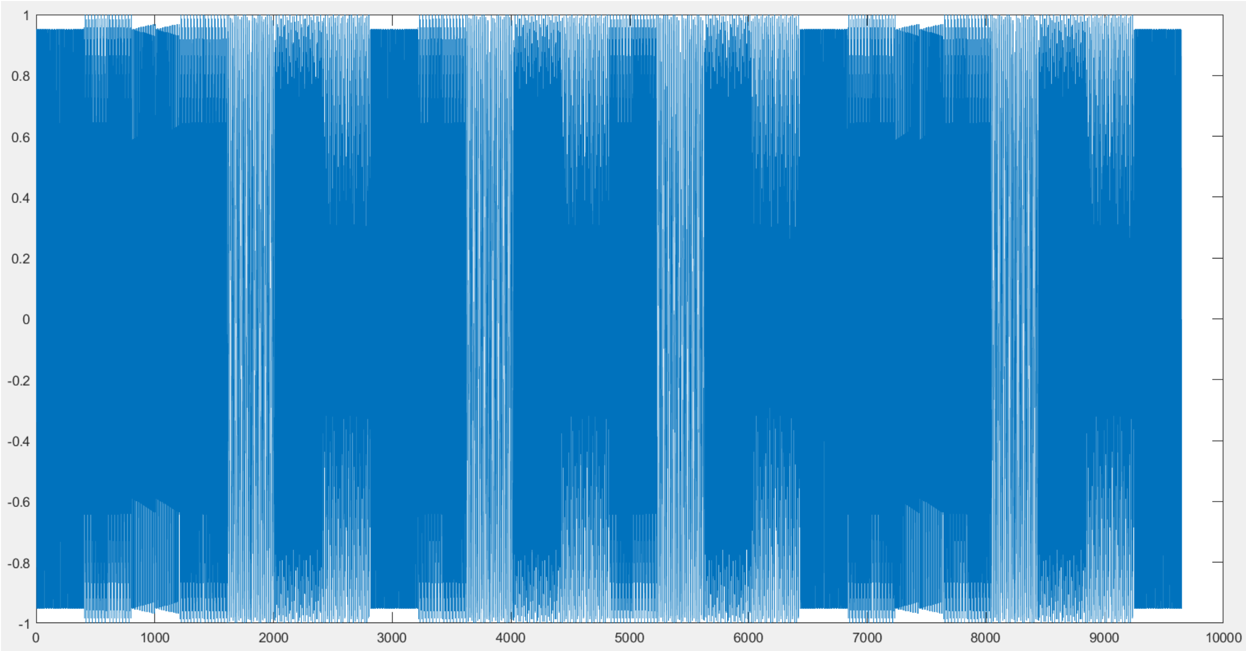
```
redak1 = [a,a,e,e,f,f,e,e];
redak2 = [d,d,cs,cs,b,b,a,a];
redak3 = [e,e,d,d,cs,cs,b,b];

pjesma = [redak1, redak2, redak3, redak3, redak1, redak2];
```

Slika 6.11. *MATLAB kod za definiranje pjesme*

Bitno je napomenuti da su svi osnovni tonovi zapravo vektori s vrijednostima sinusne funkcije u svakom trenutku trajanja. Da bi došli do prvog retka pjesme, koristimo konkatenaciju vektora, tj. na kraj prvog vektora se dodaju vrijednosti drugog vektora itd. Isti postupak koristimo i za definiciju same pjesme.

Sada kada smo definirali sve potrebne varijable za skladanje pjesme, možemo ju odsvirati pomoću MATLAB naredbe *sound(pjesma)* te prikazati izgled same pjesme u vremenskoj domeni pomoću funkcije *plot(pjesma)*. Sviranje na zvučnike računala šalje svima poznate zvuke pjesme „Blistaj, blistaj“.



Slika 6.12. *Prikaz pjesme „Blistaj, blistaj“ u MATLAB-u*

Na slici 6.12. možemo primijetiti razliku u izgledu svakog od tonova. Neki dijelovi grafa (ili tonovi) su gušći, a neki rjeđi, što možemo objasniti razlikom u frekvencijama svakog od osnovnih tonova. Pošto znamo da je odnos perioda i frekvencije obrnuto proporcionalan, možemo zaključiti da kako se povećava frekvencija, tako se smanjuje period, što dovodi to toga da se neki dijelovi grafa gušći, a neki rjeđi.

7. ZAKLJUČAK

Pokazali smo brojne poveznice između svijeta glazbe i matematike, iako ih postoji još više, te će ih još više, bez sumnje, biti otkriveno i pokazano u budućnosti. Odnos između matematike i glazbe je neizmjeran. Rasteže se na više od 2000 godina i obuhvaća stotine ljudi, od matematičara i fizičara, do skladatelja i glazbenih teoretičara. Bilo bi nemoguće opisati svaki aspekt ovog kompleksnog odnosa, zato sam se u ovom radu fokusirao na meni poznata polja.

Računala u potpunosti pomažu u analizi ovih odnosa, od analize samog izgleda zvučnog vala, analize zvuka i njegovih svojstava, sve do skladanja i kreiranja glazbe elektronskim putem. Računala i moderna tehnologija zasigurno će pokazati još nebrojeno mnogo odnosa između matematike i glazbe.

LITERATURA

[1] Reginald Smith Brindle, *The New Music*, Oxford University Press, 1987., p. 42

[2] Prof. Dr. Sc. Miroslav Požek

http://www.phy.pmf.unizg.hr/~mpozek/fk1/materijali/01_trigonometrija.pdf

[3] Dave Benson, *„Music: A Mathematical Offering* „ Department of Mathematics, Meston Building, University of Aberdeen, Aberdeen AB24 3UE, Scotland, UK, 2008.

[4] Lahdelma, Imre, and Tuomas Eerola (2020.). "*Cultural Familiarity and Musical Expertise Impact the Pleasantness of Consonance/Dissonance but Not Its Perceived Tension.*" *Scientific Reports* 10

[5] Ines Culek, *Glazba i Matematika*, Diplomski rad, Osijek, 2015.

[6] Derrick Smith, *Linear Algebra and Music,* Lamar University, 2016./2017.

http://web.mit.edu/18.06/www/Essays/linear-algebra-and-music.pdf

SAŽETAK

Cilj završnog rada je bio pronaći i pokazati poveznicu između matematike i glazbe, te pomoću programskog paketa MATLAB prikazati kako izgledaju osnovni glazbeni tonovi i jednostavna skladba u vremenskoj domeni.

U radu je matematički opisan zvuk, kao osnovno sredstvo glazbe. Dana je definicija zvuka, njegova podjela, te svojstva koja ga dodatno opisuju. Zvučni valovi su odgovorni za širenje samog zvuka, zbog toga su u radu objašnjene trigonometrijske funkcije koje opisuju to harmonijsko gibanje. Na primjeru vibrirajućih žica objašnjena je matematička i fizikalna pozadina harmonika, te objašnjeni neki od cjelobrojnih omjera koji glazbi daju dojam sklada i ugode. Također je prikazana digitalizacija zvučnog signala.

Koristeći MATLAB, napravljena je GUI aplikacija koja se može koristiti za analizu osnovnih glazbenih tonova mijenjanjem parametara funkcija koje opisuju svaki od tonova. Dodatno, skladana je i na grafu prikazana jednostavna pjesma korištenjem već spomenutih tonova.

Ključne riječi: glazbeni tonovi, harmonija, MATLAB, valovi, zvuk

ABSTRACT

Title: Mathematics and music

The goal of the thesis was to find and display the link between mathematics and music and then, using the programming environment MATLAB, plot some of the basic musical tones and show how a simple composition looks like in time domain.

The thesis describes sound, as a basic mean of music. We defined what sound is, how it is classified and shown some of its properties. Sound waves are responsible for sound propagation, therefore we've explained trigonometric functions that describe harmonic motion. Using a vibrating string example, we've described the mathematical and physical background of harmonics and explained some of the simple integer ratios that give music the feel of harmony and pleasantness. Also, we've shown the digitization of a sound wave.

Using MATLAB, we've developed a GUI application that can be used to analyze basic musical tones by changing the function parameters that describe each of the tones. Additionally, we've composed and plotted a simple composition using the already mentioned tones.

Keywords: harmony, MATLAB, musical tones, sound, waves

ŽIVOTOPIS

Mislav Paravac rođen je 28. srpnja 1997. godine u Osijeku. U Osijeku je završio Osnovnu školu „Vijenac“ te III. Gimnaziju Osijek. Nakon završetka srednje škole upisuje preddiplomski studij Računarstva na Fakultetu elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek.