

# Kriptografski sustavi temeljeni na eliptičkim krivuljama i mogućnosti njihove primjene

---

**Kuterovac, Marija**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2015**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:200:476466>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-14**

*Repository / Repozitorij:*

[Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek](#)



**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU  
ELEKTROTEHNIČKI FAKULTET**

**Sveučilišni studij**

**KRIPTOGRAFSKI SUSTAVI TEMELJENI NA  
ELIPTIČKIM KRIVULJAMA I MOGUĆNOSTI  
NJIHOVE PRIMJENE**

**Diplomski rad**

**Marija Kuterovac**

**Osijek, 2015.**

# SADRŽAJ

1. UVOD .....	1
2. OSNOVE KRIPTOGRAFIJE .....	2
2. 1. Kriptografija .....	2
2. 2. Kriptografski sustav .....	4
2. 3. Primjena kriptografije .....	6
2. 4. Sažetak poruke .....	7
2. 5. Digitalni potpis .....	7
2. 6. Digitalna omoćnica .....	8
2. 7. Digitalni pečat .....	9
2. 8. Kriptografska analiza .....	9
3. ELIPTIĆNE KRIVULJE.....	11
3. 1. Osnove eliptičnih krivulja .....	11
3. 1. 1. Zbrajanje na eliptičnoj krivulji .....	13
3. 1. 2. Skalarno množenje .....	15
3. 2. Eliptične krivulje nad poljem racionalnih brojeva .....	15
3. 2. 1. Raćunanje ranga .....	16
3. 3. Eliptične krivulje nad konaćnim poljem .....	17
3. 3. 1. Eliptične krivulje nad konaćnim poljem $F_q$ .....	17
3. 3. 2. Eliptične krivulje nad konaćnim poljem $F_p$ .....	19
3. 3. 3. Eliptične krivulje nad konaćnim poljem $F_{2^m}$ .....	21
3. 3. 4. Singularne eliptične krivulje .....	24
3. 3. 5. Koblitzove krivulje.....	24
3. 4. Problem diskrećnog logaritma za eliptične krivulje .....	25
3. 4. 1. Index calculus metoda .....	25
3. 4. 2. Problem diskrećnog logaritma za eliptične krivulje .....	25
3. 5. Kriptografski sustavi koji koriste eliptične krivulje .....	26
3. 5. 1. ElGamalov kriptografski sustav .....	27
3. 5. 2. Menzes-Vanstoneov kriptografski sustav .....	28
3. 5. 3. Elliptic curve encryption system .....	29
3. 5. 4. Demytkov kriptografski sustav .....	31
3. 5. 5. KMOV kriptografski sustav .....	32
3. 5. 6. Kuwokado-Koyama kriptografski sustav .....	33
3. 6. Digitalni potpis temeljen na eliptičnim krivuljama .....	34
3. 6. 1. DSA algoritam koji koristi eliptične krivulje .....	35
3. 6. 2. ECDSA algoritam .....	36
3. 6. 3. ECSS shema digitalnog potpisa .....	38
3. 6. 4. EC Nyberg – Rueppelova shema digitalnog potpisa.....	40
3. 6. 5. OFF shema digitalnog potpisa.....	41
3. 7. Protokoli za razmjenu tajnog kljuća .....	42
3. 7. 1. ECDH (engl. <i>Elliptic Curve Diffie – Hellman protocol</i> ) .....	43
3. 7. 2. EC Nyberg – Rueppelov protokol .....	45
3. 8. Sustavi za raspodjelu kljućeva .....	46
3. 8. 1. Sakazaki – Okamoto – Mamba sustav za raspodjelu kljućeva temeljen na identifikatoru koji koristi eliptične krivulje .....	47
3. 9. Specifićnosti eliptičnih krivulja .....	49
3. 9. 1. Performanse i sigurnost .....	49
3. 9. 2. Kompleksnost diskrećnog logaritamskog problema .....	50

3. 9. 3. Generiranje krivulja.....	50
3. 9. 4. Nekompatibilni sistemi .....	51
3. 9. 5. Procesiranje .....	51
3. 9. 6. Utrošak energije na bežičnim mrežama .....	52
4. USPOREDBA S DRUGIM KRIPTOGRAFSKIM SUSTAVIMA .....	53
5. SIMULACIJA KRIPTOGRAFSKOG SUSTAVA TEMENLJENOG NA ELIPTIČNIM KRIVULJAMA.....	57
5. 1. ECDSA algoritam .....	57
5. 2. ElGamalov kriptografski sustav .....	62
5. 2. 1. RSA algoritam.....	71
6. ZAKLJUČAK .....	73
LITERATURA.....	74
SAŽETAK.....	77
ABSTRACT .....	78
ŽIVOTOPIS .....	79
PRILOZI.....	80

## SAŽETAK

Širenjem različitih varijanti ugrađenih računalnih sustava s mogućnostima komunikacije javlja se potreba za kriptografskim sustavima temeljenim na eliptičkim krivuljama zbog toga što su prikladniji od drugih asimetričnih kriptografskih sustava. Glavni razlog zbog kojeg se javlja potreba za zamjenom postojećih kriptografskih sustava je ta da su s napretkom tehnologije napredovale i razvijale se metode za presretanje i otkrivanje podataka iz šifrata, a sami napadi su postajali sve učinkovitiji. Neprekidnim mijenjanjem duljine ključeva, radi povećanja sigurnosti prijenosa podataka, pojavio se problem zahtjevnosti ključa, pohrane i brzine obrade podataka kod konvencionalnih kriptografskih sustava. Stoga se rješenje pronalazi u kriptografskim sustavima temeljenima na eliptičnim krivuljama jer osiguravaju manju hardversku zahtjevnost, veću brzinu i visoku sigurnost podataka i komunikacije nesigurnim komunikacijskim kanalom. Važno je napomenuti da je teško izvršiti napad na kriptografske sustave temeljene na eliptičnim krivuljama i otkriti privatne ključeve članova koji se nalaze u sjednici upravo zbog same složenosti krivulje i digitalnog potpisa koji se koriste. Kao novo razvijena metoda koja se pojavila u kriptografiji predstavlja problem napadačima zbog nepoznavanja metoda za napad na ovakve sustave i upravo zbog toga javlja se potreba za sve većom implementacijom u računalne sustave.

Ključne riječi: kriptografija, kriptografski sustavi, kriptografski sustavi temeljeni na eliptičnim krivuljama, eliptične krivulje, problem diskretnog logaritma, ElGamal, Menzes-Vanstone, KMOV, Demytkov, digitalni potpis, ECDSA, Diffie-Hellman protokol za razmjenu tajnog ključa

## ABSTRACT

As the different sorts of computer systems with possibility of communication have appeared, there is a greater need for crypto systems based on elliptic curves, because they are more appropriate than other asymmetric crypto systems. With the development of technology, the methods for cipher text content interception and acquisition have also been developed, and that is the main reason for the fact that existing crypto systems had to be changed. The attacks themselves have become more efficient. By continuously changing the length of the keys to improve security of data transmission, conventional crypto systems have faced the problem with the key complexity, data storage and data processing rate. The solution has been found in crypto systems based on elliptic curves, because they ensure less hardware complexity, higher rates, and high level of data security. It is important to mention that creation of efficient attack on crypto system based on elliptic curves and finding private keys of session members is extremely hard task, because elliptic curves and digital signature that are used are extremely complex. As a newly developed method that has appeared in crypto systems, it is pretty difficult for attackers, because the methods to attack these systems are still unknown, and that is the main reason for increasing need to implement these systems in computer systems.

Keywords: cryptology, crypto systems, elliptic curve cryptology, elliptic curves, discrete logarithm problem, ElGamal, Menzes-Vanstone, KMOV, Demytkov, digital signature, ECDSA, Diffie-Hellman secret key exchange protocol.