

Metode mjerenja induktiviteta

Fekete, Filip

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:200:876172>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-28**

Repository / Repozitorij:

[Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek](#)



SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

**FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I INFORMACIJSKIH
TEHNOLOGIJA OSIJEK**

Stručni studij

Metode mjerenja induktiviteta

Završni rad

Filip Fekete

Osijek, 2022.

Sadržaj

1. Uvod	1
1.1. Zadatak završnog rada	1
2. Induktivitet	2
2.1. Otkriće induktiviteta	2
2.2. Pojam induktiviteta	2
2.2.1. Serijski spoj zavojnica	5
2.2.2. Paralelni spoj zavojnica	5
3. Reaktivni otpor	6
3.1. Kapacitivni otpor	6
3.2. Induktivni otpor	7
4. Metode mjerenja induktiviteta	8
4.1. Mjerenje induktiviteta U - I metodom	9
4.2. Mjerenje induktiviteta zavojnice s feromagnetskom jezgrom	10
4.3. Rezonantno mjerenje induktiviteta	11
4.4. Mjerenje induktiviteta prijelaznim procesom	13
4.5. Mostne metode mjerenja induktiviteta	14
4.5.1. Most s promjenjivim induktivitetom	14
4.5.2. Most s dvije klizne žice	15
4.5.3. Maxwellov most (Maxwell-Wienov most)	16
4.5.4. Owenov most	18
4.5.5. Hayev most	19
4.5.6. Andersonov most	21
4.6. Mjerenje induktiviteta RCL metrom	23
4.6.1. Način rada	23
4.6.2. Metode mjerenja RCL metrom	24
5. Rad u laboratoriju	25
5.1. Mjerenje induktiviteta RCL metrom	26
5.2. U-I mjerna metoda	26
5.3. Mjerenje induktiviteta Maxwellovim mostom	29
6. Analiza mjernih rezultata	31

6.1. U-I Mjerna metoda	33
6.2. Mjerenje induktiviteta Maxwellovim mostom	33
7. Zaključak	35
8. Literatura	36
9. Prilozi	37
9.1 Popis opreme	37
SAŽETAK.....	38
ŽIVOTOPIS	39

1. Uvod

Da bi se uspješno napravio završni rad potrebno je dobro poznavati osnovne pojmove o mjerenju, mjernim instrumentima i naravno o induktivitetu. Prema definiciji pojam "mjeriti" znači određivati vrijednosti neke mjerne veličine. Odnosno, to znači eksperimentalnim putem odrediti kolika je vrijednost neke mjerne veličine s određenom točnošću. Mjerenje provodimo mjernim instrumentima, a dijelimo ga na izravno (mjerenje iščitavamo direktno sa mjernog instrumenta) i neizravno, odnosno posredno mjerenje (rezultat dobivamo proračunom više izmjerenih ili poznatih mjernih veličina). Kada kroz zavojnicu teče izmjenična struja stvara se promjenjivi magnetski tok i inducira se napon samoindukcije. Tu pojavu nazivamo samoindukcija. Napon samoindukcije proporcionalan je brzini promjene izmjenične struje. Razmjerni faktor između brzine promjene struje i napona samoinduktiviteta nazivamo koeficijentom samoindukcije ili induktivitet (L). U elektrotehnici, od velike je važnosti imati uvid u induktivitet strujnog kruga radi određivanja ostalih potrebnih parametara elemenata koji su nam potrebne u strujnom krugu radi realizacije mreže, elektroničke komponente itd. Navest ćemo neke glavne metode za određivanje induktivteta kao što su mjerenje induktiviteta ampermetrom i voltmetrom (U-I metoda), određivanje induktiviteta prijelaznim procesom, mjerenje induktiviteta rezonantnom metodom i mjerenje induktiviteta zavojnice sa feromagnetskom jezgrom. Također ćemo opisati glavne mostove za mjerenje induktiviteta. Nakon što razradimo osnovne pojmove i metode određivanja induktiviteta provest ćemo detaljna mjerenja u laboratoriju kako bi eksperimentalno dokazali neke od opisanih metoda.

1.1. Zadatak završnog rada

Zadatak završnog rada je objasniti i analizirati mjerne metode određivanja induktiviteta, mjernu opremu korištenu pri mjerenju. U laboratoriju uz pratnju mentora provesti detaljna mjerenja pomoću navedenih metoda te ih analizirati i zaključiti za šta je koja metoda pogodna, koja je najpraktičnija, a koja najmanje. Na kraju navesti glavni zaključak o svemu što smo analizirali i opisali.

2.Induktivitet

2.1. Otkriće induktiviteta



Slika 2.1.10. Joseph Henry

Američki znanstvenik Joseph Henry (1797. - 1878.) slika 2.1.10, je otkrio pojavu samoindukcije te je njemu u čast mjerna jedinica induktiviteta (L) nazvana "henri (H)". Postigao je prve jake elektromagnete, izumio je prvi električni motor, te prvi električni relej [3].

2.2. Pojam induktiviteta

Prema definiciji električni induktivitet predstavlja mjeru suprotstavljanja električne zavojnice protjecanju promjenjive struje. Odnosno induktivitet je tromost prema promjeni struje.

Induktivitet koji se stvara u zavojnici možemo izračunati prema izrazu :

$$L = \frac{N^2}{R_m} \quad (2-1)$$

Induktivitet koji se stvara u ravnoj i torusnoj zavojnici uvrštavanjem $R_m = \frac{1}{\mu S}$ u gore navedeni izraz dobivamo :

$$L = \frac{\mu S N^2}{l} \quad (2-2)$$

gdje je :

L - induktivitet (H)

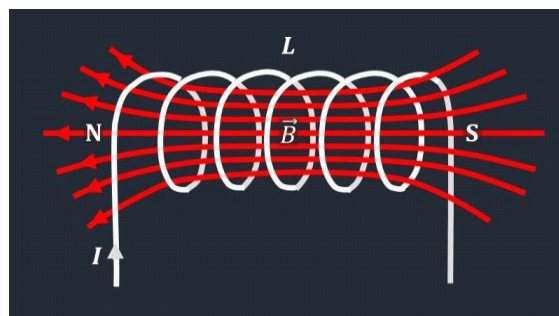
S - površina presjeka zavojnice (m^2)

l - duljina zavojnice (m)

N - broj zavoja zavojnice

μ - permeabilnost (H/m)

Iz formule se može zaključiti da je induktivitet proporcijalan kvadratu broja zavoja, a obrnutno proporcionalan magnetskom otporu zavojnice.



Slika 2.2.9. Silnice magnetske indukcije zavojnice

Slika 2.2.9 prikazuje silnice magnetske indukcije zavojnice protjecane izmjeničnom strujom.

Prolaskom struje kroz zatvoreni strujni krug stvara se magnetsko polje, pa kroz njega prolazi magnetski tok. Induktivitet također možemo dobiti iz omjera magnetskog toka (Φ) i električne struje

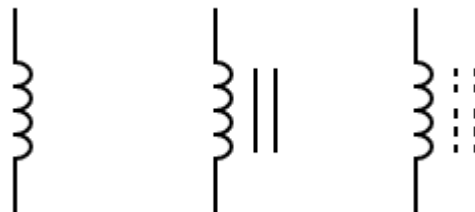
(I) :

$$L = \frac{\Phi}{I} \quad (2-3)$$

Također induktivitet predstavlja svojstvo zavojnice da sprema elektromagnetsku energiju.

Ako je zavojnica u vakuumu permeabilnost je konstantna, pa induktivitet ne ovisi o jačini struje koja protječe kroz zavojnicu.

Zavojnica koja ima jezgru načinjenu od feromagnetskog materijala permeabilnost ovisi o jačini magnetskog polja te zbog toga se stvara struja u zavojnici , pa na taj način induktivitet ovisi i jačini struje (I).

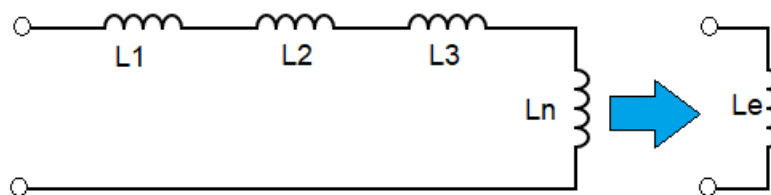


2.3. Simboli zavojnice

Prema slici prvi simbol predstavlja zavojnicu bez jezgre, drugi simbol je zavojnica sa željeznom jezgrom, a treći predstavlja zavojnicu sa jezgrom od feromagnetskog materijala.

Pojam "idealna zavojnica" je zavojnica koja ima samo induktivno svojstvo, dok otpor zavojnice ne postoji. Naravno u praksi "idealna zavojnica" ne postoji jer svaka zavojnica ima otpor žice.

2.2.1. Serijski spoj zavojnica

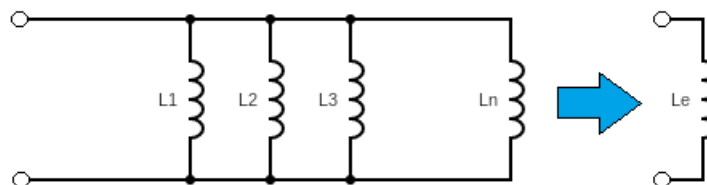


Slika 2.4. Serijski spoj zavojnica

U zatvorenom krugu serijski spojenih zavojnica ukupni induktivitet je zbroj pojedinačnih induktiviteta zavojnica.

$$L_e = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n \quad (2-4)$$

2.2.2. Paralelni spoj zavojnica



Slika 2.4. Paralelni spoj zavojnica

U paralelnom spoju zavojnica recipročna vrijednost induktiviteta jednaka je sumi recipročnih vrijednosti pojedinačnih induktiviteta u krugu te se računa prema izrazu :

$$\frac{1}{L_e} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_n} \quad (2-5)$$

3. Reaktivni otpor

Električni otpor je svojstvo materijala da se opire prolasku električne struje, odnosno "otpor" predstavlja gubitak energetske polja. U izmjeničnom krugu otpor može biti aktivan, reaktivan ili oboje, dok otpor u istosmjernom krugu može biti samo aktivan. Za razliku od "običnog" otpora reaktivni otpor ovisi o frekvenciji gdje induktivni otpor raste s povećanjem frekvencija, a kapacitivni pada. Reaktivni otpor naspram "običnog" ne troši energiju odnosno električna energija se ne pretvara u drugi oblik nego se pohranjuje u zavojnici ili kondenzatoru. Možemo reći da je reaktancija imaginarna veličina koja ima svoj fazni pomak i svoju apsolutnu vrijednost. Reaktancija se u strujnim krugovima izmjenične struje u osnovi računa jednako kao i u statičkim odnosno istosmjernim krugovima, uzimajući u obzir da se primjenjuju matematičke operacije u kompleksnoj ravnini. Korijen zbroja kvadrata reaktivnog i aktivnog odnosno ohmskog otpora dobivamo ukupni otpor koji nazivamo impedancija (Z). Također je potrebno napomenuti da u fazorskim odnosima induktivni reaktivni otpor prethodi realnom za 90 stupnjeva, a kapacitivni kasni za 90 stupnjeva, odnosno (-90) [4].

3.1. Kapacitivni otpor

Kondenzator po pravilu ne propušta istosmjernu električnu struju pa možemo reći da kondenzator u istosmjernom strujnom krugu predstavlja beskonačno velik otpor. U slučaju da priključimo kondenzator na istosmjerni (DC) izvor on će se "nabiti" električnošću. Kapacitet kondenzatora u

statičkim uvjetima dobiva se kao omjer količine naboja (Q) i napona (U) :

$$C = \frac{Q}{U} \quad (3-1)$$

Pa u dinamičkim uvjetima vrijedi :

$$C = \frac{dq}{du} \quad (3-2)$$

Odnosno kapacitet je jednak omjeru diferencijala naboja (dq) i napona (du). Iz čega slijedi izraz :

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad (3-3)$$

Primjenom Laplaceove transformacije kontinuirane sinusne pobude ($s = j\omega$) prelazimo u domenu kružne frekvencije gdje jednažba poprima oblik :

$$U(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} j\omega I \quad (3-4)$$

Iz te jednažbe dobiva se formula za reaktivni otpor kondenzatora koji je za razliku od aktivnog otpora imaginaran.

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (3-5)$$

Ukupna reaktancija kondenzatora u serijskom strujnom krugu jednaka je sumi pojedinačnih reaktancija.

$$X_C = X_{C1} + X_{C2} + X_{C3} + \dots + X_{Cn} \quad (3-6)$$

Dok je u paralelnom spoju recipročna vrijednost ukupne reaktancije jednaka sumi recipročnih vrijednosti pojedinih reaktancija[4].

$$\frac{1}{X_C} = \frac{1}{X_{C1}} + \frac{1}{X_{C2}} + \dots + \frac{1}{X_{Cn}} \quad (3-7)$$

3.2. Induktivni otpor

Kako se kondenzator protivi promjeni napona, zavojnica se protivi promjenom struje, pa diferencijalna jednačba za inducirani napon zavojnice glasi :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (3-8)$$

Primjenom Laplaceove transformacije s sinusoidalnom pobudom kružne frekvencije jednačba poprima oblik :

$$U(j\omega) = j\omega L \cdot Ij\omega \quad (3-9)$$

Iz jednačbe napona dobiva se formula za računanje reaktivnog otpora zavojnice.

$$X_L = \omega L \quad (3-10)$$

Također otpor zavojnice u području kružne frekvencije je imaginaran.

Ukupna reaktancija induktiviteta u serijskom krugu također je jednaka sumi pojedinačnih reaktancija isto kao kod slučaja kondenzatora.

$$X_L = X_{L1} + X_{L2} + \dots + X_{Ln} \quad (3-11)$$

Također za paralelni krug vrijede ista pravila kao i za kondenzator, odnosno recipročna vrijednost ukupne reaktancije zavojnica jednaka je sumi recipročnih vrijednosti pojedinačnih reaktancija:

$$\frac{1}{X_L} = \frac{1}{X_{L1}} + \frac{1}{X_{L2}} + \dots + \frac{1}{X_{Ln}} \quad (3-12)$$

Zavojnica koja je idealna u istosmjernom krugu ne pruža nikakav otpor nego svu energiju koju je poprimila vraća u mrežu. Priključenjem izmjenične struje određene frekvencije pojavljuje se reaktivni otpor zavojnice koji raste proporcionalno s frekvencijom[4].

$$\omega = 2\pi f \quad (3-13)$$

4. Metode mjerenja induktiviteta

Induktivitet je zanimljiv za analizu u električkim krugovima izmjenične struje iz razloga što postoji

puno metoda za mjerenje, a svaka od tih metoda se radi na potpuno drugačiji način s različitom mjernom opremom.

4.1. Mjerenje induktiviteta U - I metodom

Za ovu metodu mjerenja koriste se ampermetar i voltmetar kao mjerni instrumenti.

Induktivitet zavojnice L određuje se prema definiciji reaktivnog otpora $X_L = \omega L$, odnosno dovoljno je izmjeriti struju i napon da bi se dobio induktivitet. Zavojnica induktiviteta L ima svoju vlastitu impedanciju koja ovisi od ohmskog otpora R i induktiviteta L :

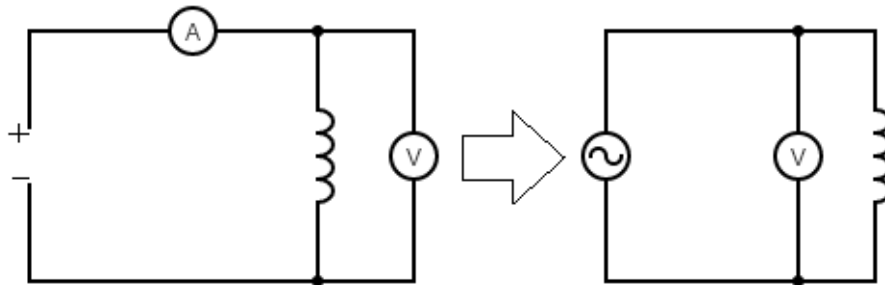
$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (4-1)$$

U-I metoda podrazumijeva mjerenje napona U i izmjenične struje I kako bi se odredila ukupna impedancija Z, te mjerenje istosmjernog napona i istosmjerne struje radi određivanja ohmskog otpora R.

S dobivenim rezultatima mjerenja struje i napona induktivitet se dobiva formulom :

$$L = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\left(\frac{U_-}{I_-}\right)^2 - R^2} \quad (4-2)$$

Mjerenjem induktiviteta ovim načinom dobivaju se velike pogreške mjerenja, koje su mnogo veće ako je udio ohmskog otpora R u impedanciji Z veći. Općenito govoreći, rezultat dobiven ovom metodom je "približan" odnosno nije potpuno točan. Također, greška može biti i veća ako se u obzir uzme greška mjerenja frekvencije [2].



Slika 4.1. U-I metoda mjerenja induktiviteta

4.2. Mjerenje induktiviteta zavojnice s feromagnetskom jezgrom

U slučaju da je jezgra zavojnice čiji se induktivitet želi mjeriti napravljena od feromagnetskog materijala, prethodna metoda će biti potpuno neprikladna. Razlog tome je što feromagnetski materijal zavojnice protjecan izmjeničnom strujom stvara puno veće gubitke nego obična zavojnica bez jezgre ili zavojnica sa željeznom jezgrom. Za ovu metodu osim mjerenja napona i struje, mjerit će se snaga vatmetrom.

Također treba obratiti pozornost da ukupna impedancija Z bude puno veća od impedancije ampermetra i strujnog priključka vatmetra. U slučaju da je ukupna impedancija ampermetra i strujnog priključka vatmetra veća, ampermetar se spaja prije voltmetra i vatmetra.

Neovisno o tome koja je varijanta u pitanju, ohmski otpor zavojnice R je jednak omjeru snage P i kvadratu struje I :

$$R = \frac{P}{I^2} \quad (4-3)$$

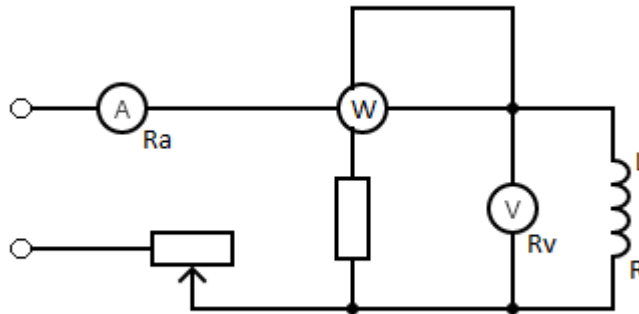
Nakon provođenja mjerenja struje, napona i snage, induktivitet se računa po formuli:

$$L = \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 + R^2} = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\frac{U^2}{I^2} - \frac{P^2}{I^4}} = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{U^2 - \left(\frac{P}{I}\right)^2} \quad (4-4)$$

Te se na kraju dobiva:

$$L = \frac{1}{2\pi I^2} \sqrt{(UI)^2 - P^2} \quad (4-5)$$

Jednako kao i za prošlu metodu može se reći da nije u potpunosti točna i sigurna. To je zato što se moraju odrediti čak četiri veličine: frekvencija, snaga, napon i struja što dovodi do minimalne pogreške mjerenja sve četiri vrijednosti, ali na kraju kada se izračuna ukupni induktivitet ta pogreška postaje velika [2].



Slika 4.2. Mjerenje induktiviteta s feromagnetskom jezgrom

4.3. Rezonantno mjerenje induktiviteta

Iz osnova elektrotehnike je poznato da je uvjet rezonancije:

$$\omega^2 LC = 1 \quad (4-6)$$

Ako su poznati kapacitet C i frekvencija f, izraz za mjereni induktivitet je:

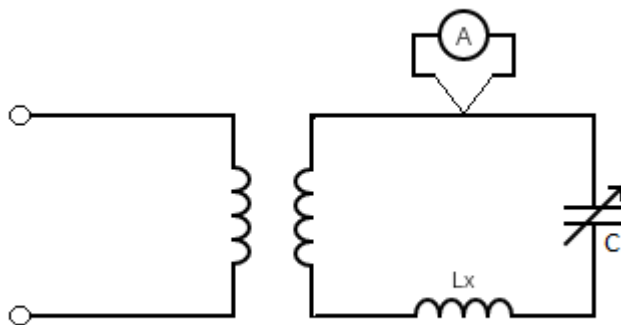
$$L_X = \frac{1}{\omega^2 C} = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} \quad (4-7)$$

Rezonancija se može realizirati promjenom frekvencije f ili promjenom kapaciteta kondenzatora C .

Uzimajući u obzir vlastiti induktivitet kruga L_k , induktivitet se računa kao:

$$L = L_X + L_K \quad (4-8)$$

gdje L_x predstavlja induktivitet koji se mjeri, a L_k vlastiti induktivitet strujnog kruga.



Slika 4.3. Rezonantno mjerenje induktiviteta

Krug se spaja na izmjenični izvor napajanja, a struja u krugu mjeri se pomoću termopara.

Vlastiti induktivitet kruga L_k kod rezonancije se može izmjeriti preko promjenjivog kondenzatora.

Uspostava rezonancije pri vrijednosti kapaciteta C_s kondenzatora dobiva se :

$$L_K = L - L_S = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C_S} - L_S \quad (4-9)$$

gdje je L_S poznati induktivitet.

Kasnije u krug se uključuje induktivitet L_X , koji se mjeri. Ako se frekvencija ne promijeni, odnosno ostane konstantna te se postigne rezonancija korištenjem drugog kapaciteta C_x , induktivitet će biti :

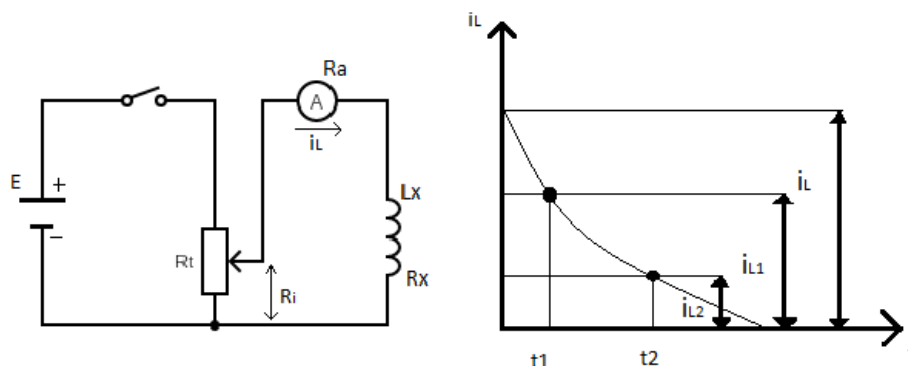
$$L_X = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C_X} - L_K \quad (4-10)$$

Prvo se u rezonantni krug doda zavojnica nepoznatog otpora induktiviteta L_X . Rezonancija se postiže podešavanjem frekvencije f ili kapaciteta C_s . Zatim umjesto L_X stavimo L_S . Mijenjanjem induktiviteta L_S dovodimo i ponovno uspostavljamo rezonanciju u krugu, ne mijenjajući frekvenciju i kapacitet C te će na taj način induktivitet promjenjive induktivnosti biti jednak induktivitetu koji se mjeri [2].

$$L_{SX} = L_X \quad (4-11)$$

4.4. Mjerenje induktiviteta prijelaznim procesom

Ova metoda je pogodna za mjerenje velikih induktiviteta i slična je mjerenju velikih otpora[2].



Slika 4.4. Shema mjerenja velikih induktiviteta preko vremenske konstante $T_L = \frac{L}{R}$

Na slici 4.4. je prikazana shema spoja, a na grafu promjena struje nakon isključivanja izvora napajanja E .

Za dvije poznate vrijednosti struja vremena t_1 i t_2 vrijedi :

$$L = R \frac{T}{\ln \left| \frac{i_{L1}}{i_{L2}} \right|} \quad (4-12)$$

gdje je $T = t_2 - t_1$, $R = R_2 + R_X$.

4.5. Mosne metode mjerenja induktiviteta

Mjerni mostovi temelje se na metodi usporedbe sa poznatim induktivitetima. Mostovi se napajaju izmjeničnom strujom pri čemu su određene grane mosta promjenjive kako bi se postigla ravnoteža i po fazi i po modulu[1].

4.5.1. Most s promjenjivim induktivitetom

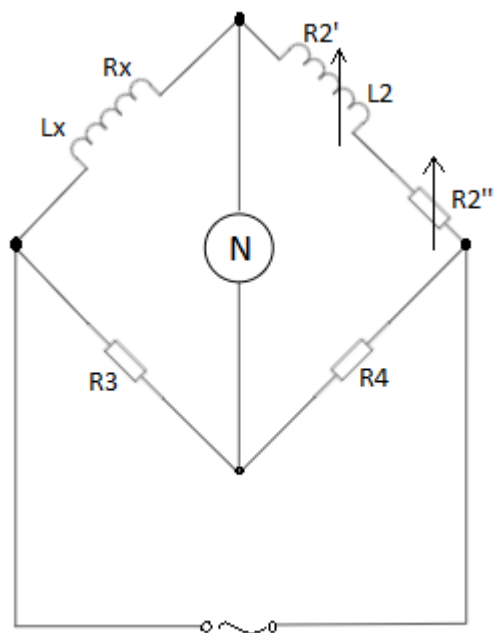
Most se sastoji od grane sa nepoznatim induktivitetom L_X i djelatnim otporom R_X , grane s promjenjivim induktivitetom L_2 djelatnog otpora R_2' i jos jednim promjenjivim otporom R_2'' . U preostalim granama se nalaze djelatni otpori R_3 i R_4 (Slika 4.5.). Za most koji je u ravnoteži vrijedi :

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3 \text{ odnosno : } (R_X + j\omega L_X) R_4 = (R_2' + R_2'' + j\omega L_2) R_3$$

Nakon sređivanja izraza odnosno odvajanja realnih i imaginarnih komponenti dobiva se :

$$R_X = (R_2' + R_2'') \frac{R_3}{R_4} \quad (4-13)$$

$$L_X = L_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (4-14)$$



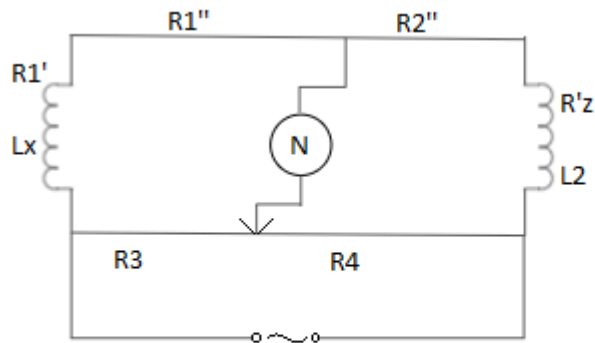
Slika 4.5. Most s promjenivim induktivitetom

4.5.2. Most s dvije klizne žice

Most je napravljen od dvije klizne žice odnosno dva promjenjiva otpornika R_1'' i R_2'' , te dva nepromjenjiva otpora R_3 i R_4 . Na jednoj strani nalazi se zavojnica nepoznatog induktiviteta odnosno induktiviteta R_X koji se mjeri, dok na drugoj strani imamo zavojnicu poznatog induktiviteta L_2 (Slika 4.6.). Ravnoteža se postiže s klizačima postavljajući ih u položaj dok se ne postigne uvjet ravnoteže. Induktivitet se dobiva istim izrazom kao i u mostu s promjenjivim induktivitetom :

$$R_1' = (R_z' + R_2'') \frac{R_3}{R_4} - R_1'' \quad (4-16)$$

$$L_X = L_2 \frac{R_3}{R_4} \quad (4-17)$$



Slika 4.6. Most s dvije klizne žice

4.5.3. Maxwellov most (Maxwell-Wienov most)

Maxwell-Wien most je unaprijeđenje Maxwellovog mosta gdje se u granu poznatog otpora R_4 paralelno spaja kondenzator poznatog kapaciteta C_4 nasuprot grane gdje se nalazi zavojnica induktiviteta L_X koji se mjeri (Slika 4.7.)[1]. Impedancije mosta:

$$Z_1 = R_X + j\omega L_X \quad Z_2 = R_2 \quad (4-18)$$

$$Z_3 = R_3 \quad Z_4 = \frac{R_4}{1+j\omega C_4 R_4} \quad (4-19)$$

Ravnoteža Maxwellovog mosta se postiže kada su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

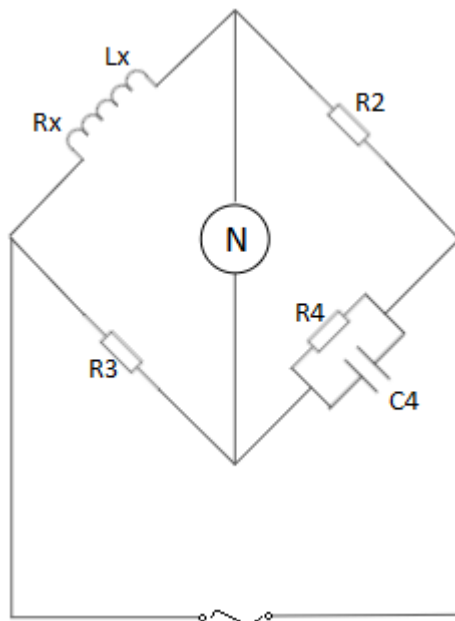
$$\frac{(R_X + j\omega L_X)R_4}{1 + C_4 R_4} = R_2 R_3 \quad (4-20)$$

ili:

$$R_X R_4 + j\omega L_X R_4 = R_2 R_3 + j\omega C_4 R_2 R_3 R_4 \quad (4-21)$$

Nakon što se odvoje realne i imaginarne komponente dobivamo izraze za nepoznati otpor R_X i induktivitet koji se mjeri L_X :

$$R_X = R_2 \frac{R_3}{R_4} \quad L_X = C_4 R_3 R_2 \quad (4-22)$$



Slika 4.7. Maxwellov most

Također treba naglasiti da na uvjete ravnoteže ne utječe frekvencija.

4.5.4. Owenov most

Owenov most sličan je Maxwelllovom. Razlika je ta što je kondenzator sam u grani nasuprotnoj grani nepoznatog induktiviteta L_X , te se koristi dodatni kondenzator C_2 spojen u seriju s poznatim otporom R_2 granu do grane nepoznatog induktiviteta (Slika 4.8.)[1].

Impedancije pojedinačnih grana:

$$Z_1 = R_X + j\omega L_X \quad Z_2 = R_2 - j\omega C_2 \quad Z_3 = R_3 \quad Z_4 = \frac{1}{j\omega C_4} \quad (4-23)$$

Ravnoteža će se postići ako vrijedi:

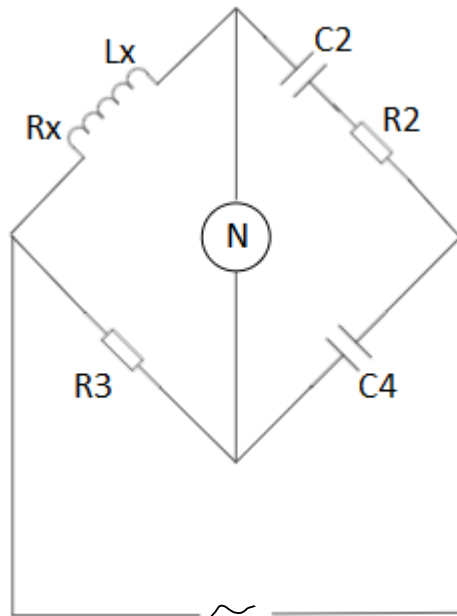
$$\frac{R_X + j\omega L_X}{j\omega C_4} = \left(R_2 - \frac{j}{\omega C_2} \right) R_3 \quad (4-24)$$

ili:

$$R_X + j\omega L_X = j\omega C_4 R_2 R_3 + C_4 \frac{R_3}{C_2} \quad (4-25)$$

odnosno:

$$R_X = R_3 \frac{C_4}{C_2} \quad L_X = R_2 R_3 C_4 \quad (4-26)$$



Slika 4.8. Owenov most

4.5.5. Hayev most

Za razliku od prethodnih mostova vidimo da Hayev most u grani nasuprot nepoznatog induktiviteta ima kondenzator u seriji s poznatim otporom (Slika 4.9.). Uvjet ravnoteže:

$$(R_X + j\omega L_X R_4)(R_4 - j\omega C_4) = R_2 R_3 \quad (4-27)$$

Nakon odvajanja imaginarnih od realnih komponenti dobiva se:

$$R_X R_4 + \frac{L_X}{C_4} = R_2 R_3 \quad (4-28)$$

$$\omega L_X R_4 - \frac{R_X}{\omega C_4} = 0 \quad (4-29)$$

Na kraju množenja izraza dobiva se izraz za nepoznati induktivitet i otpor:

$$L_X = \frac{C_4 R_2 R_3}{\omega^2 C_4^2 R_4^2} \quad (4-30)$$

$$R_X = \frac{\omega^2 C_4^2 R_2 R_3 R_4}{1 + \omega^2 C_4^2 R_4^2} \quad (4-31)$$

Iz prijašnjih izraza faktor Q se računa po:

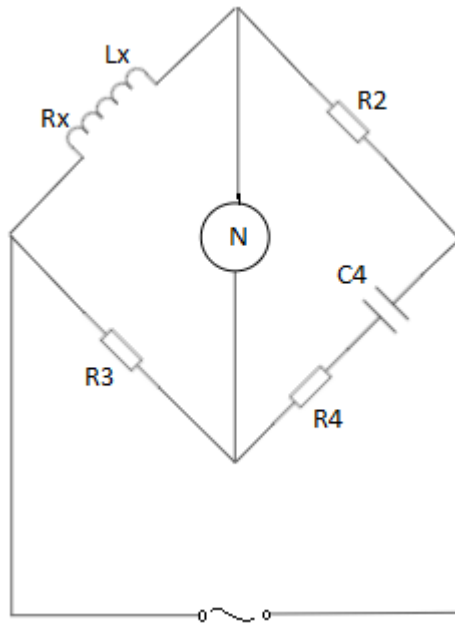
$$Q = \frac{\omega L_X}{R_X} = \frac{1}{\omega C_4 R_4} \quad (4-32)$$

Gore navedeni izrazi se mogu prikazati pomoću faktora Q:

$$L_X = \frac{C_4 R_2 R_3}{1 + \frac{1}{Q^2}} \quad (4-33)$$

$$R_X = \frac{R_2 R_3}{R_4} \frac{1}{1 + Q^2} \quad (4-34)$$

Iz izraza se može vidjeti da je za određivanje nepoznatog induktiviteta L_X i otpora R_X potrebno znati frekvenciju, odnosno ona utječe na ravnotežu mosta. Ukoliko se koristi most za mjerenje induktiviteta s velikim faktorom Q, nije potrebno obraćati pažnju na frekvenciju jer je ona zanemariva [1].



Slika 4.9. Hayev most

4.5.6. Andersonov most

Andersonov most je također modifikacija Maxwellovog mosta, ali odstupa od uobičajenog oblika jer imamo dodatne grane koje predstavljaju trokut impedancija, koje se pretvaraju u zvijezdu impedancija te se na taj način postiže uobičajeni oblik mosta kako bi se postigao uvjet ravnoteže (Slika 4.10.). Impedancije Z' i Z'' iznose:

$$Z' = \frac{R_0 R_4}{R_0 + R_4 + \frac{1}{j\omega C}} \quad (4-35)$$

$$Z'' = \frac{\frac{R_3}{j\omega C}}{R_0 + R_4 + \frac{1}{j\omega C}} \quad (4-36)$$

Kada je most u ravnoteži vrijedi:

$$(R + j\omega L) \frac{\frac{R_4}{j\omega C}}{R_0 + R_4 + \frac{1}{j\omega C}} = R_2 \left(R_3 + \frac{R_0 R_4}{R_0 + R_4 + \frac{1}{j\omega C}} \right) \quad (4-37)$$

ili:

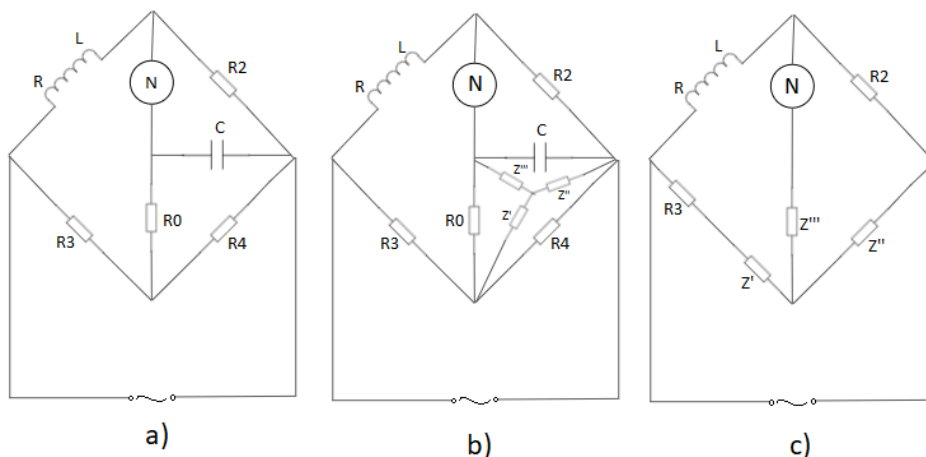
$$\frac{RR_4}{j\omega C} + \frac{LR_4}{C} = R_0 R_2 R_3 + R_2 R_3 R_4 + R_0 R_2 R_4 + \frac{R_2 R_3}{j\omega C} \quad (4-38)$$

Nakon razdvajanja imaginarnih i realnih komponenti dobivaju se izrazi:

$$RR_4 = R_2 R_3 \quad (4-39)$$

$$L = CR_2 \left[R_0 \left(1 + \frac{R_3}{R_4} \right) + R_3 \right] \quad (4-40)$$

Ovaj most se može koristiti za vrlo precizna mjerenja induktiviteta te vrlo velikih iznosa[1].



Slika 4.10. Andersonov most

4.6. Mjerenje induktiviteta RCL metrom

LCR metar je elektronički mjerni uređaj za mjerenje induktiviteta (L), kapaciteta (C) i radnog otpora (R) u elektrotehničkim komponentama. U starijim jednostavnijim verzijama ovog instrumenta impedancija se mjeri interno i konvertira u odgovarajuću vrijednost kapaciteta i induktiviteta. Očitavanje bi trebalo biti zadovoljavajuće ako kondenzator ili zavojnica koju testiramo nema značajanu komponentu otpora impedancije. Novije, naprednije izvedbe mjere direktno stvarnu vrijednost impedancije ili kapaciteta, kao i ekvivalentnu seriju kapacitivnog otpora i faktor disipacije (Q) induktivnih komponenti[7].



Slika 14.10. RCL metar "Gwinstek LCR-816"

4.6.1. Način rada

Uobičajeno je da uređaj koji se testira koristi izmjenični izvor napajanja. Uređaj mjeri napon i struju protjecanja kroz uređaj koji se testira. Pomoću omjera napona i struje mjerni uređaj može odrediti vrijednost otpora impedancije. Fazorski kut između napona i struje se također može mjeriti sa

naprednijim izvedbama instrumenta, u kombinaciji sa impedancijom, induktivitetom, kapacitetom i radnim otporom uređaja koji se testira te se prikazuje na zaslonu. Idealni kondenzator nema ni jednu drugu karakteristiku osim kapacitivnosti, ali u praksi ne postoji idealni kondenzator. Svi realni kondenzatori imaju malu vrijednost induktiviteta i otpora, uz nesavršenosti nastale pri proizvodnji. Nesavršenosti kondenzatora mogu biti vidljive kao otpornost ili induktivitet u seriji ili paraleli s kapacitetom. Također to vrijedi i za zavojnicu, a čak i otpornici mogu imati induktivitet i kapacitet kao posljedicu načina njihove izrade. Najčešća pretpostavka i najčešće primjenjena metoda je ta da LR mjerenja imaju komponente u seriji, dok CR mjerenja imaju komponente u paraleli.

LCR metar se također može koristiti za mjerenje varijabilnih induktiviteta pazeći na položaj rotora u strojevima s permanentnim magnetima. (Pri mjerenju se mora pripaziti jer neki od LCR metara mogu biti oštećeni od strane elektromagnetske sile koja nastaje na rotoru motora s permanentnim magnetom.).

4.6.2. Metode mjerenja RCL metrom

Metoda s dvije stezaljke:

Ova metoda spaja se na željenu komponentu s dvije stezaljke. Izmjerene vrijednosti uključuju unutarnji otpor žica i stezaljki, na koje jako utječe niska impedancija komponente. Zbog viška kapaciteta između dva kabla, mjerni signal koji putuje kroz zaostali kapacitet kao i kroz željenu komponentu, tijekom mjerenja pri visokim frekvencijama i mjerenjima visoke impedancije, dolazi do pogreške[8].

Metoda s pet stezaljki:

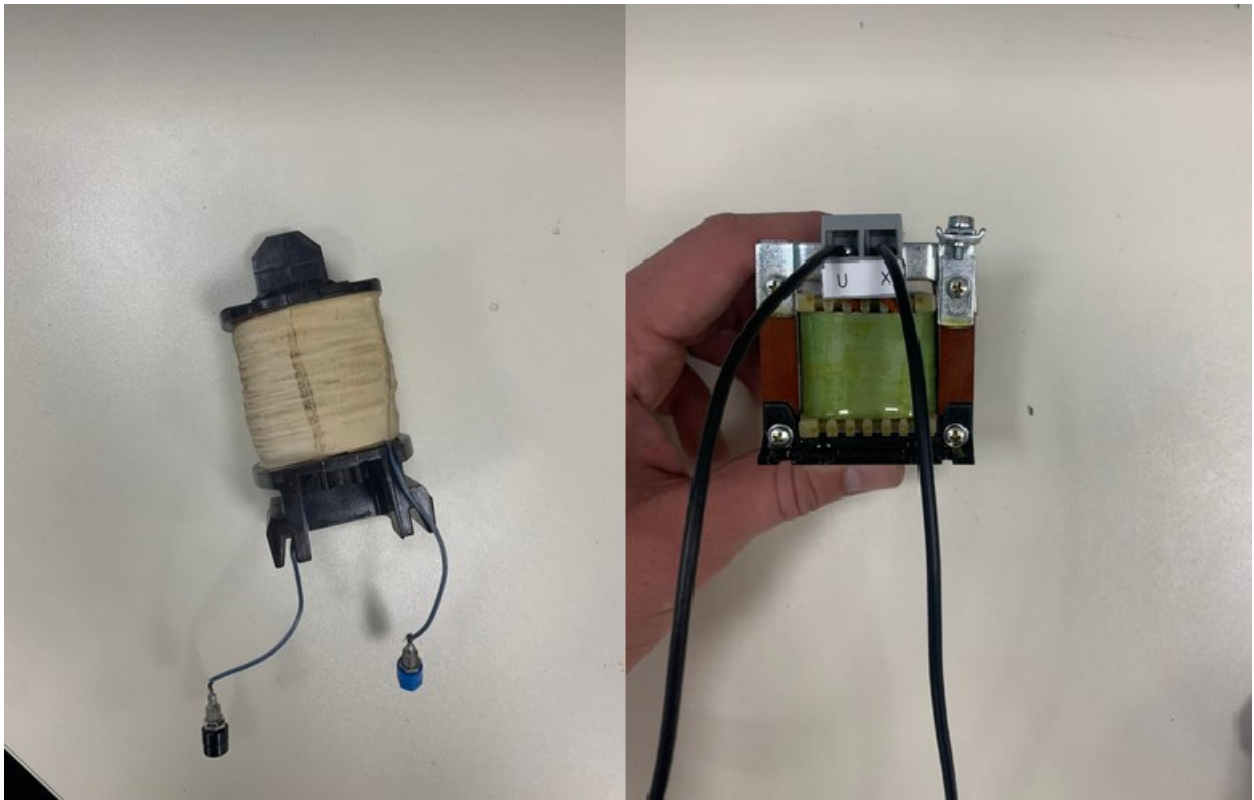
Ova metoda smanjuje učinke unutarnjeg otpora žica i otpora stezaljki koristeći odvojene kablove za struju signala i detekciju napona. Pri tome također smanjuje i utjecaj zaostalog kapaciteta koristeći kabl s plaštom i stavljajući oplaštene kablove na isti potencijal. Ova metoda se može koristiti kako bi se smanjila pogreška pri mjerenju i niske i visoke impedancije[8].

Metoda s četiri stezaljke:

Ova metoda može smanjiti pogrešku mjerenja niske i visoke impedancije smanjujući utjecaj magnetskog polja uzrokovanog mjernom strujom. Može poništiti magnetsko polje koristeći oplaštene kablove i premošćavajući kablove koji provode struju prema i od željene komponente[8].

5. Rad u laboratoriju

U laboratoriju fakulteta Elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija u Osijeku provedena su tri eksperimenta na dvije različite zavojnice, odnosno provedene su tri metode mjerenja induktiviteta kako bi se odredilo koja metoda je najpreciznija. Koristila se U-I metoda mjerenja induktiviteta, mjerenje induktiviteta RCL metrom, te Maxwellov most za mjerenje induktiviteta. Prva zavojnica koja je testirana sadrži u sebi željeznu jezgru, a druga zračnu. Za svaki eksperiment provedena su tri mjerenja zbog statističke obrade i analize podataka koji će se uspoređivati. Također potrebno je napomenuti da se očekuje da će zavojnica sa željeznom jezgrom imati puno veće induktivno svojstvo od zavojnice sa zračnom jezgrom zbog toga što željezo ima puno veću permeabilnost od zraka, a induktivitet raste proporcijalno s permeabilnošću.



Slika 5.1. Zavojnica sa zračnom(lijevo) i zavojnica sa željeznom jezgrom (desno)

5.1. Mjerenje induktiviteta RCL metrom

Pri mjerenju induktiviteta RCL metrom, stezaljke RCL metra spajaju se direktno na stezaljke zavojnice, te se rezultat očitava direktno sa zaslona. U provedenim mjerenjima koristila se metoda s dvije stezaljke.

Tablica 5.1. Induktivitet željezne i zračne jezgre izmjerim RCL metrom

Broj mjerenja	Željezna jezgra L (mH)	Zračna jezgra L (mH)
1.	726.70	52.14
2.	726.70	52.14
3.	726.69	52.14

Prema teoriji, ova metoda bi trebala biti najtočnija, tako da ćemo rezultate ove metode uzeti kao stvarne vrijednosti zavojnica.

5.2. U-I mjerna metoda

Prvi zadatak mjerenja U-I metode bio je odrediti unutarnji otpor zavojnice, spajajući zavojnicu na istosmjerni izvor prema slici 4.1..

Nakon što su izmjereni napon i struja, pomoću Ohmovog zakona izračunate su vrijednosti unutarnjeg otpora zavojnice.

Rezultati mjerenja na istosmjernom izvoru:

Tablica 5.2. Rezultati mjerenja parametara zavojnice sa zračnom i željeznom jezgrom na istosmjernom izvoru

	Željezna jezgra	Zračna jezgra
E (V)	1.394	1.543
I (mA)	55.4	121.4
R (Ω)	25.16	12.75

Nakon što je određen unutarnji otpor zavojnice, krug je potrebno priključiti u izmjenični izvor kako bi se dobio uvid u induktivnu komponentu, odnosno kako bi se odredila ukupna impedancija strujnog kruga sa željenom zavojnicom. Frekvencija izvora je konstantna i iznosi 50 Hz.

Za razliku od prethodnog mjerenja na istosmjernom izvoru gdje mjerenje radi jednostavnosti nije ponovljeno, u ovom slučaju će se mjerenje ponoviti tri puta radi statističke analize podataka.

ZRAČNA JEZGRA :

Rezultati mjerenja zavojnice sa zračnom jezgrom na izmjeničnom naponu:

Tablica 5.3. Rezultati mjerenja parametara zavojnice sa zračnom jezgrom na izmjeničnom izvoru

Broj mjerenja	U (V)	I (mA)	Z(Ω)
1.	1.44	50	28.80
2.	1.45	50	29.00
3,	1.45	51	28.43

Nakon što je određena ukupna impedancija kruga, potrebno je izračunati komponentu induktivnog otpora X_L prema formuli (4-1), a zatim induktivitet L prema formuli (4-2).

Rezultati proračuna induktivnog otpora i induktiviteta zavojnice sa zračnom jezgrom:

Tablica 5.4. Rezultati proračuna induktivnog otpora i induktiviteta zavojnice sa zračnom jezgrom

	$Z(\Omega)$	$X_L(\Omega)$	L (mH)
1.	28.8	25.82	82.18
2.	29.00	26.05	82.91
3.	28.43	25.41	80.88

ŽELJEZNA JEZGRA :

Rezultati mjerenja zavojnice sa željeznom jezgrom na izmjeničnom naponu:

Tablica 5.5. Rezultati mjerenja parametara zavojnice sa željeznom jezgrom na izmjeničnom izvoru

	U(V)	I(mA)	$Z(\Omega)$
1.	15.19	51.2	296.68
2.	15.07	51.4	289.80
3.	15.26	51.4	296.88

Rezultati proračuna induktivnog otpora i induktiviteta zavojnice sa željeznom jezgrom:

Tablica 5.6. Rezultati proračuna induktivnog otpora i induktiviteta zavojnice sa željeznom jezgrom

	$Z(\Omega)$	$X_L(\Omega)$	L(mH)
--	-------------	---------------	-------

1.	296.68	295.61	940.00
2.	289.80	288.70	918.06
3.	296.88	295.81	941.59

5.3 Mjerenje induktiviteta Maxwellovim mostom

Kako bi se izmjerio nepoznati induktivitet ovom metodom, potrebno je spojiti krug prema slici 4.7. i postići vrijednost napona nulindikatora da bude što bliži nuli. Napon nulindikatora mijenja se promjenom vrijednosti komponenti mosta. Kada je napon nulindikatora približan nuli, most je u ravnoteži i mogu se početi mjeriti vrijednosti poznatih komponenti kako bi se izračunao nepoznati induktivitet.

ŽELJEZNA JEZGRA:

Rezultati mjerenja zavojnice sa željeznom jezgrom:

Tablica 5.7. Rezultati mjerenja zavojnice sa željeznom jezgrom Maxwellovim mostom

	Napon izvora (V)	Napon nulindikatora (V)	Struja izvora (A)	$C_4(\mu F)$	$R_2(k\Omega)$	$R_3(k\Omega)$	$R_4(k\Omega)$
1.	20.46	0.259	11.7	1.018	1.91	0.41	2.34
2.	20.48	0.263	11.8	1.020	1.92	0.41	2.35
3.	20.45	0.257	11.7	1.019	1.91	0.40	2.35

ZRAČNA JEZGRA:

Rezultati mjerenja zavojnice sa zračnom jezgrom:

Tablica 5.8. Rezultati mjerenja zavojnice sa zračnom jezgrom Maxwellovim mostom

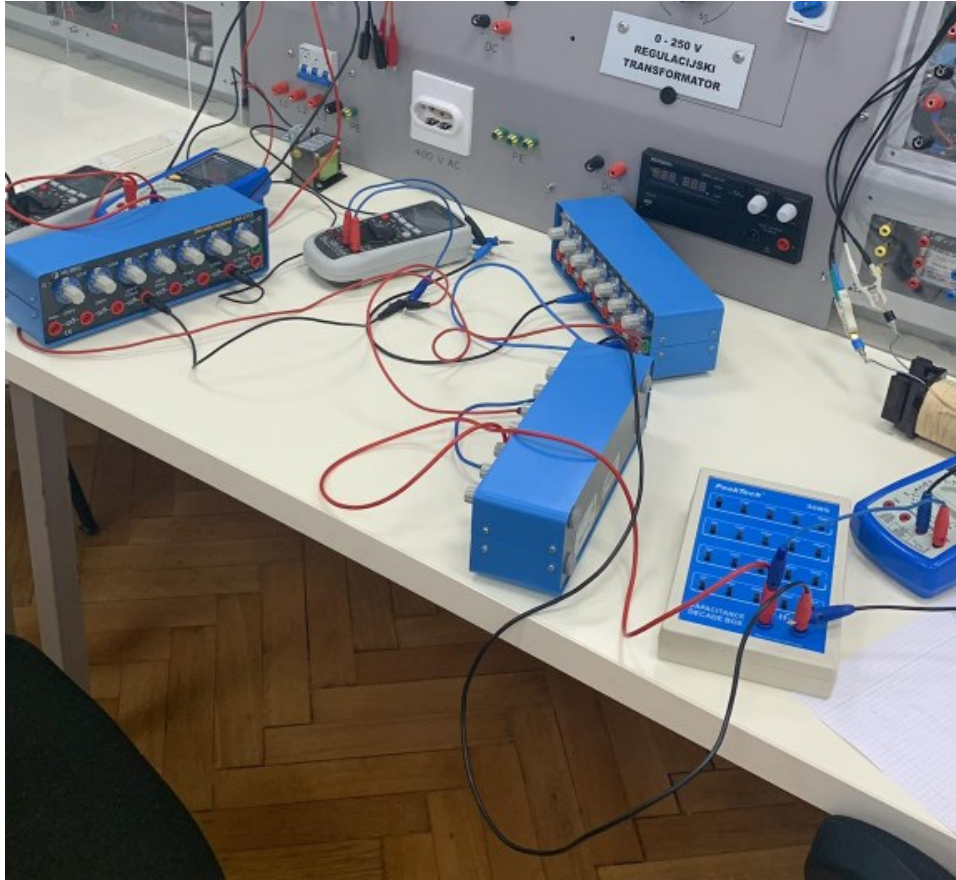
	Napon izvora (V)	Napon nulindikatora (V)	Struja izvora (A)	$C_4(\mu F)$	$R_2(k\Omega)$	$R_3(\Omega)$	$R_4(k\Omega)$
1.	20.11	0.078	11.30	1.017	3.44	18.9	3.43
2.	19.97	0.077	11.02	1.018	3.44	18.76	3.43
3.	20.08	0.078	11.17	1.018	3.43	19.02	3.43

Nakon što je postignuta ravnoteža mosta, odnosno nakon što je napon nulindikatora namješten na nulu, izračunate su vrijednosti induktiviteta prema formuli (4-22).

Rezultati proračuna induktiviteta zavojnice sa zračnom i željeznom jezgrom:

Tablica 5.9. Rezultati proračuna induktiviteta zavojnice s željeznom i zračnom jezgrom na Maxwellovom mostu

	Željezna jezgra L (mH)	Zračna jezgra (mH)
1.	797.19	66.12
2.	802.94	65.69
3.	778.51	66.41



Slika 5.2. Maxwellov most

6. Analiza mjernih rezultata

Kako bi se kvalitetno moglo opisati i odrediti koja metoda je najučinkovitija prvo je potrebno izračunati statističke podatke, a zatim mjerne pogreške. Pri mjerenjima induktiviteta RCL metrom nema potrebe za računanjem statističkih podataka jer je u teoriji ova metoda najtočnija, te je potrebno samo izračunati srednju vrijednost sva tri mjerenja RCL metrom, te nju pozivati kao “pravu” vrijednost izmjenjenog induktiviteta koja će se uspoređivati s rezultatima dobivenim ostalim

metodama.

Prema formuli (6-1). aritmetička sredina induktiviteta zavojnice sa željeznom jezgrom iznosi 726.67 mH, a zavojnice sa zračnom jezgrom 52.14 mH.

Najtočniji konačni mjerni rezultat iskazuje se aritmetičkom sredinom pojedinih mjerenja s odstupanjem koje predstavlja apsolutna pogreška dana izrazom (6-2).

Formule za izračun aritmetičke sredine i mjernih pogrešaka:

Aritmetička sredina:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (6-1)$$

Apsolutna pogreška:

$$p_a = x_{mj} - x_p \quad (6-2)$$

Relativna pogreška:

$$p_r = \frac{x_{mj} - x_p}{x_p} \quad (6-3)$$

Postotna pogreška:

$$p\% = \frac{x_{mj} - x_p}{x_p} 100(\%) \quad (6-4)$$

6.1. U-I Mjerna metoda

Proračun srednje vrijednosti

Tablica 6.1. Statistički proračun "U-I mjerne metode"

	Aritmetička sredina	Apsolutna pogreška	Relativna pogreška	Postotna pogreška
Željezna jezgra L =726.67 mH	933.21	206.54 mH	0.28	28.42 %
Zračna jezgra L = 52.14 mH	81.99	29.85 mH	0.57	57.24 %

Izračun statističkih podataka orijentiran je prema tablici 5.4. i tablici 5.6..

Rezultati provedenih mjerenja su očekivana. Prema teoriji je jasno da U-I metoda daje najlošije rezultate, odnosno da će odstupanja od prave vrijednosti biti velika, što se može vidjeti iz tablice 6.1. Razlog tome su mala odstupanja pojedinih mjerenja i mala odstupanja u proračunu vrijednosti što u konačnici daje velika odstupanja od prave vrijednosti induktiviteta.

6.2. Mjerenje induktiviteta Maxwellovim mostom

Proračun srednje vrijednosti i mjerne pogreške:

Tablica 6.2. Rezultati proračuna induktiviteta na Maxwellovom mostu

	Aritmetička sredina	Apsolutna pogreška	Relativna pogreška	Postotna pogreška
Željezna jezgra L = 726.67 mH	792.88 mH	66.21 mH	0.09	9 %
Zračna jezgra L = 52.14 mH	66.07 mH	13.93 mH	0.26	2.6 %

Rezultati proračuna podataka su orjetntirani prema tablici 5.9.

Mjerenja induktiviteta Maxwellovim mostom prikazala su se točnija za razliku od U-I metode što je i očekivano. Naravno i u ovom slučaju imamo odstupanja od “prave” vrijednosti, zbog nepostizanja potpune nule nulinstrumenta i nesavršene preciznosti mjernih instrumenata.

7. Zaključak

U ovom završnom radu objašnjene su metode mjerenja induktiviteta. Također je definirana definicija induktiviteta i osnovni pojmovi vezani uz induktivitet kako bi opisane metode mjerenja bile shvatljivije. Od šest opisanih metoda najčešće se koriste “U-I metoda”, RCL metar, te neka jednostavnija izvedba mosta za mjerenje induktiviteta. Razlog toga je jednostavnost tih metoda i dostupnost opreme za provedbu mjerenja nad tim metodama. Za uspješno izvršavanje zadatka završnog rada također je potrebno poznavati opće pojmove o mjeriteljstvu kako bismo mjerenja mogli provesti pravilno, te na kraju pravilno analizirati dobivene mjerne rezultate. U laboratoriju FERIT-a provedene su tri metode mjerenja: “U-I metoda”, “mjerenje induktiviteta RCL metrom”, i “mjerenje induktiviteta Maxwellovim mostom”. Također, prema planu se trebala provesti i “rezonantna” metoda, ali zbog neadekvatnih uvjeta i teškog postizanja rezonancije ta metoda je izostavljena.

Metode mjerenja provedene su na zavojnici sa željeznom jezgrom i na zavojnici sa zračnom jezgrom. Najprije su provedena mjerenja RCL metrom čija se vrijednost smatra najtočnijom, te zbog toga se ta vrijednost smatra “pravom” vrijednošću mjerene zavojnice. Nakon provedenih mjerenja “U-I metodom” i Maxwellovim mostom uspoređeni su rezultati s rezultatima dobivenih RCL metrom. Nakon usporedbe rezultata može se zaključiti da su dobiveni rezultati očekivani. Prema teoriji Maxwellov most je puno precizniji od osnovne “U-I metode” što je provedbom mjerenja i analizom rezultata dokazano.

8. Literatura

- [1] Bego, V. Mjerenja u elektrotehnici. Zagreb : Tehnička knjiga, 1966.g.
- [2] Mrvoljak, Elektricna Mjerenja - Skripta s Predavanja, 2013.g.
Pristupljeno: 15.07.2022.
- [3] Hrvatska enciklopedija, Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2017.g.
- [4] Kennelly, Arthur. Impedance (IEEE, 1893)
- [5] Horowitz, Paul; Hill, Winfield (1989). "1". The Art of Electronics. Cambridge University Press.
pp. 32–33.
- [6] Nskote, "Reaktivni otpor-što je to?", 2016.g.
Pristupljeno: 15.07.2022
- [7] IET Labs Inc, LCR Measurement Primer 1st Edition, veljača 2018.
Pristupljeno: 14.07.2022
- [8] HIOKI, LCR meter measurement principle, 2020.g.
Pristupljeno: 13.07.2022
- [9] e-Škole, Fizika 2. Energija magnetskog polja, 2012.g.Pristupljeno : 12.07.2022
- [10] Library of Congress Prints and Photographs Division Washington, D.C. 20540 USA
Pristupljeno: 12.07.2022

9. Prilozi

9.1 Popis opreme

LCR metar - Gw Instek LCR-816

Digitalni multimetari - VOLTCRAFT VC 870, PeakTech MULTI FUNCTION TESTER 3725

Zračna zavojnica - „ELEKTRO SKLOP“ d.o.o. - Zagreb

Željezna zavojnica nepoznatog proizvođača

Kapacitivna dekada - PealTech 3285

Otporničke dekade - Metrel Decade resistor MA 2115

SAŽETAK

Zadatak završnog rada bio je teoretski opisati metode za mjerenje induktiviteta i razraditi zaključke o korištenim metodama. Na dvije različite zavojnice izvršeni su eksperimenti, odnosno dvije mjerne metode za mjerenje induktiviteta. Nakon provenih eksperimenata mjerni rezultati su obrađeni i uspoređeni.

U uvodnom djelu prikazan je zadatak završnog rada, u drugom i trećem poglavlju općeniti pojmovi o induktivitetu i reaktivnom otporu, četvrto i peto poglavlje koje je ujedno i najbitnije prikazuje teoriju o metodama za mjerenje induktiviteta i rad u laboratoriju gdje su provedene dvije metode mjerenja. Na kraju u šestom poglavlju su analizirani rezultati mjerenja.

Ključne riječi: induktivitet, zavojnica, otpor, most, metar, mjerenje, kapacitet, struja i napon

ABSTRACT

Inductance measuring methods

The task of this final work was to theoretical describe inductance measuring methods and elaborate conclusions of used methods. Experiments were made on two different coils, regarding two methods for measuring inductance. After performed experiments the measurment results are cultivated and compared.

In intruductory chapter is shown the taske of the final work, the second and third chapters show the general concepts of inductance and reactive resistance, fourth and fifth chapters, at the same time the most important parts are theory of inductance measuring methods and work in labaratomy where are performed two measuring methods. On the end in the sixht chapter the measuring results are analized.

Key words: inductance, coil, resistance, bridge, meter, measuring, capacity, current and voltage.

ŽIVOTOPIS

Filip Fekete rođen je 11.2.1999. godine u Osijeku. 2017, godine završava Srednju školu Valpovo te stječe zvanje “elektrotehničar”. Nakon završetka srednje škole upisuje Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek, smjer automatika. Dugogodišnje bavljenje sportskim aktivnostima.

Filip Fekete