

# Primjena Kalman filtera za procjenu stanja elektromotora

---

**Mostarac, Marija**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:200:343828>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-08-21**

*Repository / Repozitorij:*

[Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek](#)



SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I  
INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA OSIJEK

Sveučilišni studij elektrotehnike

PRIMJENA KALMAN FILTERA ZA PROCJENU STANJA  
ELEKTROMOTORA

Diplomski rad

Marija Mostarac

Osijek, 2023.

**FERIT**FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA  
I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA **OSIJEK****Obrazac D1: Obrazac za imenovanje Povjerenstva za diplomski ispit**

Osijek, 14.09.2023.

Odboru za završne i diplomske ispite

**Imenovanje Povjerenstva za diplomski ispit**

<b>Ime i prezime Pristupnika:</b>	Marija Mostarac
<b>Studij, smjer:</b>	Diplomski sveučilišni studij Elektrotehnika
<b>Mat. br. Pristupnika, godina upisa:</b>	D-1416, 07.10.2021.
<b>OIB studenta:</b>	38981157991
<b>Mentor:</b>	prof. dr. sc. Marinko Barukčić
<b>Sumentor:</b>	dr. sc. Tin Benšić
<b>Sumentor iz tvrtke:</b>	
<b>Predsjednik Povjerenstva:</b>	prof. dr. sc. Kruno Miličević
<b>Član Povjerenstva 1:</b>	dr. sc. Tin Benšić
<b>Član Povjerenstva 2:</b>	izv. prof. dr. sc. Emmanuel-Karlo Nyarko
<b>Naslov diplomskog rada:</b>	Primjena Kalman filtera za procjenu stanja elektromotora
<b>Znanstvena grana diplomskog rada:</b>	<b>Elektrostrojarstvo (zn. polje elektrotehnika)</b>
<b>Zadatak diplomskog rada:</b>	Potrebno je izvesti dinamički model asinkronog stroja, te na temelju istoga strukturirati Extended Kalman filter procjenitelj stanja stroja. Koristenjem EKF-a u povratnoj vezi sintetizirati stabilan regulacijski krug po principu vektorskog upravljanja ili prediktivnog upravljanja zasnovanom na modelu. Proučiti sekundarne utjecaje na rad EKF-a i zatvorenog regulacijskog kruga Tema rezervirana za: Marija Mostarac Sumentor s FERIT-a: dr.sc.Tin Benšić
<b>Prijedlog ocjene pismenog dijela ispita (diplomskog rada):</b>	Izvrstan (5)
<b>Kratko obrazloženje ocjene prema Kriterijima za ocjenjivanje završnih i diplomskih radova:</b>	Primjena znanja stečenih na fakultetu: 3 bod/boda Postignuti rezultati u odnosu na složenost zadatka: 3 bod/boda Jasnoća pismenog izražavanja: 3 bod/boda Razina samostalnosti: 3 razina
<b>Datum prijedloga ocjene od strane mentora:</b>	14.09.2023.
Potvrda mentora o predaji konačne verzije rada:	<i>Mentor elektronički potpisao predaju konačne verzije.</i>
	Datum:

**FERIT**FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA  
I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA OSIJEK**IZJAVA O ORIGINALNOSTI RADA**

Osijek, 25.09.2023.

**Ime i prezime studenta:**

Marija Mostarac

**Studij:**

Diplomski sveučilišni studij Elektrotehnika

**Mat. br. studenta, godina upisa:**

D-1416, 07.10.2021.

**Turnitin podudaranje [%]:**

3

Ovom izjavom izjavljujem da je rad pod nazivom: **Primjena Kalman filtera za procjenu stanja elektromotora**

izrađen pod vodstvom mentora prof. dr. sc. Marinko Barukčić

i sumentora dr. sc. Tin Benšić

moj vlastiti rad i prema mom najboljem znanju ne sadrži prethodno objavljene ili neobjavljene pisane materijale drugih osoba, osim onih koji su izričito priznati navođenjem literature i drugih izvora informacija. Izjavljujem da je intelektualni sadržaj navedenog rada proizvod mog vlastitog rada, osim u onom dijelu za koji mi je bila potrebna pomoć mentora, sumentora i drugih osoba, a što je izričito navedeno u radu.

Potpis studenta:

# Sadržaj

<b>1.</b>	<b>Uvod . . . . .</b>	<b>4</b>
<b>2.</b>	<b>Asinkroni motor . . . . .</b>	<b>6</b>
2.1.	Princip rada i konstrukcija . . . . .	6
2.2.	Matematički model stroja . . . . .	6
2.2.1.	Model u troosnom sustavu . . . . .	7
2.2.2.	Dvoosna transformacija . . . . .	8
2.2.3.	Model u dvoosnom sustavu . . . . .	9
2.3.	Model punog reda . . . . .	10
2.4.	Vektorska regulacija . . . . .	11
<b>3.</b>	<b>Kalmanov filter . . . . .</b>	<b>15</b>
3.1.	Algoritam i izvod jednadžbi Kalman filtra . . . . .	16
3.1.1.	Izvod opći jednadžbi linearnog diskretnog Kalman filtra . . . . .	17
<b>4.</b>	<b>Extended Kalman filter . . . . .</b>	<b>22</b>
4.1.	Primjena Extended Kalman filtra . . . . .	22
4.2.	Izbor i odgovarajući zapis modela motora spram vremenske domene . . . . .	23
4.2.1.	Diskretizacija modela motora . . . . .	25
4.2.2.	Linearizacija sustava . . . . .	25
4.3.	Algoritma EKF-a . . . . .	27
4.3.1.	Inicijalizacija parametara i matrica kovarijanci . . . . .	27
4.3.2.	Implementacija simulacijskog modela . . . . .	29
<b>5.</b>	<b>Analiza simulacijskih rezultata . . . . .</b>	<b>30</b>
5.1.	Stabilnost sustava . . . . .	30
5.2.	Stabilnost i konvergencija EKF-a . . . . .	31
5.3.	Utjecaj sekundarnih čimbenika na stabilnost i konvergenciju . . . . .	46
5.3.1.	Parametriziranje regulatora . . . . .	46
5.3.2.	Izbor vremena uzorkovanja . . . . .	47
5.3.3.	Izbor solvera kod konfiguracije unutar Simulink-a . . . . .	51
5.3.4.	Usporedba rezultata s OPAL-RT-a i Matlab-a računala . . . . .	69
<b>6.</b>	<b>Zaključak . . . . .</b>	<b>72</b>
	<b>Sažetak . . . . .</b>	<b>77</b>
	<b>Abstract . . . . .</b>	<b>78</b>
	<b>Životopis . . . . .</b>	<b>79</b>

# 1. UVOD

Asinkroni motori su rotirajući strojevi koji pretvaraju električnu energiju u mehaničku. Zbog svoje pouzdanosti, robusnosti, jednostavnosti izrade koja se reflektira u obliku pristupačne cijene, u današnje vrijeme su na čelu modernih proizvodnih procesa kao osnovni dio pogonskih sustava, te zauzimaju sve veći udio u područjima od industrijske implementacije do električnih kućanskih uređaja. Naširoko se koriste u primjenama kao što su pumpe, ventilatori, dizala, servo i robotika, periferija računala, električna vozila, sustavi za proizvodnju vjetra, tvornice čelika i cementa, brodski pogon itd. Iako su asinkroni strojevi uvedeni prije više od stotinu godina, istraživanju i razvoju u ovom području nema kraja. Visoke performanse električnih pogona općenito, postižu se promišljenim izborom robusnog električnog stroja, dobrim poznavanjem dinamičkog i matematičkog modela stroja, njegovim pouzdanim upravljanjem, razumijevanjem varijacije parametara i sposobnosti procjene stanja stroja [1].

Pojava vektorski orijentiranog upravljanja (engl. *Field oriented control-FOC*) koju je razvio Blaschke 1972. godine, bila je veliki napredak u području upravljanja asinkronog motora [2]. Iako je FOC prilično popularan i omogućuje točno upravljanje, karakteriziraju ga i određene nepravilnosti. Glavni nedostaci su: komplicirana shema, ovisnost o električnim parametrima motora i potreba za sensorima. Kod vektorskog upravljanja mjeri se brzina vrtnje rotora motora, rotorski magnetski tok i struje statora. Ove informacije dobivaju se upotrebom senzora. Nedostatak korištenja senzora jest taj što oni ne daju perfektne i potpune podatke o sustavu. Prvo, općenito ne pružaju sve informacije koje su od interesa ili se ne može realizirati uređaj za generiranje mjerenja željene varijable ili je trošak uključivanja takvog mjerenja previsok. U drugim situacijama, brojni različiti uređaji mogu davati funkcionalno povezane signale ali se onda treba zapitati kako generirati najbolju procjenu varijabli od interesa na temelju djelomično redundantnih podataka. Također, senzori ne daju točna očitavanja nego unose vlastitu dinamiku i izobličenja [3]. Druga najčešće korištena varijacija upravljanja je *Direct torque control* razvijena 1984. godine od strane Takahashi-a [4]. *Direct torque control* asinkronih motora zahtijeva točno poznavanje modula i kutnog položaja kontroliranog toka. U *DTC*-u, tok se uobičajeno dobiva iz modela napona statora, koristeći izmjerene napone i struje statora. Ova metoda koristi čistu integraciju otvorene petlje koja pati od dobro poznatih problema učinaka integracije u digitalnim sustavima, posebno pri radnom području malih brzina [5].

Evolucija teorije upravljačkih sustava dovela je do novih tehnika za optimizaciju rada industrijskih sustava općenito, a posebno električnih strojeva. Predlaganje novih rješenja za poboljšanje pouzdanosti, učinkovitosti i troškova električnih pogona obavezan je zahtjev kako bi se odgovorilo na izazove tržišta koji se neprestano razvijaju, s naglaskom na razvoj moderne industrijske automatizacije. U tom smislu, upravljanje bez senzora (engl. *Sensorless control*) doživjelo je značajan razvoj posljednjih nekoliko godina. Sve veći interes može se opravdati njihovim brojnim prednostima. Zapravo, električni pogoni bez senzora imaju nižu cijenu, smanjenu složenost hardvera, smanjene dimenzije pogonskog stroja i zahtijevaju manje održavanja [6].

*Sensorless control* karakterizira u prvom redu upotreba procjenitelja ili promatrača sustava za identifikaciju struja statora i toka rotora u svakom periodu uzorkovanja kao i brzine vrtnje rotora. Estimatori se pri radu oslanjaju na poznavanje parametara stroja, koji nisu uvijek točni što zbog prisustva šumova, što zbog utjecaja sekundarnih čimbenika. U osnovi postoje dva oblika implementacije estimatora: otvorena petlja i zatvorena petlja, a razlika između njih je u tome koristi li procjenitelj za postizanje rezultata korekciju koja uključuje pogrešku procjene. U estimatorima otvorene petlje, posebno pri niskim brzinama, odstupanja parametara imaju značajan utjecaj na performanse kako u stacionarnom tako i u prijelaznom stanju. Međutim, moguće je poboljšati otpornost na neusklađenost parametara, a također i

šum signala korištenjem procjenitelja zatvorene petlje [7]. U raznim literaturama predloženo je nekoliko metoda procjene temeljenih na modelu kao što je upotreba procjenitelja punog reda [8], *Luenbergovi* procjenitelji [9] i drugi. Međutim za razliku od drugih metoda procjene, primjena Kalman filtra pruža stohastički pristup problemu estimacije i najčešće upotrebljavani estimator zatvorene petlje za stohastičke sustave je upravo Kalmanov filtar [7].

Kalmanov filtar (KF) je estimator stanja, odnosno matematički algoritam procjene. Koristi se za analizu unutarnjeg stanja sustava koje se ne može izravno promatrati to jest mjeriti uzimajući u obzir šum [7]. Radi na principu rekurzije. Rekurzija podrazumjeva proces kod kojega se pomoću definirane rekurzivne funkcije ili izraza, opetovanim postupkom dolazi do rješenja, pri čemu se ne zahtijeva pohranjivanje svih prethodnih podataka iz svih iteracija, nego se pamte samo podatci posljednjeg izvršenog koraka. Rekurzivne izraze Kalmanovog filtra čine dvije grupe jednadžbi, a to su jednažbe predikcije i jednažbe mjerenja ili korekcije, gdje se metodom najmanjih kvadrata dolazi do najpreciznije informacije, odnosno optimalne procjene [10]. Osnovni KF primjenivan je samo za linearne sustave, a za nelinearne sustave koristi se prošireni Kalmanov filtar (engl. *Extended kalman filtar - EKF*), koji može dati procjenu stanja sustava ili i stanja i parametara [5].

U ovome radu najprije je iznesena struktura matematičkog modela asinkronog motora koja predstavlja temelj za sintezu regulacijskog kruga po principu vektorskog upravljanja. Zatim je u narednom poglavlju detaljno objašnjen Extended Kalman filtar i način implementacije istoga u Matlab-u. Na posljepku je dan pregled utjecajnih parametara u pogledu konvergencije i stabilnosti sustava. Neka od pitanja na koja se nastoji odgovoriti kroz rad uz korištenje znanja o dinamici sustava, statističkog opisa šumova sustava su:

- Kako razviti i implementirati sustav upravljanja i procjene koji sadrži neispravnosti u vidu šumova unutar podataka na ispravan i praktičan način?
- Kako iz podataka koji sadrže šumove optimalno procijeniti željeno stanje elektromotora?
- Uz suočavanje s brojnim nesigurnostima samog modela procjenitelja i smetnjama izvan kontrole, kako optimalno upravljati sustavom da radi na poželjan način?

Razni industrijski izmjenični pogoni već uključuju estimatore i očekuje se da će u budućnosti obzerveri imati povećanu ulogu u vektorski upravljanim industrijskim pogonima visokih performansi.

## 2. ASINKRONI MOTOR

### 2.1. Princip rada i konstrukcija

Asinkroni motor je izmjenični električni rotacijski stroj. Osnovni dijelovi stroja su statorski paket, rotorski paket, statorski namot, rotorski namot ili kavez, osovina, ležajevi, kućište i ventilator. Statorski paket je mirujuća konstrukcija motora sastavljena od međusobno izoliranih tankih magnetskih limova oblikovanih u kružno raspoređene utore. Unutar utora nalaze se trofazni namoti statora. Rotorski paket asinkronog stroja također je izrađen od magnetskog materijala. Namot rotora izveden je u obliku štapova koji su na svojim krajevima kratko spojeni prstenovima i za razliku od rotora sinkronih motora ne napaja se iz vanjskog izvora. Zbog ovakvog oblika rotora, ova izvedba motora se naziva kavezni asinkroni motor. Detaljnu i slikovitu analizu same konstrukcije i načina rada asinkronog motora sa pripadajućim shemama moguće je pronaći u [1], [11], [12].

Princip rada asinkronog motora je slijedeći. Na statorske namote dovodi se trofazni izmjenični napon. Trofazna struja frekvencije  $f$  koja poteče namotima stvara magnetsko polje, koje je zbog rasporeda namota i sinusnog karaktera struje rotacijsko i to konstantne brzine koja odgovara sinkronoj brzini, a osim što ovisi o frekvenciji struje napajanja ovisi još i o broju pari polova  $p$  stroja i dana je izrazom:

$$\omega_s = \frac{2\pi f}{p} \quad (2-1)$$

Rotirajuće magnetsko polje presjeca kratkospojene vodiče na rotoru inducirajući u njima napon. Struja koja poteče namotima na rotoru, u kombinaciji s magnetskim poljem statora uzrokuje moment koji djeluje na rotor te ga ubrzava ukoliko može savladati teret na rotoru. Zbog načina na koji nastaje moment na rotoru, brzina vrtnje rotora u normalnom režimu rada nikada ne dostiže sinkronu brzinu vrtnje okretnog magnetskog polja statora jer se, u protivnom, na rotoru ne bi stvarao moment zbog odsustva inducirane elektromotorne sile. Zbog malog otpora kratkospojenih štapova rotora, potrebna je samo mala relativna brzina  $\omega_{rel}$ , između sinkrone brzine statora i mehaničke brzine dvopolnog rotora za proizvodnju potrebne struje rotora. Razlika brzine vrtnje rotora i okretnog polja statora očituju se u klizanju koje je jednako:

$$s = \frac{\omega_{rel}}{\omega_s} = \frac{\omega_s - \omega_r}{\omega_s} \quad (2-2)$$

### 2.2. Matematički model stroja

Kako bi se opisani princip rada mogao analizirati potrebno je fizikalne pojave opisati pomoću matematičkog modela, upotrebljavajući određene pretpostavke vezane za konstrukciju samog stroja te Kirchhoffove i Ohmove zakone. Sve ove pretpostavke upućuju na idealno okretno magnetsko polje statora i rotora kao i jednake magnetske otpore duž osiju rotora [13]. Neke od njih su:

- trofazni stator sa sinusno raspoređenim zavojima i fazama prostorno pomaknutim za  $120^\circ$ ,
- rotor od tri kartkospojena sinusno raspodjeljena namota,
- zanemaruje se magnetsko polje van zračnog raspora,
- zračni raspored je jednake duljine po obodu stroja,



- magnetska zasićenja, gubici u jezgri i skin efekt su zanemareni,
- magnetska polja postoje samo u zračnom rasporu oko rotora zbog velike permeabilnosti željeza.

### 2.2.1. Model u troosnom sustavu

Za analizu modela u troosnom sustavu potrebno je fizikalne veličine (npr. napon) promatrati kao prostorne vektore u smislu matematičkog pojednostavljenja. Svaka od tri faze odgovarajuće fizikalne veličine predstavlja jedinični vektor a linearna kombinacija svih komponenata rezultira prostornim vektorom, što je koncizno interpretirano u knjizi [14].

Model asinkronog stroja je sastavljen od vremenskih diferencijalnih jednadžbi Kirchhoffovih zakona za napone statora i rotora gdje je:  $\mathbf{u}_{s,abc} = [u_a \ u_b \ u_c]^T$  vektor napona statora stroja,  $\mathbf{i}_{abc} = [i_a \ i_b \ i_c]^T$  vektor struje,  $\boldsymbol{\psi}_{abc} = [\psi_a \ \psi_b \ \psi_c]^T$  vektor ulančanog magnetskog toka i  $\mathbf{R}_s$  i  $\mathbf{R}_r$  predstavljaju dijagonalne matrice otpor pojedinog djela konstrukcije stroja; jednadžbi za veze tokova i struja pri čemu je  $\mathbf{L}_{m,abc}$  matrica međuinduktiviteta dimenzija  $3 \times 3$  koja je u vremenu promjenjiva budući da ovisi o položaju magnetskog toka rotora  $\mathbf{L}_{m,abc} = f(\gamma_r)$ , dok su  $\mathbf{L}_{s,abc}$  i  $\mathbf{L}_{r,abc}$  matrice samoinduktiviteta jednakih prethodno navedenih dimenzija; drugog Newtonovog zakona za kutnu akceleraciju gdje je  $J$  moment inercije sustava koji rotira,  $\omega$  je kutna brzina vrtnje motora,  $m_e$  i  $m_t$  predstavljaju elektromagnetski moment stroja i mehanički moment na vratilu odnosno moment tereta; izraza za elektromagnetski moment stroja koji potječe od bilanci snage i izraza za brzinu vrtnje.

$$\mathbf{u}_{s,abc} = \mathbf{R}_s \mathbf{i}_{s,abc} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_{s,abc} \quad (2-3)$$

$$0 = \mathbf{R}_r \mathbf{i}_{r,abc} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_{r,abc} \quad (2-4)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{s,abc} = \mathbf{L}_{s,abc} \mathbf{i}_{s,abc} + \mathbf{L}_{m,abc} \mathbf{i}_{r,abc} \quad (2-5)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{r,abc} = \mathbf{L}_{r,abc} \mathbf{i}_{r,abc} + \mathbf{L}_{m,abc} \mathbf{i}_{s,abc} \quad (2-6)$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = m_e - m_t \quad (2-7)$$

$$m_e = \mathbf{i}_{s,abc}^T \frac{\partial \boldsymbol{\psi}_{s,abc}}{\partial \rho} \quad (2-8)$$

$$\omega = \frac{d\rho}{dt} \quad (2-9)$$

Kako se unutar izraza (2-5) i (2-6) javlja matrica međuinduktiviteta koja ovisi o položaju rotora koji se mijenja u vremenu javlja se problem nelinearnosti modela. Osim toga izraz (2-8) sadrži parcijalnu derivaciju toka po kutu što zahtjeva kompleksan izračun. Zbog velikog broja varijabli i parametara te same promjenjivosti nekih u ovisnosti u vremenu, ovakav troosni model se ne koristi za simuliranje, regulaciju i upravljanje. Prelaskom u dvoosni sustav dobiva se model koji je pogodniji za simulacije. Naziv procesa prijelaza troosnih veličina u dvoosni sustav naziva se Parkova ili  $dq$  transformacija.

### 2.2.2. Dvoosna transformacija

Ideja  $dq$  transformacije s ciljem eliminacije ovisnosti induktiviteta o položaju rotora je prvobitno osmišljena i primjenjivana za sinkrone strojeve čiji se koncept može pronaći u izvornim radovima R. H. Parka [15] i [16]. Pristup ovih radova temelji se na svodenju statorskih veličina u dvoosni sustav vezan za os rotora koji prema tome i rotira brzinom rotora. Uopćenu primjenu iste i za asinkrone motore uveo je Krause u svome radu [17], gdje je utvrđeno da se sve međui nduktivitete ovisne o položaju rotora može ukloniti transformacijom statorskih i rotorskih varijabli u referentni okvir koji može ili mirovati ili rotirati proizvoljnom brzinom vrtnje. Model koji se upotrebljava za vektorsko upravljanje može se dobiti korištenjem prethodno spomenute teorije prostornih vektora. Takav model vrijedi za bilo koju trenutnu varijaciju napona i struje i adekvatno opisuje performanse stroja i u stacionarnom i u prijelaznom radu, a korištenje modela dvofaznog motora smanjuje broj jednadžbi i pojednostavljuje dizajn upravljanja. Ilustracije priče o prostornim vektorima, prikaz pojedinih koordinatnih sustava i njihovih odnosa kao i povijesni razvoj transformacija prilagođen razini studentskog znanja može se pronaći u diplomskim radovima [18] i [19].

Složeni prostorni vektori se prilikom dvoosne transformacije opisuju pomoću dvije ortogonalne osi zbog čega se vrši transformacija matematičkog modela stroja iz troosnog sustava stanja u novi dvoosni  $dq$  sustav kod kojega je  $d$  os pomaknuta za kut  $\rho_k$  u odnosu na os  $a$  troosnog sustava, a brzina vrtnje  $dq$  sustava je  $\omega_k$ . Tada za kut  $dq$  sustava vrijedi:

$$\frac{d\rho_k}{dt} = \omega_k \quad (2-10)$$

Kako bi se veličine statora transformirale iz troosnog u dvoosni sustav koristi se matrica transformacije i definirana je kao:

$$\mathbf{K}_{dq} = \begin{bmatrix} \cos(\rho_k) & \cos(\rho_k - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\rho_k + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\rho_k) & -\sin(\rho_k - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\rho_k + \frac{2\pi}{3}) \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

Pa je vektor transformirane veličine u dvoosnom sustavu jednak:

$$\mathbf{x}_{dq} = \frac{2}{3} \mathbf{K}_{dq} \mathbf{x}_{abc} \quad (2-12)$$

Unutar prethodnog izraza uveden je koeficijent  $\frac{2}{3}$  kako bi se očuvala amplituda resultantnog vektora jednaka faznim veličinama zbog toga što resultantni prostorni vektor iznosi  $\frac{3}{2}$  vršne vrijednosti svake faze. Koeficijent skaliranja ne mora biti nužno  $\frac{2}{3}$ , ovisno o transformiranoj veliči čija se amplituda želi sačuvati, može se koristiti koeficijent 1 ili  $\sqrt{\frac{2}{3}}$  o čemu se više može proučiti u literaturi [7], [20].

Pri prijelazu u dvoosni sustav nije dovoljno transformirati jedino veličine statora nego je potrebno u novi koordinatni sustav prevesti i rotorske veličine. U tom slučaju kut transformacije  $\rho_k$  ne ovisi samo o brzini vrtnje  $dq$  sustava nego i o brzini vrtnje rotora odnosno  $abc$  sustava koji je sada vezan za rotor pa prema tome ima svoju brzinu rotacije, dok je u slučaju transformacije statorskih veličina brzina vrtnje  $abc$  sustava bila jednaka 0 zbog toga što je statorski referentni okvir mirujući. Prema tome vrijedi:

$$\frac{d\rho_k}{dt} = \omega_k - \omega_r \quad (2-13)$$

gdje je  $\omega_r$  rotorska brzina vrtnje odnosno brzina vrtnje  $abc$  sustava. Ovako dobiveni kut se prilikom transformacije rotorskih veličina koristi unutar matrice transformacije (2-11) analogno čemu pripadajući vektor rotorske veličine u dvoosnom sustavu poprima oblik dan izrazom

(2-12). Također, vrijedi i obratna transformacija pri čemu se iz ortonormirane baze  $dq$  vektorskog prostora proizvoljne brzine vrtnje, prelazi u troosni koordinatni sustav  $abc$  korištenjem transponiranja navedene matrice.

Transformacija iz troosnog sustava u  $\alpha\beta$ , odnosno mirujućí sustav statora kod kojega je brzina rotacije jednaka nuli kao i kut rotacije, a os  $\alpha$  poravnata je s osi  $a$  te njezin inverz nazivaju se još i Clarkeinom transformacijom [21]:

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \frac{2}{3}\mathbf{K}_{\alpha\beta}\mathbf{x}_{abc} \quad (2-14)$$

gdje je:

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

Također je moguća transformacija iz proizvoljno rotirajućeg  $dq$  sustava u umirujućí dvoosni  $\alpha\beta$  sustav:

$$\mathbf{x}_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \cos(\rho_k) & -\sin(\rho_k) \\ \sin(\rho_k) & \cos(\rho_k) \end{bmatrix} x_{dq} \quad (2-16)$$

kao i obratno odnosno iz  $\alpha\beta$  sustava u  $dq$  sustav:

$$\mathbf{x}_{dq} = \begin{bmatrix} \cos(\rho_k) & \sin(\rho_k) \\ -\sin(\rho_k) & \cos(\rho_k) \end{bmatrix} x_{\alpha\beta} \quad (2-17)$$

### 2.2.3. Model u dvoosnom sustavu

Kada su poznate metode transformacije iz troosnog  $abc$  sustava u umirujućí  $\alpha\beta$  sustav pa zatim u proizvoljno rotirajućí  $dq$  sustav ili pak direktno iz  $abc$  sustava u  $dq$  sustav moguće je prilagoditi dinamički model stroja dvoosnom  $dq$  sustavu. Dvoosni sustav je u ovom slučaju sinkroniziran sa veličinama statora, odnosno njegova brzina rotacije  $\omega_k$  jednaka je električnoj sinkronoj brzini trofaznog napajanja motora, čime se veličine statora koje su definirane tom frekvencijom, konkretno napon i struja statora zapravo mogu promatrati kao istosmjerne. Primjenom transformacija na jednadžbe KZN-a dane izrazima (2-3) i (2-4), množenjem navedenih relacija sa odgovarajućim matricama transformacija, zatim potrebnim deriviranjem kako je prikazano u [11] i [14] dolazi se do:

$$\mathbf{u}_{s,dq} = R_s \mathbf{i}_{s,dq} + \omega_k \mathbf{J}_r \boldsymbol{\psi}_{s,dq} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_{s,dq} \quad (2-18)$$

$$0 = R_r \mathbf{i}_{r,dq} + (\omega_k - \omega) \mathbf{J}_r \boldsymbol{\psi}_{r,dq} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_{r,dq} \quad (2-19)$$

gdje je  $\mathbf{J}_r$  matrica rotacije koja rotira za  $90^\circ$  vektor koji množi:

$$\mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-20)$$

Izrazi (2-5) i (2-6) su nakon transformacije u  $dq$  sustav linearni i vremenski nepromjenjivi a izgledaju ovako:

$$\boldsymbol{\psi}_{s,dq} = \mathbf{L}_s \mathbf{i}_{s,dq} + \mathbf{L}_m \mathbf{i}_{r,dq} \quad (2-21)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{r,dq} = \mathbf{L}_s \mathbf{i}_{r,dq} + \mathbf{L}_m \mathbf{i}_{s,dq} \quad (2-22)$$

gdje su:

$$\mathbf{L}_s = \begin{bmatrix} L_s & 0 & 0 \\ 0 & L_s & 0 \\ 0 & 0 & L_{ls} \end{bmatrix} \quad (2-23)$$

$$\mathbf{L}_r = \begin{bmatrix} L_r & 0 & 0 \\ 0 & L_r & 0 \\ 0 & 0 & L_{lr} \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

$$\mathbf{L}_{sm} = \begin{bmatrix} L_m & 0 & 0 \\ 0 & L_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

pri čemu su kako se primjećuje ove matrice dijagonalne i međuinduktiviteti stroja zapisani u  $dq$  sustavu gube ovisnost o prostornom položaju rotora stroja. Cjelokupan kompleksan proces izvedbe matrica induktiviteta kronološkim redoslijedom prikazan je u literaturi [22] i vrijedi:  $\mathbf{L}_s$  je statorski induktivitet jednak zbroju rasipnog induktiviteta statora  $L_{ls}$  i međuinduktiviteta  $L_m$ , a  $\mathbf{L}_r$  je rotorski induktivitet, a odgovara zbroju rasipnog induktiviteta rotora  $L_{lr}$  i međuinduktiviteta  $L_m$ .

Jednadžba (2-7) u dvoosnom sustavu ne mijenja svoj oblik dok algebarska jednadžba momenta poprima idući simulacijski oblik:

$$m_e = \frac{3}{2} \mathbf{i}_{s,dq}^T \mathbf{J}_r \boldsymbol{\psi}_{s,dq} \quad (2-26)$$

Izraz raspisan po komponentama od velike je važnosti za vektorsko upravljanje:

$$m_e = \frac{3}{2} p (\psi_{s,d} i_{s,q} - \psi_{s,q} i_{s,d}) \quad (2-27)$$

Na temelju svih izvedenih relacija model je sa sedmog reda troosnog sustava reduciran na model petog reda dvoosnog sustava sa četiri jednadžbe KZN-a i jednom jednadžbom kutnog gibanja koje su povezane izrazima za tokove i izrazom za moment.

## 2.3. Model punog reda

Kako je zadatak samog rada procjena stanja elektromotora što zapravo podrazumijeva procjenu struja statora i toka rotora, za dizajn osmotritelja sustava nužno je poznavati takozvani model punog reda asinkronog motora. Temelj izvoda spomenutog modela jest struktura modela u mirujućem koordinatnom sustavu  $\alpha\beta$  kod kojega kako je prethodno opisano vrijedi da je  $\omega_k = 0$  i  $\rho_k = 0$ . Implementacija  $\rho_k = 0$  u izraz za matricu transformacije (2-11) rezultira konstantnom matricom (2-15) što uvelike olakšava proračun. Primjenom navedenog u relacije (2-18) i (2-19) dobivaju se izrazi:

$$\mathbf{u}_{s,\alpha\beta} = R_s \mathbf{i}_{s,\alpha\beta} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_{s,\alpha\beta} \quad (2-28)$$

$$0 = R_r \mathbf{i}_{r,\alpha\beta} - \omega \mathbf{J}_r \boldsymbol{\psi}_{r,\alpha\beta} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_{r,\alpha\beta} \quad (2-29)$$

Uvođenjem (2-21) u izraz (2-28) i primjenom supstitucije za faktor rasipanja koji glasi:

$$\sigma = 1 - \frac{L_m^2}{L_s L_r} \quad (2-30)$$

dobiva se jednakost za naponski model motora u mirujućem sustavu:

$$\mathbf{u}_{s,\alpha\beta} = R_s \mathbf{i}_{s,\alpha\beta} + \frac{d}{dt} \sigma L_s \mathbf{i}_{s,\alpha\beta} + \frac{L_m}{L_r} \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_{r,\alpha\beta} \quad (2-31)$$

Analogno prethodnom uvođenju veze između tokova i struja u izraz (2-28), jednakom operacijom nad izrazom (2-29) dolazi se do strujnog modela motora:

$$0 = (\alpha I - \omega \mathbf{J}_r) \boldsymbol{\psi}_{r,\alpha\beta} - \alpha L_m \mathbf{i}_{s,\alpha\beta} + \frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_{r,\alpha\beta} \quad (2-32)$$

Preoblikovanjem prethodne relacije dobiva se oblik pogodan za daljnje korištenje prilikom dizajna estimatora:

$$\frac{d}{dt} \boldsymbol{\psi}_{r,\alpha\beta} = \alpha L_m \mathbf{i}_{s,\alpha\beta} - (\alpha \mathbf{I} - \omega \mathbf{J}_r) \boldsymbol{\psi}_{r,\alpha\beta} \quad (2-33)$$

Uvrštavanjem vremenske derivacije toka  $\boldsymbol{\psi}_{r,\alpha\beta}$  odnosno, (2-33) u (2-31) dobiva se:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{i}_{s,\alpha\beta} = \left( -\frac{1-\sigma}{\sigma} \alpha - \frac{1}{\sigma T_s} \right) \mathbf{i}_{s,\alpha\beta} - \frac{1-\sigma}{\sigma L_m} (\alpha \mathbf{I} - \omega \mathbf{J}_r) \boldsymbol{\psi}_{r,\alpha\beta} + \frac{1}{\sigma L_s} \mathbf{u}_{s,\alpha\beta} \quad (2-34)$$

Konačno, prethodna dva izraza vremenskih derivacija za tok rotora  $\boldsymbol{\psi}_{r,\alpha\beta}$  i struju statora  $\mathbf{i}_{s,\alpha\beta}$  kao varijabli samog modela, zajedno čine model punog reda sustava tj. asinkronog motora u prostoru stanja.

## 2.4. Vektorska regulacija

Elektromotorni pogoni s asinkronim strojem po strukturi sustava upravljanja mogu biti skalarni ili vektorski. Tijekom godina razvili su se različiti sustavi vektorskog upravljanja asinkronim motorom o čemu se može detaljno pronaći u knjigama [14] i [7] ali i u radovima [23], [24]. Zajedničko za sve njih je da se temelje na raspregnutom dvoosnom upravljanju, pri čemu je referentna veličina, struja statora, u jednoj osi odgovorna za brzinu vrtnje ili moment, a u drugoj osi za magnetiziranje stroja.

U slučaju asinkronih strojeva upravljanje se obično izvodi u referentnom okviru  $dq$  vezanom za vektor magnetskog toka rotora. Zato implementacija vektorskog upravljanja zahtijeva informacije o modulu i prostornom kutu odnosno položaju prostornog vektora toka rotora. Ako je poznat kut prostornog vektora magnetskog toka rotora  $\gamma_k$  i uzme se da je položaj rotirajućeg  $dq$  sustava pod istim kutem, dakle  $\rho_k = \gamma_k$  pri čemu je i brzina rotacije  $dq$  sustava jednaka brzini rotacije prostornog vektora magnetskog toka rotora iz čega slijedi da je  $\psi_{r,q} = 0$ , tada se izrazi za model asinkronog stroja (2-3) - (2-9). zapisuju u novom rotorski orijentiranom  $dq$  sustavu. Kako je svrha vektorskog upravljanja raspredanje osi  $d$  i  $q$  navedeni izrazi se raspisuju prema komponentama i to kako slijedi:

$$u_{s,d} = R_s i_{s,d} - \omega_k \psi_{s,q} + \frac{d\psi_{s,d}}{dt} \quad (2-35)$$

$$u_{s,q} = R_s i_{s,q} + \omega_k \psi_{s,d} + \frac{d\psi_{s,q}}{dt} \quad (2-36)$$

$$0 = R_r i_{r,d} + \frac{d\psi_{r,d}}{dt} \quad (2-37)$$

$$0 = R_r i_{r,q} + (\omega_k - \omega) \psi_{r,d} + \frac{d\psi_{r,q}}{dt} \quad (2-38)$$

$$\psi_{s,d} = L_s i_{s,d} + L_m i_{r,d} \quad (2-39)$$

$$\psi_{s,q} = L_s i_{s,q} + L_m i_{r,q} \quad (2-40)$$

$$\psi_{r,d} = L_r i_{r,d} + L_m i_{s,d} \quad (2-41)$$

$$0 = L_r i_{r,q} + L_m i_{s,q} \quad (2-42)$$

Uz ove jednadžbe značajna je i prethodno dana relacija za moment motora (2-27). Uvođenjem u istu raspis za magnetski tok statora u  $d$  i  $q$  osi, eliminiranjem struja rotora u  $d$  i  $q$  osi, dodatnim sređivanjem i uvođenjem supstitucije dobiva se konačni izraz:

$$m_e = \frac{3}{2} p (1 - \sigma) L_s i_{\mu} i_{s,q} \quad (2-43)$$

Iz prethodno navedene relacije je vidljivo da se upravljanje momentom asinkronog stroja postiže upravljanjem strujom magnetiziranja i strujom u  $q$  osi statora. Ukoliko se upravlja momentom kaskadno se upravlja i brzinom vrtnje. Budući da je struja magnetiziranja zaporavo rotorski tok sveden po jedinici induktiviteta, upotrebom izraza (2-41) i (2-37) te primjenom *Laplace*-ove transformacije dobiva se:

$$\frac{I_{\mu}}{I_{s,d}} = \frac{1}{1 + sT_r} \quad (2-44)$$

Iz prikazane prijenosne funkcije jasno je da je statorska struja u  $d$  osi istog iznosa kao i struja magnetiziranja te se upravljanjem iznosom struje statora u  $d$  osi kontrolira rotorski ulančani magnetski tok. Nadalje, kako bi se upravljalo strujom u  $d$  osi statora, unutar izraza (2-35) implementiraju se modifcirani izrazi za tokove statora odnosno jednakosti (2-39) i (2-40) u kojima se najprije eliminiraju struje rotora, gdje se nakon sređivanja dobiva:

$$\frac{I_{s,d}}{U_{s,d} - E_d} = \frac{\frac{1}{R_s}}{1 + s\sigma T_s} \quad (2-45)$$

pri čemu je  $E_d$  napon sprege i iznosi:

$$E_d = -\omega_k \sigma L_s i_{s,q} + (1 - \sigma) L_s \frac{i_{s,d} - i_{\mu}}{T_r} \quad (2-46)$$

Analogno izvodu prijenosne funkcije za regulaciju struje u  $d$  osi, u izraz (2-36) uvode se izrazi za tokove statora nakon čega se dobiva prijenosna funkcija za regulaciju struje statora u  $q$  osi:

$$\frac{I_{s,q}}{U_{s,q} - E_q} = \frac{\frac{1}{R_s}}{1 + s\sigma T_s} \quad (2-47)$$

gdje je  $E_q$  napon sprege u  $q$  osi i iznosi:

$$E_q = \omega_k (\sigma L_s i_{s,d} + (1 - \sigma) L_s i_{\mu}) \quad (2-48)$$

Navedene prijenosne funkcije zajedno sa izrazom:

$$\frac{\Omega}{M} = \frac{1}{J_s} \quad (2-49)$$

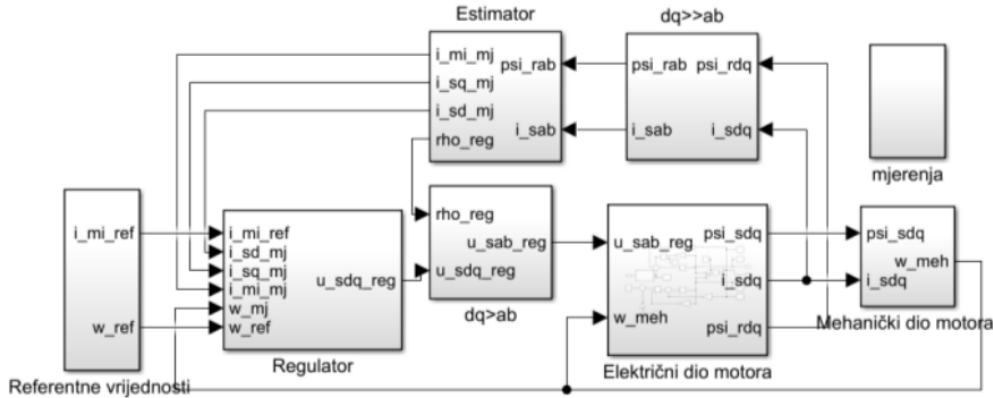
omogućuju izradu kaskadnog modela vektorskog upravljanja pri čemu bi struje, moment asinkronog stroja te njegova brzina slijedili referencu.

Kako bi se izbjeglo dovođenje sniženog napona na motor, zbog postojanja napona sprege tj. povratnog utjecaja unutar modela motora nastalog uslijed korištenja transformacije u dvo-osni sustav, potrebno je regulirati napon na ulazu stroja točnije kompenzirat napon sprege. Ukoliko su poznate vrijednosti napona  $E_d$  i  $E_q$ , tada se superpozicijom tih poznatih vrijednosti i napona  $V_d$  odnosno  $V_q$ , ulazu motora dovodi napon koji neće biti snižene vrijednosti. U tom slučaju izrazi (2-45) i (2-47) prelaze u:

$$\frac{I_{s,d}}{V_d} = \frac{\frac{1}{R_s}}{1 + s\sigma T_s} \quad (2-50)$$

$$\frac{I_{s,q}}{V_q} = \frac{\frac{1}{R_s}}{1 + s\sigma T_s} \quad (2-51)$$

Ovim rasčlanjivanjem se ostvaruje potpuno neovisno upravljanje strujom statora u  $d$  osi pomoću napona u  $d$  osi i strujom statora u  $q$  osi pomoću napona u  $q$  osi.



**SL. 2.1:** Simulink model za vektorsko upravljanje asinkronim motorom

Kako je prikazano na slici 2.1 model kojime se ostvaruje vektorsko upravljanje sastoji se od regulatora veličina, estimatora te samog asinkronog motora koji se upravlja. Budući da je za vektorsko upravljanje potrebno poznavati kut rotorski orijentiranog sustava odnosno kut  $\gamma_k$ , mjereni iznos struje magnetiziranja kao i iznose struja u  $d$  i  $q$  osi statora rotorski orijentiranog sustava, koristi se estimator. On na temelju rotorskog toka u  $\alpha\beta$  sustavu  $\psi_{r,\alpha\beta}$  određuje kut  $\gamma_k$  koji se koristi prilikom transformacije veličina u rotorski orijentiran  $dq$  sustav. Djeljenjem magnetskog toka rotora sa međuinduktivitetom, estimator daje izmjerenu odnosno procjenjenu vrijednost struje magnetiziranja. Sve izlazne veličine, tzv. mjerene veličine u  $dq$  rotorski orijentiranom sustavu predstavljaju ulaz u regulator. Regulator se sastoji od četiri PI regulatora sintetiziranih na temelju prethodno izvedenih prijenosnih funkcija: regulator struje u  $d$  osi statora, regulator struje u  $q$  statora, regulator struje magnetiziranja i regulator brzine vrtnje. Parametri regulatora struja određeni su prema tehničkom optimumu dok su parametri

regulatora brzine vrtnje dobiveni primjenom simetričnog optimuma. Polazište sinteze navedenih regulatora jest krug regulacije struje statora u  $d$  osi na koji se zatim nadograđuje zatvoreni regulacijski krug struje magnetiziranja što zajedno čini unutašnju petlju kaskadne regulacije. Razlika referentne vrijednosti struje statora u  $d$  osi koja je izlaz iz PI regulatora struje magnetiziranja i procjenjene vrijednosti struje statora u  $d$  osi, ulaz je u PI regulator struje statora  $d$  osi, koji na izlazu daje vrijednost napona  $V_d$ , a koji u zbroju sa naponom sprege  $E_d$  daje napon napajanja motora  $U_{s,d}$ . Na regulator struje magnetiziranja dolazi regulacijsko odstupanje referentne vrijednosti i procjenjene vrijednosti (one iz estimatora) struje magnetiziranja pri čemu je izlaz iz regulatora kako je prethodno navedeno, referentna vrijednost struje statora  $d$  osi. Na unutrašnji krug se nadovezuje vanjski krug regulacije brzine vrtnje. Na regulator brzine vrtnje dolazi regulacijsko odstupanje referentne vrijednosti brzine vrtnje filtrirane predfiltrom nadvišenja i procjenjene vrijednosti brzine vrtnje a izlaz je referenca momenta. Djeljenjem momenta sa konstantom  $K$  koja je prema izrazu (2-43) jednaka  $\frac{3}{2}p(1-\sigma)L_s$  i strujom magnetiziranja, dobiva se referentna vrijednost struje statora u  $q$  osi. Dovodjenjem opet regulacijskog odstupanja na PI regulator struje statora  $q$  osi dobiva se analogno regulatoru struje u  $d$  osi, napon  $V_q$  kojemu se pribraja napon sprege  $E_q$  i rezultiraju naponom napajanja  $U_{s,q}$ .

Kada se konkretno govori o parametrima navedenih regulatora, vremenske konstante regulatora struja u  $d$  i  $q$  osi su identične i odgovaraju:  $T_{ri}$  je prema (2-45) jednaka  $\sigma T_s$ , dok je  $T_i$  jednaka omjeru vremenske konstante zatvorenog regulacijskog kruga struja u  $d$  i  $q$  osi statora  $T_x$  i otpora statora  $R_s$ . Vremenska konstanta struje magnetiziranja  $T_{r\mu}$  jednaka je po tehničkom optimumu dominantnoj vremenskoj konstanti, a to je prema (2-44) konstanta  $T_r$  koja kazuje koliko struja magnetiziranja kasni za strujom  $i_{s,q}$ , dok je vremenska konstanta  $T_{i\mu} = 2k_s T_\Sigma = 2T_x$ . Kako je prethodno navedeno prema simetričnom optimumu dobivene su vremenske konstante regulatora brzine vrtnje i to tako da je  $T_{r\omega} = 4T_\Sigma$ , odnosno  $T_{r\omega} = 4T_x$ , dok je  $T_{i\omega} = 8k_s T_\Sigma^2 = 8\frac{1}{J}T_x^2$ .

Kako bi konstrukcija regulatora bila zaokružena priča nužno je osigurati napone sprege, a prema izrazima (2-46) i (2-48) potrebno je estimirati brzinu vrtnje. U izraz (2-38) pri čemu je vremenska derivacija toka u  $q$  osi zbog poravnjanja jednaka 0, uvrštava se najprije relacija za tok rotora u  $d$  osi, zatim izraz za struju rotora u  $q$  osi. Nakon množenja sa recipročnom vrijednosti tuje magnetiziranja kao i uvođenja supstitucije  $\alpha = \frac{R_r}{L_r}$ , odnosno  $\alpha$  je jednaka inverzu rotorske vremenske konstante, dobiva se izraz za brzinu vrtnje kao zbroj stvarne brzine vrtnje i brzine klizanja:

$$\omega_k = \omega_{el} + \frac{\alpha i_{s,q}}{i_\mu} \quad (2-52)$$

Izlaz iz estimatora prema prethodno navedenom, predstavljaju fizikalne veličine transformirane u  $dq$  sustav koji je rotoski orjentiran kako je s toga stanovišta uvjetovano vektorsko upravljanje i one kao takve predstavljaju ulaz u regulator koji unutar simulacije obnaša ulogu frekvencijskog pretvarača, dakle daje napon na ulaz motora. Kako su izrazi za model motora redom navedeni (2-18) - (2-27), izvedeni tako da odgovaraju proizvoljno orjentiranom sustavu, sve fizikalne veličine toga sustava moraju biti na ulazu u sam blok motora transformirane iz rotorski orjentiranog  $dq$  sustava u proizvoljno orjentirani  $dq$  sustav kako bi matematika bila odgovarajuća. Jednako vrijedi za sve blokove, dakle za isprvan rad cjelokupnog modela potrebno je prilagođavati fizikalne veličine onoj orjentaciji točnije setu jednadžbi prema kojoj odgovarajući dio sustava funkcionira. Budući da motor i regulator predstavljaju realni sustav oni moraju komunicirati na razini  $\alpha\beta$  sustava analogno stvarnom svijetu gdje frekvencijski pretvarač komunicira s motorom u  $abc$  odnosno  $\alpha\beta$  sustavu, zbog toga je posrednik pretvorbe iz jednog u drugi  $dq$  sustav upravo transformacija najprije u  $\alpha\beta$  sustav.



### 3. KALMANOV FILTAR

Filtar je nazvan po Rudolfu Emilu Kalmanu koji je 1960. godine objavio svoj slavni rad u kojem opisuje rekurzivno rješenje problema linearnog filtriranja diskretnih podataka [25]. Kalmanov filtar široko je korišten optimalni rekurzivni algoritam procjene koji ima ključnu ulogu u mnogim područjima primjene. Jedan aspekt *optimalnosti* Kalman filtra jest to što uključuje, odnosno uzima u obzir sve informacije koje su mu na raspolaganju. Obrađuje sva dostupna mjerenja, bez obzira na njihovu preciznost kako bi se procijenila trenutna vrijednost varijabli od interesa. Riječ *rekurzivno* znači da za razliku od određenih koncepata obrade podataka, Kalmanov filtar ne zahtijeva da se svi prethodni podatci čuvaju u pohrani i ponovno obrađuju svaki put kada se izvrši novo mjerenje. To je od vitalne važnosti za praktičnost implementacije filtra. Pojam *filtrar* odnosi se zapravo na obradu podataka. Unatoč tipičnoj konotaciji filtra kao *crne kutije* koja sadrži elemente električne mreže, činjenica je da je u većini praktičnih primjena filtar računalni program koji kao takav inherentno uključuje uzorke mjerenja diskretnog vremena, a ne kontinuirane vremenske ulaze [3].

Zbog svojih prethodno navedenih iznimnih karakteristika, od godine objave rada R.E.Kalmana, filtar nije izgubio na značaju nego su razvijene brojne modifikacije specijalizirane za točno određene problematike. U prvom redu su varijacije filtra za nelinearne sustave gdje se ističe primjena najčešće korištenog *Extended Kalman filtra* kod kojega su neizostavne linearizacija modela kao i izračun *Jacobian* matrice [7] [5], o čemu će se detaljno govoriti u nastavku rada. Kako se javio problem kompleksnosti implementacije i moguća pojava nestabilnosti filtriranja primjenom *Extended Kalman filtra*, razvijen je *Unscented Kalman filtar - UKF*. *UKF* je učinkovitiji, jednostavniji i lakši za implementaciju. Također se koristi za nelinearne sustave primjenjujući nelinearnu transformaciju i preslikavanje linearizacijom čime se u usporedbi s *EKF*-om dobivaju točniji rezultati. Algoritam *UKF*-a uz inicijalizaciju te diskretizaciju koja podrazumijeva predikciju i korekciju, uključuje i izračun sigma točaka. Više o ovoj vrsti Kalman filtra moguće je pronaći u literaturi: [26], [27]. Još jedan učestalo primjenjivan oblik *KF*-a jest *Ensemble Kalman filtar - EnKF*. Njegov razvoj potaknut je primjenama u oceanografiji, meteorologiji i drugim geoznanostima u kojima dimenzija varijabli stanja može biti milijunskog reda veličine. Kako bi se izbjegao teret računanja i pohrane matrica tog reda veličine ovaj filtar koristi *Monte Carlo* metode i kovarijancu uzorka, a objašnjenje ovih pojmova kao i šira slika principa rada samog *EnKF*-a nalazi se u: [28], [29].

Kalmanov filtar je prvobitno dizajniran za procjenu stanja sustava koja ne mogu biti direktno mjerena. Ova značajka je osobito važna za probleme procjene stanja kod kaveznog asinkronog motora jer fizikalne veličine rotora nisu izravno dostupne zbog čega nastupa primjena filtra u ovome radu. Sam postupak procjene varijabli stanja kao takav, dodatno komplicira činjenica da su odnosi između različitih varijabli stanja i izlaza poznati samo uz određeni stupanj nesigurnosti. Nadalje, problematika se nailazi i u tome što je svako mjerenje do određenog stupnja oštećeno šumom ali uz mjerni šum postoji i procesni šum koji uzrokuje to da proces ne završava onim stanjem koje je predviđeno na temelju matematičkog modela [30]. Također je zbog primjene regulatora u svrhu vektorskog upravljanja, prisutno i trajno regulacijsko odstupanje. Usprkos svemu navedenom, Kalmanov filtar predviđa buduće stanje sustava na temelju prošlih procjena, što se ostvaruje minimiziranjem razlike između procijenjene i izmjerene vrijednosti izlaza, tako da procijenjena vrijednost željenog unutarnjeg stanja sustava konvergira stvarnoj. Zbog toga se uvodi sustav povratne veze gdje se greška odnosno odstupanje vrijednosti procjene i mjerenja pokušava eliminirati upotrebom matrice pojačanja  $\mathbf{K}$  estimatora. [7], [30], [31]

### 3.1. Algoritam i izvod jednadžbi Kalman filtra

#### Matematički koncept rada estimatora

Za razumijevanje izraza kojima je opisan princip rada Kalman filtra kao optimalnog procjenitelja stanja, najprije se prolazi kroz matematički koncept estimatora općenito primjenjivanog za linearne kontinuirane sustave. Načelo estimacije se temelji na dva sustava jednadžbi od kojih jedne pripadaju procesu a druge estimatoru. Analogno tome u ovome radu konkretno, relacije koje se odnose na proces proizilaze iz matematičkog modela asinkronog motora, a jednakosti estimatora opisuju Kalman filter. U proračunu, varijable stanja to jest unutarnja stanja sustava koja se žele estimirati najprije se procjenjuju na temelju matematičkog modela, gdje su procijenjene vrijednosti označene s " ^ " [7]. Jednadžbe procesa i izlaza iz procesa zapisuju se u idućoj formi:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3-53)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3-54)$$

Navedeni izrazi predstavljaju model sustava u prostoru stanja ili dinamički linearni model (DLM) zapisan putem vektorskih diferencijalnih jednadžbi [10]. Kako je u uvodu ovog poglavlja rečeno, izvode se na osnovnu stujnog i naponskog modela asinkronog motora, odnosno modela punog reda sustava, objašnjenog ranije i danog izrazima (2-33) i (2-34). Prema čemu je  $\mathbf{A}$  matrica stanja reda  $4 \times 4$  i ovisi o brzini vrtnje rotora  $\omega_r$  koja je u slučaju linearnog Kalman filtra promatrana kao parametar:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1-\sigma}{\sigma}\alpha - \frac{1}{\sigma T_s}\right)\mathbf{I} & \frac{1-\sigma}{L_m\sigma}(\alpha\mathbf{I} - \omega_r\mathbf{J}_r) \\ \alpha L_m\mathbf{I} & -(\alpha\mathbf{I} - \omega_r\mathbf{J}_r) \end{bmatrix} \quad (3-55)$$

gdje je  $\sigma$  koeficijent rasipanja ranije opisan sa (2-30),  $\alpha$  odgovara inverzu rotorske vremenske konstante,  $T_s$  je statorska vremenska konstanta jednaka omjeru  $\frac{L_s}{R_s}$  i  $\mathbf{J}_r$  je rotacijska matrica. Sa  $\hat{\mathbf{x}}$  je definiran vektor varijabli stanja, odnosno struja statora i toka rotora, koji je dimenzija  $4 \times 1$  i odgovara:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_{s,\alpha} \\ i_{s,\beta} \\ \psi_{r,\alpha} \\ \psi_{r,\beta} \end{bmatrix} \quad (3-56)$$

Matrica  $\mathbf{B}$  je ulazna matrica jednaka:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sigma L_s} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3-57)$$

Vektor  $\mathbf{u}$  je vektor ulaza koji sadrži statorski napon:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{s,\alpha} \\ u_{s,\beta} \end{bmatrix} \quad (3-58)$$

U jednadžbi izlaza sa  $\mathbf{y}$  je označen vektor izlaza koji sadržava statorsku struju:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} i_{s,\alpha} \\ i_{s,\beta} \end{bmatrix} \quad (3-59)$$

Sa  $\mathbf{C}$  je definirana matrica izlaza i jednaka je:

$$\mathbf{C} = [\mathbf{I} \ \mathbf{0}] \quad (3-60)$$

U prethodnim matricnim zapisima  $\mathbf{I} = \mathbf{I}_{2 \times 2}$  je jedinična dijagonalna matrica drugog reda i  $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{2 \times 2}$  je nul matrica istog reda.

S praktičnog gledišta, primarni cilj analize koja uključuje model prostora stanja kako je prethodno definiran izrazima (3-53) i (3-54), jest formulirati procjenitelj odnosno estimator željenih varijabli stanja  $\mathbf{x}$ . U tu svrhu procjena varijabli stanja se dobiva posredstvom predikcijske procjene, dodavanjem istoj izraz korekcije, odnosno pogreške procjene  $\mathbf{e} = (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$  [7]. Prema tome jednadžba procjenitelja dana je sa:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{K}(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \quad (3-61)$$

gdje je  $\mathbf{K}$  matrica pojačanja procjenitelja koja minimizira pogrešku procjene za što je dokaz dan u nastavku rada.

### 3.1.1. Izvod opći jednadžbi linearnog diskretnog Kalman filtra

Vremenski diskretni sustav je onaj sustav kod kojega su ulazne i izlazne varijable kao i varijable stanja poznate samo u diskretnim trenutcima odnosno koracima označenim s  $k$ . [13] Stohastičkim sustavom smatra se sustav koji sadrži elemente slučajnosti. Ukoliko je sustav linearan, vremenski diskretan, stohastički, može se opisati sljedećom jednadžbom stanja:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (3-62)$$

i jednadžbom mjernog sustava:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (3-63)$$

gdje je  $\mathbf{x}_k$  vektor stanja u koraku  $k$ ,  $\mathbf{A}$  je matrica prijelaza iz stanja u koraku  $k - 1$  do stanja u koraku  $k$  dimenzija  $n \times m$ ,  $\mathbf{u}$  simbolizira vektor ulaza dok je  $\mathbf{B}$  matrica ulaza,  $\mathbf{w}_k$  je vektor šuma procesa. Vektor izlaza odnosno mjerenih vrijednosti dan je sa  $\mathbf{y}_k$  dimenzija  $l$ , matrica  $\mathbf{C}$  opisuje povezanost između stanja i izlaza i dimenzije je  $l \times m$ , a  $\mathbf{v}_k$  je mjerni šum. [30]

Vektori  $\mathbf{w}_k$  i  $\mathbf{v}_k$  su međusobno nezavisni bijeli šumovi, a pomoću teorije vjerojatnosti pretpostavlja se da se ponašaju prema određenoj funkciji gustoće vjerojatnosti koja je u slučaju Kalmanovog filtra *Gaussova* ili normalna funkcija razdiobe s nultim matematičkim očekivanjem. "Bjelina" podrazumijeva da vrijednosti šumova nisu u korelaciji. Jednostavnije rečeno, ako je poznata vrijednost šuma u određenom trenutku, to saznanje ne pomaže u predviđanju njegove vrijednosti u bilo kojem drugom trenutku. "Bjelina" također podrazumijeva i da šum ima jednaku snagu na svim frekvencijama. Budući da to implicira na šum beskonačne snage, bijeli šum nije u stvarnosti postojan. Prirodno se nameće pitanje zbog čega se onda uzima model bijelog šuma. Odgovor je u činjenici da bilo koji sustav ima određeni frekvencijski propusni pojas, to jest frekvencijski raspon na koji može odgovoriti. Tipično sustav pokreće širokopojasni šum koji je prisutan, odnosno ima jednaku snagu na čitavom frekvencijskom propusnom pojasu sustava. Unutar propusnog pojasa, fiktivni bijeli šum je identičan stvarnom širokopojasnom šumu sustava, a ispostavilo se da je matematika uključena u filter uvelike pojednostavljena zamjenom stvarnog širokopojasnog šuma s bijelim šumom koji su s točke gledišta sustava, identični. [3] Dok se "bjelina" odnosi na vremenske ili frekvencijske odnose šuma, *Gaussova* razdioba ima veze s amplitudom šuma. Gustoća vjerojatnosti šuma u bilo kojem trenutku poprima oblik normalne krivulje u obliku zvona. Ova primjena može se fizički opravdati činjenicom da šum procesa ili mjerenja obično uzrokuje nekoliko izvora. Kada se niz nezavisnih slučajnih varijabli zbroji rezultatni učinak se može precizno opisati *Gaussovom* gustoćom vjerojatnosti, bez obzira na oblik pojedinačnih gustoća [3]. Stoga se koristi model *Gaussovog* bijelog šuma i vrijedi izraz [7], [30], [31]:

$$\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}) \quad (3-64)$$

$$\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}) \quad (3-65)$$

gdje su  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  kovarijance procesnog odnosno mjernog šuma.

Na temelju stanja procesa u koraku  $k - 1$  izračunava se predikcijska procjena za korak  $k$ . Budući da je stanje u koraku  $k$  uvjetovano prošlim stanjem u koraku  $k - 1$ , predikcijska procjena predstavlja uvjetno očekivanje varijabli stanja u koraku  $k$  uvjetovano podacima iz prethodnog vremenskog koraka, bez uzimanja u obzir trenutno mjerenje u koraku  $k$  i označava se sa  $\mathbf{x}_k^{k-1} \in R^n$ . Na osnovu nje kao i poznatih rezultata mjerenja  $\mathbf{y}_k$  u koraku  $k$  izračunava se procjena stanja, dakle uvjetovana predikcijskom procjenom i uz uvjet da se realiziralo odgovarajuće mjerenje i označena je s  $\mathbf{x}_k^k \in R^n$ . [10] Cilj Kalman filtra jest odrediti najbolju procjenu stanja  $\mathbf{x}_k$ . [32]

Kako se kod procjena uvijek nailazi na pogreške, tako se greška predikcijske procjene - predikcijska pogreška  $\mathbf{e}_k^{k-1}$  i pogreška procjene stanja - rezidual  $\mathbf{e}_k^k$ ; iskazuju kao:

$$\mathbf{e}_k^{k-1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{k-1} \quad (3-66)$$

$$\mathbf{e}_k^k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^k \quad (3-67)$$

Pri tome se definiraju i kovarijance navedenih pogreški na temelju opće statističke definicije.

Dakle, ako se promatra vektor:

$$\mathbf{e} = [e_k^{k-1} \quad \dots \quad e_k^{k+1}]^T \quad (3-68)$$

gdje su elementi prethodnog vektora sa konačnom varijancom, tada je moguće matricu kovarijance definirati kao matricu  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P}_{ij} = \text{cov}(e_i, e_j) = E[(e_i - \mu_i)(e_j - \mu_j)] \quad (3-69)$$

gdje je  $\mu_i = E[e_i]$  očekivanje  $i$ -tog elementa vektora  $\mathbf{e}$ . U vektorskom obliku se to može prikazati izrazom:

$$\mathbf{P} = E[(\mathbf{e} - E[\mathbf{e}])(\mathbf{e} - E[\mathbf{e}])^T] = E[\mathbf{e}\mathbf{e}^T] - \mu\mu^T \quad (3-70)$$

Ako je  $E[\mathbf{e}] = 0$  u stacionarnom stanju, matrica kovarijance vektora  $\mathbf{e}$  definirana je kao:

$$\mathbf{P} = E[\mathbf{e}\mathbf{e}^T] \quad (3-71)$$

Prema tome su matrica kovarijance predikcijske pogreške i matrica kovarijance reziduala jednake:

$$\mathbf{P}_k^{k-1} = E[\mathbf{e}_k^{k-1}\mathbf{e}_k^{k-1T}] \quad (3-72)$$

$$\mathbf{P}_k^k = E[\mathbf{e}_k^k\mathbf{e}_k^{kT}] \quad (3-73)$$

Analogno prethodnim izrazima definiraju se i matrice kovarijanci šumova:

$$\mathbf{Q} = E[\mathbf{w}_k\mathbf{w}_k^T] \quad (3-74)$$

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^T] \quad (3-75)$$

Kako je prethodno navedeno, posredstvom predikcijske procjene i mjerenja u određenom trenutku dobiva se izraz kojim se opisuje procjena varijabli stanja. Skup slučajnih varijabli mjerenja do određenog trenutka za koje se želi procijeniti stanje, čini vektorski prostor na kojem je definiran skup vektora koji čini ortonomiranu bazu tog vektorskog prostora. Ortonomiranu bazu čine vektori koji su nekorelirani, a baza se može dobiti različitim tehnikama kao npr. *Gram - Smidthov*-im postupkom ortogonalizacije. Problem Kalman filtiranja svodi se na projiciranje vektora varijabli stanja u vektorski prostor varijabli mjerenja. Metodom najmanjih kvadrata

najbolja procjena vektora stanja korištenjem linearne kombinacije vektora iz vektorskog prostora mjerenja, odgovara njegovoj ortogonalnoj projekciji na vektorski prostor mjerenja što je ilustrativno, opširno prikazano u [33]. Ukoliko se uzmu u obzir spomenuta svojstva i principi ortogonalnosti, nekoreliranost vektora, detaljnim izvodom koji je dan u radu [32] dobiva se rekurzivna relacija za procjenu stanja kao linearna kombinacija predikcijske procjene i umnoška matrice Klaman pojačanja i inovacije:

$$\mathbf{x}_k^k = \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}^{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k(\mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}^{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k)) \quad (3-76)$$

gdje prva dva člana s desne strane jednakosti predstavljaju predikciju -  $\mathbf{x}_k^{k-1}$  kao rezultat procjene stanja prethodnog koraka  $k - 1$  i trenutnog ulaza  $\mathbf{u}_k$ . Drugi dio jednakosti predstavlja umnožak pojačanja  $\mathbf{K}_k$  i težinske razlike aktualnog mjerenja  $\mathbf{y}_k$  i izraza  $\mathbf{C}_k\mathbf{x}_k^{k-1}$  [32] [34].

Supstitucijom jednakosti (3-63) u (3-76) dobiva se:

$$\mathbf{x}_k^k = \mathbf{x}_k^{k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k - \mathbf{C}\mathbf{x}_k^{k-1}) \quad (3-77)$$

Uvrštavanjem prethodno dobivenog izraza (3-77) u relaciju za kovarijancu reziduala, izraz (3-73) rezultira sa:

$$\mathbf{P}_k^k = \mathbf{E}\left[\left((\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{C})(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{k-1}) - \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k\right)\left((\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{C})(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{k-1}) - \mathbf{K}_k\mathbf{v}_k\right)^T\right] \quad (3-78)$$

gdje je  $\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{k-1}$  predikcijska pogreška estimatora  $\mathbf{e}_k^{k-1}$ , dana sa (5-124) i nije u korelaciji sa šumom  $\mathbf{v}_k$  pa se zbog toga izraz (3-78) može raspisati kao:

$$\mathbf{P}_k^k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{C})\mathbf{E}\left[(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{k-1})(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{k-1})^T\right](\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{C})^T + \mathbf{K}_k\mathbf{E}[\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^T]\mathbf{K}_k^T \quad (3-79)$$

ako se sada bolje promotri, jasno je da izraz  $\left[(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{k-1})(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{k-1})^T\right]$  odgovara prethodno navedenom izrazu za kovarijancu pogreške predikcijske procijene (3-72), dok  $[\mathbf{v}_k\mathbf{v}_k^T]$  pripada kovarijanci mjernog šuma (3-75) te se odgovarajućom supstitucijom dolazi do:

$$\mathbf{P}_k^k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{C})\mathbf{P}_k^{k-1}(\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{C})^T + \mathbf{K}_k\mathbf{R}\mathbf{K}_k^T \quad (3-80)$$

raspisom prethodnog izraza dobiva se:

$$\mathbf{P}_k^k = \mathbf{P}_k^{k-1} - \mathbf{K}_k\mathbf{C}\mathbf{P}_k^{k-1} - \mathbf{P}_k^{k-1}\mathbf{C}^T\mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k(\mathbf{C}\mathbf{P}_k^{k-1}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})\mathbf{K}_k^T \quad (3-81)$$

Relacija (3-81) predstavlja formu dobro poznate *Riccatti* jednadžbe [31] [32]. Nazvane prema Jacopo Francesco Riccati-u od strane D'Alamberta 1763. godine, istoimene jednadžbe predstavljaju polaznu točku izvoda jednadžbi Kalman filtra [33].

### Pojačanje Kalman filtra minimizira kovarijancu greške - dokaz

Kalman filter vrši estimaciju metodom najmanjih kvadrata čime minimizira grešku procjene stanja. Prethodno navedena forma *Riccatti* jednadžbe predstavlja izraz za kovarijancu greške procjene stanja  $\mathbf{P}_k^k$ . Dijagonalni elementi matrice spomenute kovarijance sadrže srednju kvadratnu pogrešku [35]:

$$\mathbf{P}_k^k = \begin{bmatrix} \mathbf{E}[e_{k-1}e_{k-1}^T] & \mathbf{E}[e_k e_{k-1}^T] & \mathbf{E}[e_{k+1}e_{k-1}^T] \\ \mathbf{E}[e_{k-1}e_k^T] & \mathbf{E}[e_k e_k^T] & \mathbf{E}[e_{k+1}e_k^T] \\ \mathbf{E}[e_{k-1}e_{k+1}^T] & \mathbf{E}[e_k e_{k+1}^T] & \mathbf{E}[e_{k+1}e_{k+1}^T] \end{bmatrix} \quad (3-82)$$

Zbroj dijagonalnih elemenata matrice naziva se trag matrice. Shodno tome, u slučaju matrice kovarijance greške procjene stanja, odnosno matrice kovarijance reziduala, trag matrice je jednak sumi srednje kvadratne pogreške. Stoga se srednja kvadratna pogreška može minimizirati, minimiziranjem traga matrice [35]. Dakle relacija (3-81) jednaka je:

$$\mathbf{P}_k^k = \mathbf{P}_k^{k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C} \mathbf{P}_k^{k-1} - \mathbf{P}_k^{k-1} \mathbf{C}^T \mathbf{K}_k^T + \mathbf{K}_k (\mathbf{C} \mathbf{P}_k^{k-1} \mathbf{C}^T + \mathbf{R}) \mathbf{K}_k^T \quad (3-83)$$

Kako je trag neke matrice jednak tragu njezine transponirane matrice (3-81) prelazi u:

$$\text{tr}(\mathbf{P}_k^k) = \text{tr}(\mathbf{P}_k^{k-1}) - 2\text{tr}(\mathbf{K}_k \mathbf{C} \mathbf{P}_k^{k-1}) + \text{tr}(\mathbf{K}_k (\mathbf{C} \mathbf{P}_k^{k-1} \mathbf{C}^T + \mathbf{R}) \mathbf{K}_k^T) \quad (3-84)$$

Da bi se minimizirao navedeni trag matrice potrebno je najprije izraz promatrati kao funkciju od  $\mathbf{K}_k$ , po tome isti derivirati po Kalmanovom pojačanju  $\mathbf{K}_k$  i izjednačiti s nulom:

$$\frac{\text{dtr}(\mathbf{P}_k^k)}{\text{d}\mathbf{K}_k} = -2(\mathbf{C} \mathbf{P}_k^{k-1})^T + 2\mathbf{K}_k (\mathbf{C} \mathbf{P}_k^{k-1} \mathbf{C}^T + \mathbf{R}) = 0 \quad (3-85)$$

Izjednačavanje dobivenog s nulom rezultira sa:

$$(\mathbf{C} \mathbf{P}_k^{k-1})^T = \mathbf{K}_k (\mathbf{C} \mathbf{P}_k^{k-1} \mathbf{C}^T + \mathbf{R}) \quad (3-86)$$

Nakon izlučivanja konačno se dolazi do izraza za Kalmanovo pojačanje:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^{k-1} \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_k^{k-1} \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (3-87)$$

Dakle, na temelju prethodnog izvoda koji je proizašao od varijacije *Riccati* jednadžbe (3-81) kojom se opisuje kovarijanca greške procjene stanja, izvedeno je Kalmanovo pojačanje. Kalmanovo pojačanje za koje vrijedi izraz (3-87) je točka minimuma funkcije (3-84), odnosno pojačanje uistinu minimizira grešku procjene. [31], [32], [35]

Sada se uvrštavanjem dobivenog izraza za pojačanje (3-87) u (3-81) ostvaruje veza između kovarijance pogreške predikcijske procjene i kovarijance reziduala čime se dolazi do krajnjeg izraza za kovarijancu reziduala:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^k &= \mathbf{P}_k^{k-1} - \mathbf{P}_k^{k-1} \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_k^{k-1} \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{C} \mathbf{P}_k^{k-1} \\ \mathbf{P}_k^k &= \mathbf{P}_k^{k-1} - \mathbf{K}_k \mathbf{C} \mathbf{P}_k^{k-1} \\ \mathbf{P}_k^k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{C}) \mathbf{P}_k^{k-1} \end{aligned} \quad (3-88)$$

Pogreška predikcijske procjene jednaka je:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_k^{k-1} &= \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^{k-1} \\ \mathbf{e}_k^{k-1} &= (\mathbf{A} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_k) - \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{k-1} \\ \mathbf{e}_k^{k-1} &= \mathbf{A} \mathbf{e}_{k-1}^{k-1} + \mathbf{w}_k \end{aligned} \quad (3-89)$$

Primjenom navedenog u izraz (3-72) dolazi se do:

$$\mathbf{P}_k^{k-1} = \text{E}[\mathbf{e}_k^{k-1} \mathbf{e}_k^{k-1T}] = \text{E}[(\mathbf{A} \mathbf{e}_{k-1}^{k-1} + \mathbf{w}_k) (\mathbf{A} \mathbf{e}_{k-1}^{k-1} + \mathbf{w}_k)^T] \quad (3-90)$$

Sređivanjem prethodne relacije dobiva se konačni izraz za kovarijancu greške predikcijske procjene  $\mathbf{P}_k^{k-1}$  [32]:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k^{k-1} &= \text{E}[\mathbf{e}_k^{k-1} \mathbf{e}_k^{k-1T}] \\ \mathbf{P}_k^{k-1} &= \text{E}[(\mathbf{A} \mathbf{e}_{k-1}^{k-1}) (\mathbf{A} \mathbf{e}_{k-1}^{k-1})^T] + \text{E}[\mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T] \\ \mathbf{P}_k^{k-1} &= \mathbf{A} \mathbf{P}_{k-1}^{k-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \end{aligned} \quad (3-91)$$

## Algoritam izvođenja procjene

Algoritam Kalman filtra odvija se u dvije faze. Započinje tako što se najprije vrši preslikavanje stanja sustava iz koraka  $k - 1$  u naredni korak  $k$  za što su zadužene jednačbe vremenskog osvježavanja ili predikcije, a kao rezultat dobiva se predikcijska procjena stanja. Kovarijanca pogreške predikcijske procjene izračunava se prije nego što je dostupno novo mjerenje, a za izračun se koristi matematički model i matrica kovarijanca  $\mathbf{Q}$ . Upotrebom dobivenog mjerenja u koraku  $k$  računa se Kalmanovo pojačanje i vrši se korekcija predikcijske procjene, a rezultira procjenom stanja sustava koja će nakon vremenske projekcije postati predikcijska procjena za idući korak [30], [32], [34]. Dakle, algoritam je računski intenzivan i zapravo se može smatrati beskonačnom petljom u kojoj se konstantno smjenjuju dvije grupe jednačbi čiji su detaljni izvodi dani u prethodnom poglavlju.

Jednačbe predikcije:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k^{k-1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}^{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{P}_k^{k-1} &= \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}^{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}\end{aligned}\tag{3-92}$$

Jednačbe korekcije:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^{k-1}\mathbf{C}^T(\mathbf{C}\mathbf{P}_k^{k-1}\mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \\ \mathbf{x}_k^k &= \mathbf{x}_k^{k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\mathbf{x}_k^{k-1}) \\ \mathbf{P}_k^k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{C})\mathbf{P}_k^{k-1}\end{aligned}\tag{3-93}$$

Rekurzija Kalman filtra kao jedna od njegovih pozitivnih karakteristika uočava se upravo u ovim jednačbama. Drugim riječima, za procjenu trenutnog stanja sustava filtru su jedino potrebne izračunate procjena stanja i kovarijanca greške procjene stanja prethodnog vremenskog koraka kao i mjerenje trenutnog koraka za koji se stanje procjenjuje.

## 4. EXTENDED KALMAN FILTAR

Linearni sustavi su u praksi iznimno poželjni jer se njima lakše manipulira matematičkim alatima, a teorija linearnog sustava, odnosno difrencijalne jednadžbe uvelike je potpunija i praktičnija od nelinearne. Međutim, mnogi dinamički sustavi nisu apsolutno linearni. Model nelinearnog sustava iskazuje se na idući način [5]:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_k) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k\end{aligned}\tag{4-94}$$

gdje su kako je od prije poznato, vektori  $\mathbf{w}_k$  i  $\mathbf{v}_k$  procesni i mjerni šum s *Gauss*-ovom razdiobom koje ponovno karakterizira nulto matematičko očekivanje i matrice kovarijanci  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ . Funkcija  $f$  koristi se za predviđanje stanja na temelju prethodne procjene i trenutnog ulaza, dok je mjerenje dano nelinearnom funkcijom stanja  $h$ .

Kada postoje nelinearnosti tipični inženjerski pristup jest linearizacija modela oko neke nominalne točke. Rješenje problema procjene stanja ovakvih sustava pronalazi se u *Extended kalman filtru* koji je varijacija Kalman filtra primjenjivana za nelinearne sustave. *EKF* estimira stanje na osnovi lineariziranog modela, a glavna prednost *Extended kalman filtra* leži u njegovoj mogućnosti procjene i parametara i stanja [7]. Algoritam *EKF*-a premda se koristi za nelinearne sustave jednak je objašnjenom algoritmu Kalman filtra primjenjivanog za linearne sustave. Dakle, prilikom procjene stanja upotrebom *EKF*-a također se smjenjuju jednadžbe predikcije i korekcije čija je forma nešto drugačija budući da se temelje na lineariziranom modelu.

### 4.1. Primjena Extended Kalman filtra

Kako je navedeno u uvodu rada i u prethodnom odlomku, najistaknutiji benefit zbog kojeg se u radu primjenjuje *EKF* jest njegova mogućnost primjene za nelinearne sustave. Prvo-bitno korištenje *EKF*-a bilježi se u vezi sa projektom *Apollo* kada su Stanley Schmidt i njegov znanstveni tim pokušavajući implementirati Kalman filtar, naišli na poteškoće u suočavanju s nelinearnom prirodom modela. Rješenje koje su pri tome pronašli ležalo je u linearizaciji modela što je rezultiralo verzijom proširenog Kalman filtra. Da bi se odalo priznanje Schmidt-u za njegov rad, otkrivenje i primjenu filtra, *EKF* se ponekad naziva i Kalman - Schmidt-ov filtar [33]. Kao takav najčešće je korišten procjenitelj sustava i njegova primjena seže široko u različita područja. Od proračuna orbita, praćenja objekata, sustava navigacije, pozicioniranja GPS-a, fuzije podataka s različitih senzora, obrade digitalne slike i prepoznavanja uzoraka, segmentiranja, detekcije rubova i slično [36].

Jedan od primjera primjene *EKF*-a jest za praćenje vozila na temelju mjerenja vibracija površine ceste gdje eksperimentalna analiza prikazuje da je *EKF* izvediv i da je potreban njegov daljnji razvoj [37]. Poboljšani algoritam *EKF*-a u smislu performansi i bolje prilagodljivosti na nesigurnost šuma pokazan je u radu [38] gdje je *EKF* korišten za praćenje cestovnih vozila. Širina primjene *EKF*-a dokazuje se u radu [39] gdje se učinkovito koristi za procjenu orbite svemirske letjelice i kontrolu prema GPS mjerenjima. Navedeni rad dokazuje da *EKF* može obraditi nelinearne sustave kao i njegovu brzinu konvergencije za grešku koja je rezultat procjene. Također je zabilježena i primjena za procjenu dinamičkih stanja i parametara u stvarnom vremenu na temelju podataka danih u obliku fazora [40].

Što se tiče primjene *Extended Kalman filtra* koja je približnija tematici ovog rada, ističe se uglavnom primjena za procjenu parametara motora. Kao što je vrlo poznato, u pogonskom sustavu izmjenične struje, performanse upravljanja pa tako i izvedba upravljanja asinkronim motorom bez senzora, uvelike ovisi o tome koliko su točni raspoloživi parametri stroja na koje



nepovoljno utječu brojni čimbenici, npr. promjena temperature. Kako bi se smanjili utjecaji varijacija parametara, u radu [41] je predložena shema za *on-line* procjenu vremenske konstante rotora i induktiviteta magnetiziranja asinkronog motora na temelju suradnje algoritma BLFRS-a i proširenog Kalman filtra. *On-line* estimacija parametara asinkronog motora uz pomoć modificiranog modela prostora stanja također je predložena u radu [42] gdje je pokazana procjena induktiviteta magnetiziranja i otpora rotora na temelju *EKF*-a u emulatoru u stvarnom vremenu. Za analizu procesa algoritma u F28377D emulatoru modeliran je asinkroni stroj primjenom numeričkih rješenja. Također se nailazi i na primjenu *Extended Kalman filtra* za detekciju kvara i izolaciju međuzavoynih kratkih spojeva u namotima statora asinkronog motora gdje se koriste dvije varijante *EKF*-a koje procjenjuju tri različita moguća faktora greške [43].

U ovom radu se pretpostavlja da su parametri stroja poznati tako da se rad ne bavi problematikom identifikacije samih parametara modela asinkronog motora, nego procjenom stanja točnije varijabli stanja stroja. Brzina vrtnje rotora  $\omega_r$  kod izvoda jednadžbi linearnog diskretnog Kalman filtra smatrana je parametrom. Ukoliko se kutna brzina rotora ne promatra kao parametar nego kao varijabla stanja, uključivanje nepoznatih parametara u vektor stanja sustava čini problem procjene nelinearnim, stoga se tada govori o modelu motora koji postaje nelinearan i u tom slučaju u primjenu stupa *Extended Kalman filter* [7]. Naime u tome scenariju, varijable stanja koje je potrebno procijeniti i sačinjavaju vektor stanja motora su: struja statora, tok rotora i brzina vrtnje rotora. Upravo je ovo razlog zbog kojeg *Extended Kalman filter* sa svojim performansama zauzima mjesto u primjeni s ciljem točnosti procjene varijabli stanja motora. Realizacija dizajna estimatora temelji se na implementaciji naponskog modela motora prikazanog relacijom (2-31) i strujnog modela koji odgovara (2-33). Linearizacija sustava provodi se razvojem modela nelinearnog sustava u Taylorov red. Prva problematika primjene javlja se upravo kod tog koraka budući da linearizacija uvodi nove nesigurnosti između ostalog u šumovima jer nakon realizacije karakteristike šumova ne moraju odgovarati karakteristikama bijelog šuma. Problematika primjene nadalje leži u diskretizaciji kontinuiranog modela motora jer je potrebno računati *Jacobian* matrice u svakom novom koraku a sam izračun je vrlo složen o čemu detaljnije u nastavku rada.

## 4.2. Izbor i odgovarajući zapis modela motora spram vremenske do- mene

U svrhu korištenja *EKF*-a za procjenu varijabli stanja asinkronog motora, moguće je koristiti različite matematičke modele motora, odnosno modele koji su izvedeni u različitim referentnim okvirima. U poglavlju 2.3 rečeno je da je u svrhu dizajna procjenitelja sustava, matematički model motora izveden u statorski orijentiranom referentnom okviru. Međutim, moguće je koristiti i matematički model iskazan u rotorski orijentiranom sustavu gdje je brzina vrtnje sustava jednaka brzini vrtnje magnetskog toka rotora. Kada se koristi takav model, potrebno je transformirati napon statora koji je ulazna veličina, u rotorski orijentiran sustav kao i struju statora kao varijablu stanja koja se procjenjuje. Te transformacije uvode dodatne nelinearnosti, a one nisu potrebne u modelu uspostavljenom u stacionarnom referentnom okviru. Glavne prednosti upotrebe matematičkog modela u statorski orijentiranom, odnosno  $\alpha\beta$  sustavu su [7]:

- reducirano vrijeme izračuna
- mogućnost primjene manjih vremena uzorkovanja
- veća točnost

- stabilnije ponašanje sustava

Dakle, matematički model asinkronog motora koji se koristi za dizajn *Extended kalman filtra* kao procjenitelja je proširen s novom varijablom stanja tako da pored već poznate četiri varijable stanja i to struje statora u  $\alpha$  osi, struje statora u  $\beta$  osi, toka rotora u osi  $\alpha$  i toka rotora u osi  $\beta$  sada ima i petu varijablu stanja, odnosno brzinu vrtnje rotora  $\omega_r$ . Zbog toga relacije za proces dane sa (3-53) i (3-54) sadrže sljedeće modifikacije:

Vektor varijabli stanja  $\mathbf{x}$  je sada reda  $5 \times 1$  jednak:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_{s,\alpha} \\ i_{s,\beta} \\ \psi_{s,\alpha} \\ \psi_{s,\beta} \\ \omega_r \end{bmatrix} \quad (4-95)$$

Matrica stanja  $\mathbf{A}$  je nelinearna, reda veličine  $5 \times 5$  i sadrži brzinu vrtnje rotora:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1-\sigma}{\sigma}\alpha - \frac{1}{\sigma T_s} & 0 & \frac{1-\sigma}{L_m\sigma}\alpha & \frac{1-\sigma}{L_m\sigma}\omega_r & 0 \\ 0 & -\frac{1-\sigma}{\sigma}\alpha - \frac{1}{\sigma T_s} & -\frac{1-\sigma}{L_m\sigma}\omega_r & \frac{1-\sigma}{L_m\sigma}\alpha & 0 \\ \alpha L_m & 0 & -\alpha & -\omega_r & 0 \\ 0 & \alpha L_m & \omega_r & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-96)$$

gdje su parametri motora:  $R_s$  - otpor statora,  $L_s$  - statorski induktivitet,  $L_r$  - rotorski induktivitet,  $L_m$  - međuinduktivitet i  $\alpha = \frac{1}{T_r}$  - recipročna vrijednost rotorske vremenske konstante. Matrica ulaza  $\mathbf{B}$  jednaka je:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-97)$$

Dok vektor  $\mathbf{u}$  odgovara:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_{s,\alpha} \\ u_{s,\beta} \end{bmatrix} \quad (4-98)$$

Vektor izlaza  $\mathbf{y}$ :

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} i_{s,\alpha} \\ i_{s,\beta} \end{bmatrix} \quad (4-99)$$

A matrica  $\mathbf{C}$  zadovoljava:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-100)$$

Na temelju razmatranja prethodnih izraza, potrebno je uočiti da je uzeto da je vremenska derivacija brzine vrtnje rotora  $\omega_r$  zanemarena, dakle  $\frac{d\omega_r}{dt} = 0$ , što ukazuje na beskonačnu inerciju [7].

### 4.2.1. Diskretizacija modela motora

Izvedeni matematički model asinkronog motora je u kontinuiranom obliku, a kako je prikazano i Kalman filtar pa tako i *Extended Kalman filtar* se primjenjuje u diskretnom obliku.

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (4-101)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (4-102)$$

Prema tome je za implementaciju algoritma *EKF*-a potreban diskretni matematički model asinkronog motora. Primjenom *Eulerove* diskretizacije na strujni i naponski model motora dobivaju se diskretizirane matrice koje su neophodne za implementaciju filtra i računaju se na idući način:

$$\mathbf{A}_d = e^{AT} \approx \mathbf{I} + AT \quad (4-103)$$

$$\mathbf{B}_d = \int_0^T e^{A\xi} \mathbf{B} d\xi \approx \mathbf{B}T \quad (4-104)$$

a iznose:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1 - \left( \frac{1-\sigma}{\sigma} \alpha + \frac{1}{\sigma T_s} \right) T & 0 & \frac{1-\sigma}{L_m \sigma} \alpha T & \frac{1-\sigma}{L_m \sigma} \omega_r T & 0 \\ 0 & 1 - \left( \frac{1-\sigma}{\sigma} \alpha + \frac{1}{\sigma T_s} \right) T & -\frac{1-\sigma}{L_m \sigma} \omega_r T & \frac{1-\sigma}{L_m \sigma} \alpha T & 0 \\ \alpha L_m T & 0 & 1 - \alpha T & -\omega_r T & 0 \\ 0 & \alpha L_m T & \omega_r T & 1 - \alpha T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-105)$$

$$\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \frac{T}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{T}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-106)$$

gdje je sa  $T$  označeno vrijeme uzorkovanja. Za matricu  $\mathbf{C}_d$  vrijedi  $\mathbf{C}_d = \mathbf{C}$ . Diskretni vektor varijabli stanja  $\mathbf{x}_k$  jednak je:

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} i_{s,\alpha_k} \\ i_{s,\beta_k} \\ \psi_{s,\alpha_k} \\ \psi_{s,\beta_k} \\ \omega_{r_k} \end{bmatrix} \quad (4-107)$$

A vektor izlaza:

$$\mathbf{y}_k = \begin{bmatrix} i_{s,\alpha_k} \\ i_{s,\beta_k} \end{bmatrix} \quad (4-108)$$

Problem diskretizacije jest u tome što pogreška diskretizacije koja nastaje linearnom aproksimacijom beskonačno malog pomaka u vremenu pomoću konačnog vremenskog koraka iznosa  $T$  uzrokuje probleme sa numeričkom stabilnosti [13], o čemu će se više govoriti u nastavku rada prilikom analize rezultata.

### 4.2.2. Linearizacija sustava

Kako je proširenje vektora varijabli stanja rezultiralo nelinearnim modelom (4-94), isti je potrebno linearizirati. Linearizacija se obavlja razvojem nelinearnog modela motora parcijalnim derivacijama u Taylorov red oko prethodne estimirane vrijednosti. Linearizacija oko estimacije

iz prethodnog koraka se vrši kako bi se izbjegao problem kod linearizacije oko nominalne vrijednosti stanja jer se u tom slučaju razlika stvarne vrijednosti s vremenom počinje dosta udaljavati od nominalne vrijednosti pa i u razvoju u Taylorov red članovi višeg reda imaju veći značaj što nije u cilju [32]. Razvojem u Taylorov red se dobivaju gradijente matrice odnosno matrice *Jacobiana* [7]. Tako izraz za izračun matrice kovarijance pogreške predikcijske procjene (3-91) prelazi u:

$$\mathbf{P}_k^{k-1} = \mathbf{F}_k^{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^{k-1} \mathbf{F}_k^{k-1T} + \mathbf{Q} \quad (4-109)$$

gdje je:

$$\mathbf{F}_k^{k-1} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{A}_d \mathbf{x} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}) \quad (4-110)$$

što je jednako matrici reda  $5 \times 5$  koja sadrži 17 konstantnih i 8 vremenski promjenjivih elemenata koji su funkcije brzine vrtnje rotora i toka rotora koji se mijenjaju u svakom koraku.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 - \left( \frac{1-\sigma}{\sigma} \alpha + \frac{1}{\sigma T_s} \right) T & 0 & \frac{1-\sigma}{L_m \sigma} \alpha T & \frac{1-\sigma}{L_m \sigma} \omega_r T & \frac{1-\sigma}{L_m \sigma} \psi_{r,\beta} T \\ 0 & 1 - \left( \frac{1-\sigma}{\sigma} \alpha + \frac{1}{\sigma T_s} \right) T & -\frac{1-\sigma}{L_m \sigma} \omega_r T & \frac{1-\sigma}{L_m \sigma} \alpha T & -\frac{1-\sigma}{L_m \sigma} \psi_{r,\alpha} T \\ \alpha L_m T & 0 & 1 - \alpha T & -\omega_r T & -\psi_{r,\beta} T \\ 0 & \alpha L_m T & \omega_r T & 1 - \alpha T & \psi_{r,\alpha} T \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-111)$$

Druga *Jacobian* matrica nastala linearizacijom se koristi u izračunu Kalman pojačanja i iznosi:

$$\mathbf{H}_k^k = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{C}_d \mathbf{x}) \quad (4-112)$$

pri čemu je ona jednaka matrici  $\mathbf{C}_d$ :

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-113)$$

Tako da izraz Kalman pojačanja kod *Extended Kalman filtra* odgovara:

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^{k-1} \mathbf{H}_k^{kT} \left( \mathbf{H}_k^k \mathbf{P}_k^{k-1} \mathbf{H}_k^{kT} + \mathbf{R} \right)^{-1} \quad (4-114)$$

### 4.3. Algoritma EKF-a

Postupak izvođenja algoritma *Extended Kalman filtra* kako je već naglašeno je u potpunosti jednak algoritmu izvođenja linearnog diskretnog oblika Kalman filtra objašnjenog u poglavlju (3.1.1) s izuzetkom potrebe računanja diskretnih matrica i matrica *Jacobiana* u svakoj iteraciji. Jednadžbe predikcije *EKF*-a dane su:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k^{k-1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_{k-1}^{k-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{P}_k^{k-1} &= \mathbf{F}_k^{k-1} \mathbf{P}_{k-1}^{k-1} \mathbf{F}_k^{k-1T} + \mathbf{Q}\end{aligned}\quad (4-115)$$

Jednadžbe korekcije *EKF*-a:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^{k-1} \mathbf{H}_k^{kT} \left( \mathbf{H}_k^k \mathbf{P}_k^{k-1} \mathbf{H}_k^{kT} + \mathbf{R} \right)^{-1} \\ \mathbf{x}_k^k &= \mathbf{x}_k^{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \mathbf{x}_k^{k-1}) \\ \mathbf{P}_k^k &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k^k) \mathbf{P}_k^{k-1}\end{aligned}\quad (4-116)$$

#### 4.3.1. Inicijalizacija parametara i matrica kovarijanci

Kalman filtriranje zahtijeva potpunu informaciju o parametrima dinamičkog i statističkog modela motora, a kako bi se postigla optimalna izvedba, informacije koje se predaju filtru moraju biti precizne. Međutim, u brojnim primjenama parametri su ili nepoznati ili djelomično poznati, a rezultirajuće netočnosti mogu ozbiljno pogoršati rad filtra ili uzrokovati trajno narušenu konvergenciju i stabilnost. Prema tome, točnost algoritma izvođenja *Extended Kalman filtra* između ostalog značajno ovisi o parametrima korištenog matematičkog modela motora. Nazivni podatci s natpisne pločice asinkronog motora na temelju kojega je načinjen simulacijski model u radu su:

$P_n$	4	kW
$U_n$	380/660	V
$I_n$	8.7/5	A
$\cos\phi_n$	0.82	
$n_n$	1420	rpm
f	50	Hz

**Tab. 4.1:** Nazivni podatci asinkronog motora

Pri simulaciji su također korišteni i sljedeći parametri motora:

$R_s$	1.3	Ohm
$R_r$	1.04	Ohm
$X_{ls}$	1.913	Ohm
$X_{lr}$	1.913	Ohm
$X_m$	48.35	Ohm
$J$	0.13	$\text{kgm}^2$

**Tab. 4.2:** *Parametri modela motora*

Kritični dio dizajna algoritma *EKF*-a je upotreba točnih početni vrijednosti matrica kovarijanci koje se dobivaju razmatranjem stohastički svojstava pripadajućih šumova koja obično nisu poznata [7]. Matrica kovarijance šuma procesa  $\mathbf{Q}$  je reda veličine  $5 \times 5$  dok je matrica kovarijance mjernog šuma  $\mathbf{R}$  reda veličine  $2 \times 2$ . Dakle, potrebno je poznavati 29 elemenata. Međutim, uz pretpostavku da šumovi nisu u korelaciji, obje matrice se mogu uzeti dijagonalnim. Tada je potrebno poznavati samo 5 elemenata za matricu  $\mathbf{Q}$ , a uz to su prva dva elementa na glavnoj dijagonali jednaka  $q_{11} = q_{22}$ , druga dva su jednaka  $q_{33} = q_{44}$  i vrijedi  $\mathbf{Q} = \text{diag}(q_{11}, q_{11}, q_{33}, q_{33}, q_{55})$ , dakle potrebno je poznavati 3 elementa. Slično je i za matricu  $\mathbf{R}$  gdje su elementi na glavnoj dijagonali jednaki  $\mathbf{R} = \text{diag}(r, r)$ .

Najprije se zadaju početne vrijednosti vektora stanja  $\mathbf{x}$ , matrica kovarijanci  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  kao i početna vrijednost matrice kovarijance pogreške procjene  $\mathbf{P}_0$ . Pri čemu je uzeto da je početna vrijednost matrice  $\mathbf{P}_0$  jednaka nul matrici reda  $5 \times 5$ .

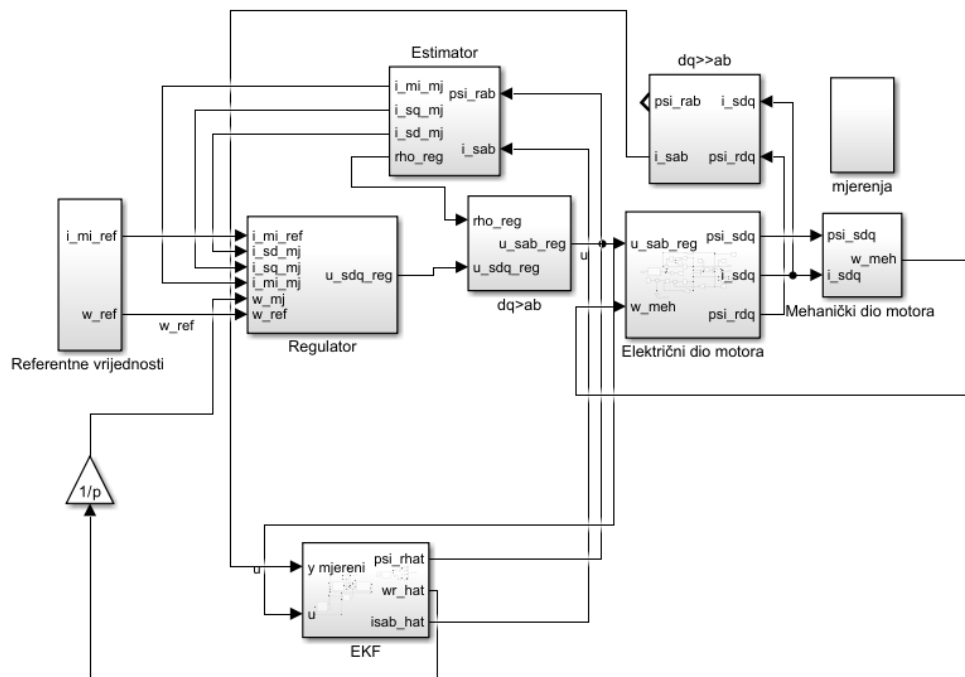
Ugađanje *EKF*-a predstavlja iterativni proces modifikacije parametara matrica kovarijanci kako bi se dobila najbolja procjena stanja [7]. Promjena matrica kovarijanci utječe na ponašanje filtra i u tranzijentnom i u stabilnom režimu rada. Povećanje iznosa parametara matrice  $\mathbf{Q}$  pojačava utjecaj šuma na proces ili rezultira većom nesigurnosti u korištenom modelu asinkronog motora. Elementi matrice pojačanja  $\mathbf{K}$  će posljedično biti veći u iznosu i stoga će mjerenja biti jače ponderirana, a filter će brže pratiti tranzijentnu pojavu. Ako se poveća kovarijanca  $\mathbf{R}$  to odgovara činjenici da su mjerenja struja podložna jačem šumu, elementi matrice pojačanja  $\mathbf{K}$  će biti manjih vrijednosti što će rezultirati sporijom dinamikom prijelazne pojave. Uopćeno, ako je  $\mathbf{R}$  većih vrijednosti  $\mathbf{K}$  je manji i filter je sporiji, ukoliko je  $\mathbf{Q}$  veći tada je  $\mathbf{K}$  također veći i filter je brži. Međutim, ako je  $\mathbf{Q}$  prevelik ili je  $\mathbf{R}$  premali mogu se pojaviti nestabilnosti odziva [7]. Na temelju inženjerskog iskustva u korak sa svime navedenim odabrani su parametri matrica  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  i to tako da su one jednake:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2518 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2518 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 171.16 \end{bmatrix} \quad (4-117)$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 75.2927 & 0 \\ 0 & 75.2927 \end{bmatrix} \quad (4-118)$$

### 4.3.2. Implementacija simulacijskog modela

Da bi se realizirao zadatak rada model asinkronog motora kao i model *Extended Kalman filtra* implementirani su unutar Simulink-a, Matlab programskog paketa. Dakle, korišten je vektorski reguliran asinkroni motor sa gore navedenim pripadajućim parametrima kojem je paralelno implementiran *EKF*. Modelu *Extended Kalman filtra* odnosno mjerenim veličinama to jest, struji statora dodan je i šum unutar Simulink-a što je realizirano upotrebom bloka *Random number* koji na izlazu generira normalno (*Gauss*) distribuiran slučajni signal s proizvoljno izabranom varijancom u iznosu 0.001. Tako da simulacijski model u konačnici izgleda ovako (slika (4.2)); s naglaskom da su se odvijale minimalne modifikacije u smislu postizanja željenog odziva u dvije varijante i to za slučaj idealne povratne veze i za slučaj kada je u povratnoj vezi *EKF*.



SL. 4.2: Simulacijski model

## 5. ANALIZA SIMULACIJSKIH REZULTATA

### 5.1. Stabilnost sustava

Prilikom modeliranja dinamičkih sustava vrlo je važno da se rješenje ili odziv, adekvatno ponaša u smislu stabilnosti, jer bi u suprotnom modelirani sustav bio podložan oštećenju ili bi dugoročno rezultirao raspadom sustava pa bi takav model bio beskoristan. Pojam stabilnosti vezan uz stacionarno stanje sustava, posebice važan za primijenjenu matematiku gdje se ističe inženjerstvo, a naročito modeliranje dinamičkih sustava uveo je Aleksandar Mihajlović Ljapunov [13].

Stacionarna točka sustava je točka u kojoj se sustav ustaljuje ukoliko nema prisutnosti poremećaja na sustav. Kod autonomnog sustava kojeg karakterizira odsustvo ulazne veličine, stacionarna točka je jednaka nuli i kako nema dotoka energije u sustav on će se prema tome nastojati vratiti u početno stanje. Kod neautonomnih sustava, koji bilježe prisustvo ulazne veličine, stacionarna točka ovisi o reakciji odziva na ulaznu veličinu. Za sustav se kaže da je stabilan ukoliko teži ravnotežnom stanju to jest, stacionarnom stanju kako vrijeme teži u beskonačno. Odnosno, to je onaj sustav koji postiže i zadržava stacionarnu točku usprkos djelovanju raznovrsnih vanjskih poremećaja [13]. Svi linearni sustavi koji su stabilni eksponencijalno konvergiraju u stacionarnu točku.

Prema Ljapunov-u stacionarna točka  $\mathbf{x}_s$  nekog sustava je stabilna ako za svaki  $\epsilon > 0$  postoji  $\delta(t_0, \epsilon) > 0$  takav da vrijedi:

$$\|\mathbf{x}_0(t_0) - \mathbf{x}_s\| < \delta(t_0, \epsilon) \implies \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_0 \quad (5-119)$$

prostije rečeno, stacionarno stanje sustava je stabilno u Ljapunov-ljevu smislu ukoliko svako rješenje koje počinje blizu stacionarne točke, ostane u blizini iste [44].

Sustav je asimptotski stabilan ukoliko stacionarna točka zadovoljava ranije izneseno i ako vrijedi:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_s \quad (5-120)$$

Prethodne definicije odnose se na lokalna svojstva stabilnosti autonomnih sustava. Sustav je globalno asimptotski stabilan ako je asimptotski stabilan za bilo koji početni uvjet.

Neautonomni sustav prema Ljapunov-ljevoj direktnoj metodi stabilnosti je asimptotski stabilan ako postoji neka skalarna, proizvoljna funkcija varijable stanja  $V(\mathbf{x}, t)$  koja je pozitivna za svaki  $\mathbf{x} \neq 0$  i ako je vremenska derivacija te funkcije  $\frac{dV}{dt}$  negativno definitna za svaki  $\mathbf{x}$ . Ako se pokaže da je  $\frac{d^2V}{dt^2} = 0$  onda je sustav eksponencijalno stabilan [13].

Ukoliko se koristi Ljapunov-ljeva funkcija dana u obliku kvadratne forme:

$$V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x} \quad (5-121)$$

gdje je  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  simetrična matrica. Vremenska derivacija Ljapunov-ljeve funkcije jednaka je:

$$\frac{dV}{dt} = -\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad (5-122)$$

gdje je  $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}$  pozitivno definitna simetrična matrica, a izraz se naziva još i Ljapunov-ljeva matrična jednadžba. Rješenje jednadžbe po matrici  $\mathbf{P}$  postoji ako matricu  $\mathbf{A}$  karakteriziraju svojstvene vrijednosti koje imaju negativne realne djelove [13]. Konačno, sustav je stabilan ukoliko postoji simetrična pozitivno definitna matrica  $\mathbf{P}$  takva da je  $\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}$ . Pripadni dokaz ove tvrdnje može se pronaći u [45].



## 5.2. Stabilnost i konvergencija EKF-a

Stabilnost kao i konvergencija *Extended Kalman filtra* proučavano je područje dugi niz godina. U radu [46] je pokazano da kontinuirani *EKF* konvergira lokalno ali pod prilično zahtjevnim i jakim uvjetima. Kao nastavak na taj rad u [47] dano je proširenje na veću klasu filtara, a uvjeti potrebni za konvergenciju znatno su opušteniji u usporedbi s onim prvobitno iznesenim jer se pokazalo da su neki od njih suvišni za brojne varijacije filtra. U radu [48] razmatran je diskretni procjenitelj, a rezultati su nadograđeni u [49] gdje je uključen i stohastički slučaj filtra. Konvergencija *EKF*-a proširena je u [50] gdje je prikazano da se minimalnim modifikacijama algoritma filtra uspješno može poboljšati stopa konvergencije. Opći slučaj s nelinearnim modelom sustava analiziran je u istom radu koji sadrži dokaz da je *EKF* stohastički stabilan pod zadanim uvjetima. U radu [51] obrađeni su konvergencija i stabilnost filtra za model asinkronog motora šestog reda upravljano bez senzora. Pokazano je da se polazeći od diskretnog modela uvjeti osmotrivosti dobivaju na izravan način, ekstrahiranjem samo prva  $3 \times 3$  minora iz nelinearne matrice osmotrivosti i pri konstantnoj i pri promjenjivoj brzini. Kombinirajući izneseno u navedenim radovima mogu se predstaviti potrebni uvjeti za postizanje stabilnosti i konvergencije *Extended Kalman filtra*.

Kako bi uvjeti bili razumljivi potrebno je najprije izvesti nekoliko izraza iz kojih isti i proizilaze. Polazno od jednakosti za procjenu stanja kod *EKF*-a:

$$\mathbf{x}_k^k = \mathbf{x}_k^{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k^{k-1})) \quad (5-123)$$

i izraza za grešku predikcijske procjene i rezidual:

$$\mathbf{e}_k^{k-1} = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{k-1} \quad (5-124)$$

$$\mathbf{e}_k^k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^k \quad (5-125)$$

oduzimanjem obje strane jednakosti (5-123) od  $\mathbf{x}_k$  dobiva se:

$$\mathbf{e}_k^k = \mathbf{e}_k^{k-1} - \mathbf{K}_k (\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k^{k-1}) + \mathbf{v}_k) \quad (5-126)$$

Što se može proširiti kao:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_k^{k-1}) = \mathbf{H}_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{k-1}) + \phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k^{k-1}) \quad (5-127)$$

Modifikacijom (5-126) i primjenom razvoja u Taylorov red dobiva se:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_k^k) = \mathbf{F}_k (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^k) + \theta(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k^k) \quad (5-128)$$

gdje su  $\phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k^{k-1})$  i  $\theta(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k^k)$  preostali članovi u trenutku  $k - 1$ , odnosno nelinearne funkcije, a  $\mathbf{H}_k$  i  $\mathbf{F}_k$  su prethodno definirane *Jacobian* matrice.

### Uvjeti stabilnosti i konvergencije

Da bi se ostvarila stabilnost *EKF*-a, polazna točka je iznesena Lyapunov-ljeva metoda stabilnost, a na osnovi nje i prethodnih izraza se dokazuje da je dinamika pogreške procjenitelja ili eksponencijalno stabilna ili ograničena pri čemu sam rezultat analize stabilnosti uključuje i ostvarenje konvergencije *Extended Kalman filtra*. Unutar [51] i [52] se mogu pronaći opsežno objašnjeni poučci, dokazi i međukoraci koji dovode do sljedećih uvjeta stabilnosti:

- Pretpostavlja se da postoje realni brojevi  $\underline{q}$ ,  $\bar{q}$ ,  $\underline{r}$ ,  $\bar{r}$  veći od nule za koje su matrice kovarijanci šumova  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  ograničene tako da vrijedi:

$$\underline{q}\mathbf{I} \leq \mathbf{Q} \leq \bar{q}\mathbf{I} \quad (5-129)$$

$$\underline{r}\mathbf{I} \leq \mathbf{R} \leq \bar{r}\mathbf{I} \quad (5-130)$$

gdje su sa  $\underline{q}$  i  $\underline{r}$  označene minimalne singularne vrijednosti pripadajućih kovarijanci, dok su sa  $\bar{q}$  i  $\bar{r}$  označene maksimalne singularne vrijednosti.

- Pretpostavlja se da postoje pozitivni, realni brojevi  $\bar{f}$ ,  $\bar{h}$ ,  $\underline{p}_1$ ,  $\bar{p}_1$ ,  $\underline{q}_1$  i  $\bar{q}_1$  za koje su matrica kovarijance reziduala  $\mathbf{P}_k^k$  i matrica kovarijance pogreške predikcijske procjene  $\mathbf{P}_k^{k-1}$  ograničene kao i norme *Jacobian* matrica  $\mathbf{F}_k$  i  $\mathbf{H}_k$  tako da vrijedi:

$$\underline{p}_1\mathbf{I} \leq \mathbf{P}_k^k \leq \bar{p}_1\mathbf{I} \quad (5-131)$$

$$\underline{q}_1\mathbf{I} \leq \mathbf{P}_k^{k-1} \leq \bar{q}_1\mathbf{I} \quad (5-132)$$

$$\|\mathbf{F}_k\| \leq \bar{f} \quad (5-133)$$

$$\|\mathbf{H}_k\| \leq \bar{h} \quad (5-134)$$

- Pretpostavlja se da je *Jacobian* matrica  $\mathbf{F}_k$  nesingularna za svaki  $k \geq 0$ , odnosno postoji matrica  $\mathbf{L}$  jednakih dimenzija matrici  $\mathbf{F}_k$  takva da je ispunjeno  $\mathbf{F}_k\mathbf{L} = \mathbf{L}\mathbf{F}_k = \mathbf{I}$  gdje je  $\mathbf{I}$  jedinična matrica dok je onda  $\mathbf{L}$  inverz navedene *Jacobian* matrice.
- Pretpostavlja se da postoji  $\bar{\epsilon}$  koji predstavlja aritmetičku sredinu kvadrata čiji je izraz izveden u [52], takav da je norma pogreške procjene stanja to jest, norma reziduala ograničena njime i vrijedi:

$$\|\mathbf{e}_k^k\| \leq \bar{\epsilon} \quad (5-135)$$

- Pretpostavlja se da postoje realni pozitivni brojevi  $\varphi$ ,  $\vartheta$ ,  $\epsilon_1$  gdje:

$$\|\phi(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k^{k-1})\| \leq \|\varphi(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{k-1})\|^2 \quad (5-136)$$

$$\|\theta(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_k^k)\| \leq \|\vartheta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^k)\|^2 \quad (5-137)$$

vrijedi za  $\|\varphi(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{k-1})\| \leq \epsilon_1$  i  $\|\vartheta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^k)\| \leq \epsilon_1$

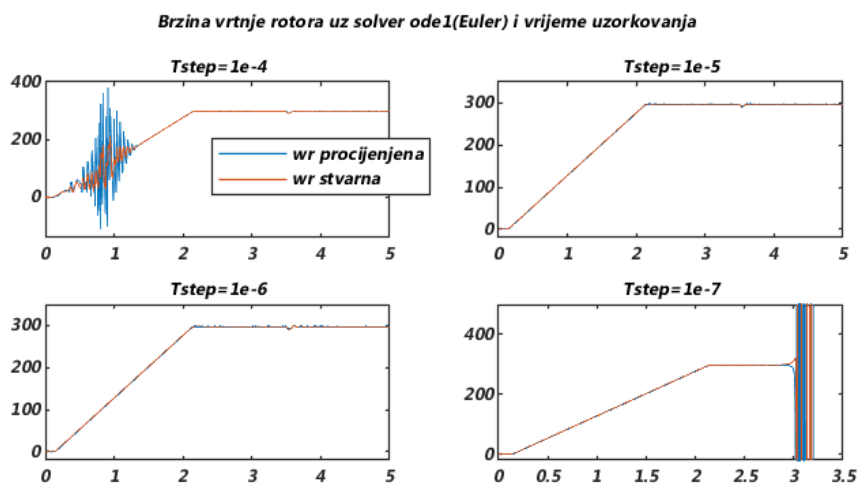
Ako su sve navedene pretpostavke ostvarene onda postoji  $\epsilon \geq 0$  takav da je pogreška procjene stanja *Extended Kalman filtra*:

1. **lokalno eksponencijalno stabilna** ako početna pogreška zadovoljava  $\|\mathbf{e}_0^0\| \leq \epsilon$  i uz uvjet da su  $\underline{\omega} = \underline{v} = 0$ .
2. **ograničena** s  $\|\mathbf{e}_k^k\|^2 \leq \frac{p_2}{p_1}(1 + \xi)^k \|\mathbf{e}_{0,0}\|^2 - \frac{p_2}{\xi}\rho(\bar{\omega}, \bar{v}, \epsilon)$ , ako početna pogreška procjene zadovoljava  $\|\mathbf{e}_0^0\| \leq \epsilon$  i ako su  $\underline{\omega}$  i  $\underline{v}$  zadovoljavajuće mali. Ovdje je  $\xi \in (-1, 0)$  konstanta a  $\rho(\bar{\omega}, \bar{v}, \epsilon) \geq 0 \forall k \geq 0$  je funkcija definirana u [52].

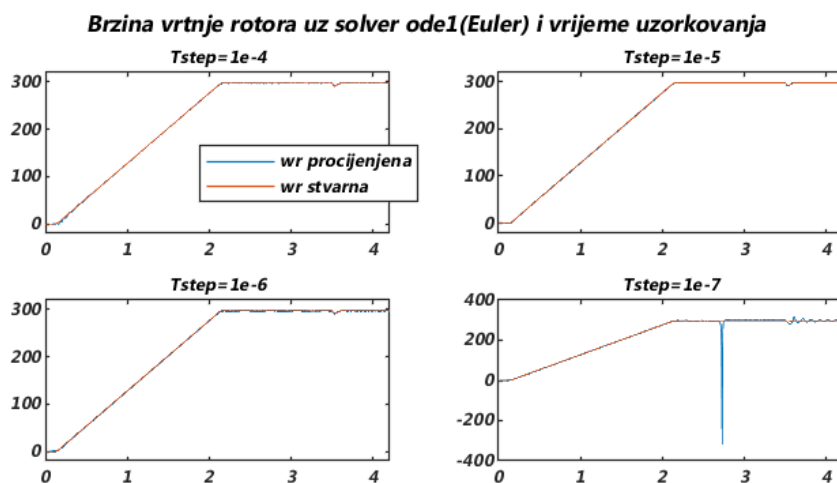
Konvergencija i stabilnost ključna su svojstva kod primjene *EKF*-a koji je sredstvo procjene varijabli stanja asinkronog motora jer se ostvarenjem istih postižu adekvatni odzivi, a posljedično se stiže do dvostrukog cilja. Prvo, dobivaju se filtrirane komponente struje statora što je naročito bitno za upravljanje asinkronim motorom budući da, kako je od prije poznato i obrazloženo u prethodnim odlomcima rada, struja statora diktira magnetiziranje stroja i regulira moment. Drugo, uspješno se procjenjuju komponente toka i brzine vrtnje rotora što je ključno za implementaciju zakona upravljanja povratnom spregom bez senzora.

## Prikaz dobivenih odziva

Na temelju modela prikazanog slikom 4.2 generirani su odzivi triju željenih procijenjenih varijabli i to: brzine vrtnje rotora  $\omega_r$ , struje statora u  $m$  i  $t$  osi i magnetskog toka rotora u  $m$  osi za dva slučaja: kada je *Extended Kalman filter* u povratnoj vezi i kada je povratna veza idealna. Također su za rješavanje modela primjenjivana tri različita *solver*-a iz Simulink-a i to redom *ode1-Euler*, *ode4-Runge-Kutta* i *ode5-Dormand-Prince* o kojima će biti više rečeno u nastavku rada i četiri različita vremena uzorkovanja i to:  $T = 10^{-4}$ ,  $T = 10^{-5}$ ,  $T = 10^{-6}$  i  $T = 10^{-7}$  s ciljem analize njihovog utjecaja na stabilnost i konvergenciju pojedinih odziva. Kao rezultat primjene *ode1-Euler solver*-a za rješavanje modela dobiveni su idući odzivi:



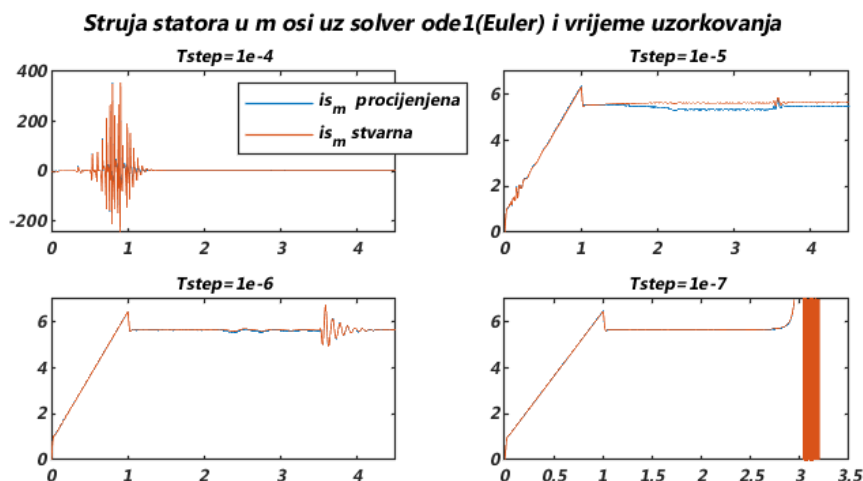
**SL. 5.3:** Prikaz procijenjene i stvarne brzine vrtnje rotora sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver *ode1(Euler)*



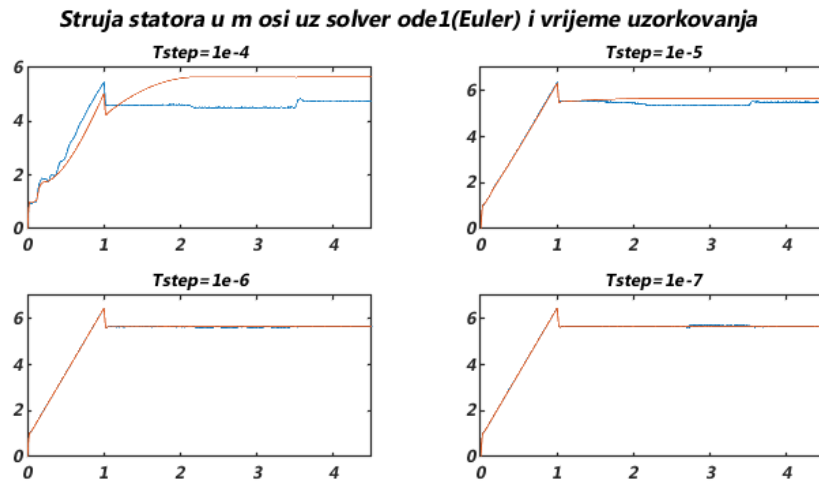
**SL. 5.4:** Prikaz procijenjene i stvarne brzine vrtnje rotora sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver *ode1(Euler)*

Na prethodnim slikama 5.3 i 5.4 prikazane su procijenjene i stvarne vrijednosti brzine vrtnje rotora  $\omega_r$  generirane unutar Matlab Simulink-a, pri čemu je os ordinata svakog pojedinog prikaza jednaka brzini u ( $s^{-1}$ ), dok os apscisa odgovara vremenu u (s), odnosno proizvoljno

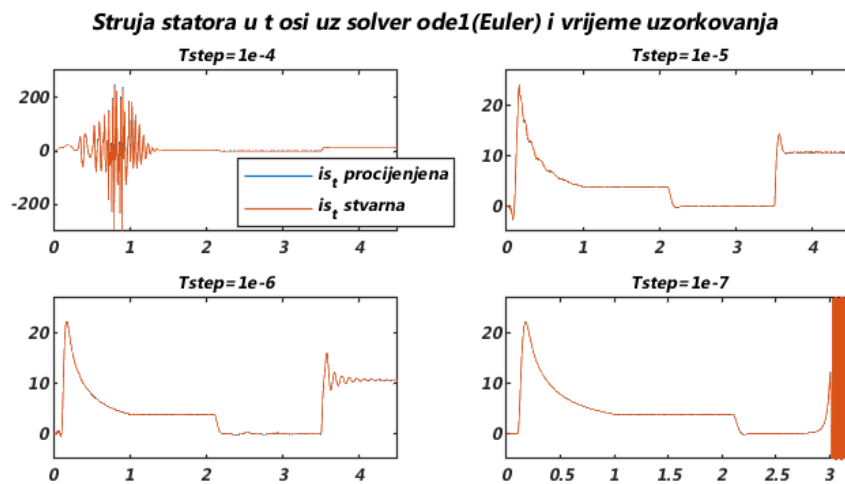
odabranom vremenskom rasponu trajanja simulacije. Slika 5.3 prikazuje brzinu vrtnje rotora za četiri različita vremena uzorkovanja i jedan isti *solver* sa *Extended Kalman filtrom* u povratnoj vezi pri čemu je primjetno da *EKF* zadovoljavajuće radi. Kako je uočljivo na slici za slučaj vremena uzorkovanja  $T = 10^{-4}$ , signal brzine vrtnje rotora prilikom zaleta koje traje do druge sekunde, ima problem s postizanjem konvergencije, a koji je uspješno svladan za naredna tri smanjenja vremena uzorkovanja. U trenutku 3.5s brzina vrtnje rotora bilježi blagi propad u sva tri vremena uzorkovanja ( $T = 10^{-4}, T = 10^{-5}, T = 10^{-6}$ ), budući da je u tom trenutku stroj opterećen momentom tereta koji je jednak nazivnom momentu i iznosi  $M_t = 26.889(Nm)$ . U istom trenutku se za  $T = 10^{-6}$  javlja problem sa stabilnošću koji daljnjim smanjenjem vremena uzorkovanja na  $T = 10^{-7}$  uzrokuje ispad sustava iz stabilnosti. Slikom 5.4 prikazane su brzine vrtnje rotora za sva četiri vremena uzorkovanja i *ode1 solver* ali sa idealnom povratnom vezom, gdje za razliku od slučaja kada je *EKF* u povratnoj vezi sustav puno brže konvergira, što je naročito uočljivo ako se usporede prikazi za vrijeme uzorkovanja  $T = 10^{-4}$ . Dakle, za slučaj obje povrtne veze, pri primjeni *ode1-Euler solver*-a za rješavanje modela, odziv brzine vrtnje je točniji kako se smanjuje vrijeme uzorkovanja (*vidi razliku između  $T = 10^{-4}$  i  $T = 10^{-5}$* ), no daljnje smanjenje dovodi u pitanje stabilnost sustava te u konačnici kako je i prikazano rezultira nestabilnošću. Naredni predmet analize je procjena struje statora koja je dobivena u idealnom *mt* sustavu.



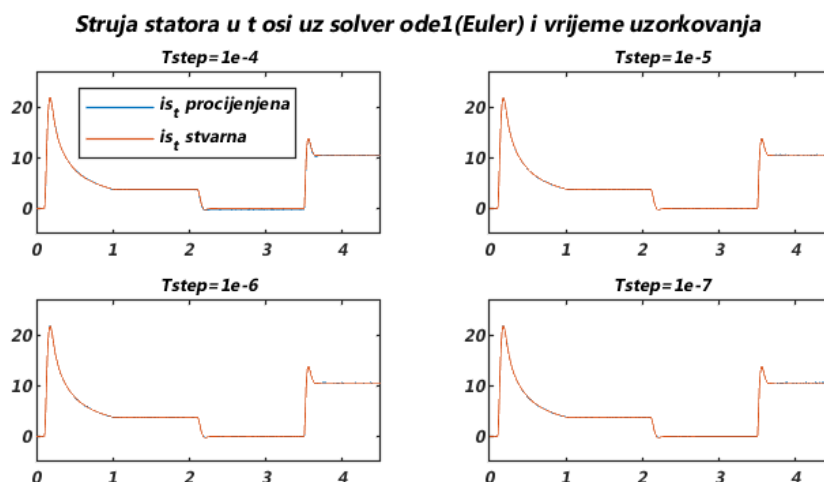
**SL. 5.5:** Prikaz procijenjene i stvarne struje statora u m osi sa *EKF*-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver *ode1(Euler)*



**SL. 5.6:** Prikaz procijenjene i stvarne struje statora u m osi sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode1(Euler)



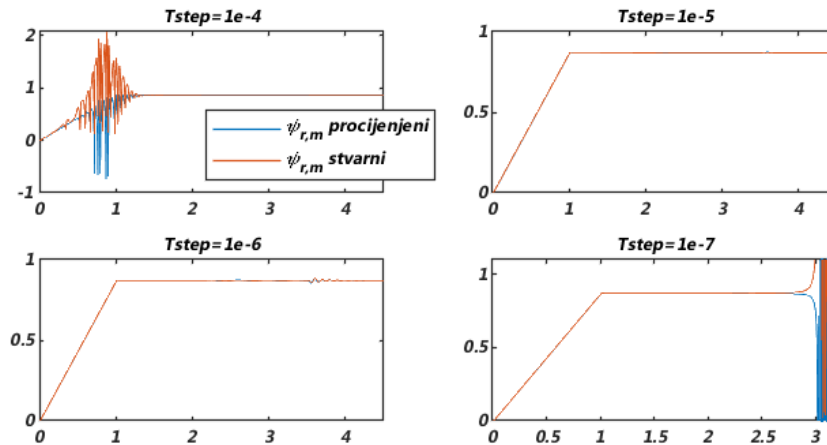
**SL. 5.7:** Prikaz procijenjene i stvarne struje statora u t osi sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode1(Euler)



**SL. 5.8:** Prikaz procijenjene i stvarne struje statora u  $t$  osi sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver  $ode1(Euler)$

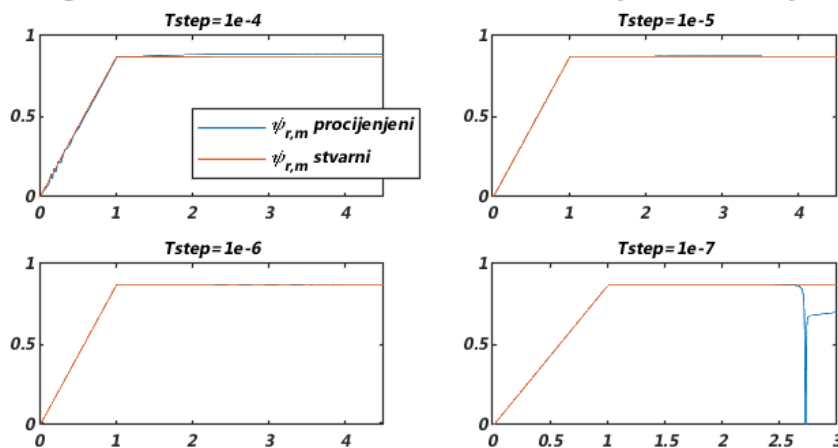
Slike 5.5 i 5.6 prikazuju struju statora u  $m$  osi, dok slike 5.7 i 5.8 prikazuju struju statora u  $t$  osi, kao rezultat primjene istog  $ode1$  solver-a za četiri vremena uzorkovanja i ekvivalentno brzini vrtnje, za slučaj obje vrste povratne veze. Na slikama 5.5, 5.6, 5.7 i 5.8 osi apscisa predstavljaju vrijeme u (s), a os ordinata jednaka je struji u (A). Analogno prethodno objašnjenom slijedu događaja u trenutcima koji su kod brzine vrtnje navedeni kao ključni i na signalima struje su uočljive promjene. Struja statora u  $m$  osi koja odgovara zapravo struji magnetiziranja, bilježi porast vrijednosti u periodu do 1s u skladu sa postavljenim magnetiziranjem po rampi unutar Simulink modela. Kada brzina vrtnje motora dosegne nazivnu, struja se ustabilji na određenu vrijednost, a zatim u trenutku opterećenja očekivano bilježi blagi porast vrijednosti u  $m$  osi kako bi se nadoknadio propad u brzini vrtnje. Što se tiče struje statora u  $t$  osi, ona kako je prikazano na početku simulacije bilježi nagli porast u skladu sa početkom rada stroja, nakon čega se smanjuje ka određenoj vrijednosti u periodu kada motor ubrzava po rampi. Nakon što stroj ubrza, struja statora u  $t$  osi kako je proporcionalna momentu, prima vrijednost nula jer je moment motora jednak vremenskoj derivaciji brzine vrtnje, a derivacija konstantne vrijednosti iznosi 0. Iznos struje u  $t$  osi prilikom opterećenja očekivano bilježi porast, nakon čega zadržava vrijednost koja je proporcionalna utjecaju momenta tereta. Prilikom ubrzavanja stroja javlja se problem s postizanjem konvergencije za vrijeme uzorkovanja  $T = 10^{-4}$  i struju statora u obje osi kod slučaja sa *Extended Kalman filtrom* u povratnoj vezi. Smanjenjem vremena uzorkovanja na  $T = 10^{-5}$  postiže se bolja situacija ali se bilježi i blago odstupanje procijenjene i stvarne struje statora u  $m$  osi. Za vrijeme uzorkovanja  $T = 10^{-6}$  kao što je uočljivo i na signalima brzine vrtnje, u sustavu se javlja problem sa stabilnošću koji ponovno nakon trenutka terećenja stroja dolazi do značajnog izražaja. Za vrijeme uzorkovanja  $T = 10^{-7}$  u trenutku kada sustav postaje nestabilan vrijednost struje statora poprma enormne iznose.

**Magnetski tok rotora u m osi uz solver ode1(Euler) i vrijeme uzorkovanja**



**SL. 5.9:** Prikaz procijenjene i stvarne vrijednosti magnetskog toka rotora u m osi sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode1(Euler)

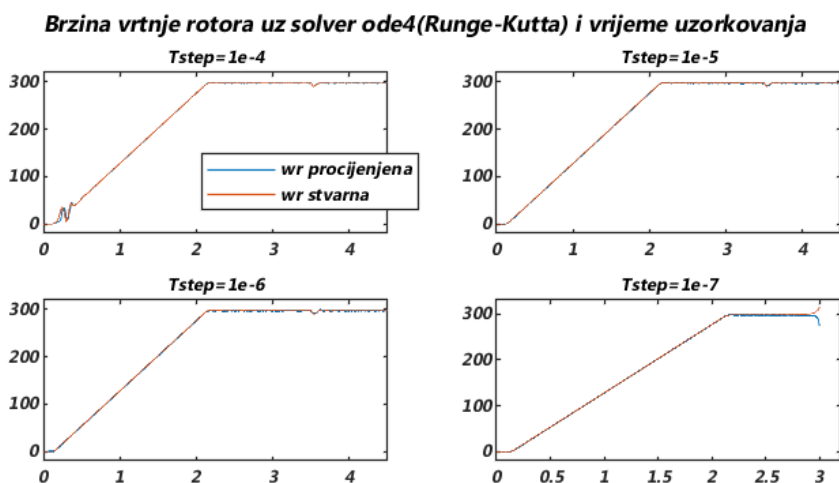
**Magnetski tok rotora u m osi uz solver ode1(Euler) i vrijeme uzorkovanja**



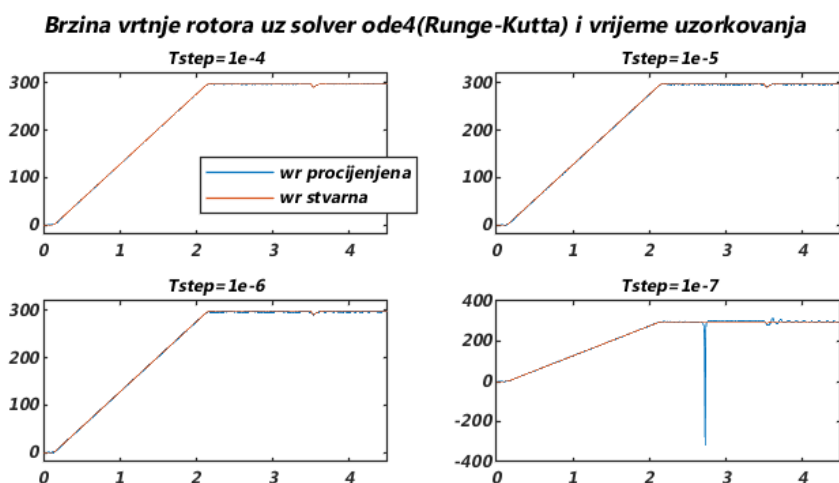
**SL. 5.10:** Prikaz procijenjene i stvarne vrijednosti magnetskog toka rotora u m osi sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode1(Euler)

Slike 5.9 i 5.10 prikazuju procijenjene vrijednosti magnetskog toka rotora pri čemu os ordinata odgovara upravo iznosu magnetskog toka rotora u (Wb), a os apscisa je vrijeme trajanja simulacije u (s). I za magnetski tok rotora promotrena su oba slučaja povratne veze kao i sva četiri vremena uzorkovanja i sada već očekivano se ponovno bilježi problem konvergencije *ode1 solver*-a za vrijeme uzorkovanja  $T = 10^{-4}$ . Smanjenjem vremena uzorkovanja na  $T = 10^{-5}$  postiže se potpuna konvergencija i stabilnost signala magnetskog toka rotora u obje povratne veze koja je djelomično narušena vremenom uzorkovanja  $T = 10^{-6}$  za slučaj *Extended Kalman filtra*, a u potpunosti vremenom  $T = 10^{-7}$ .

Kao rezultat djelovanja *ode4-Runge-Kutta solver*-a dobiveni su odzivi prikazani narednim slikama:

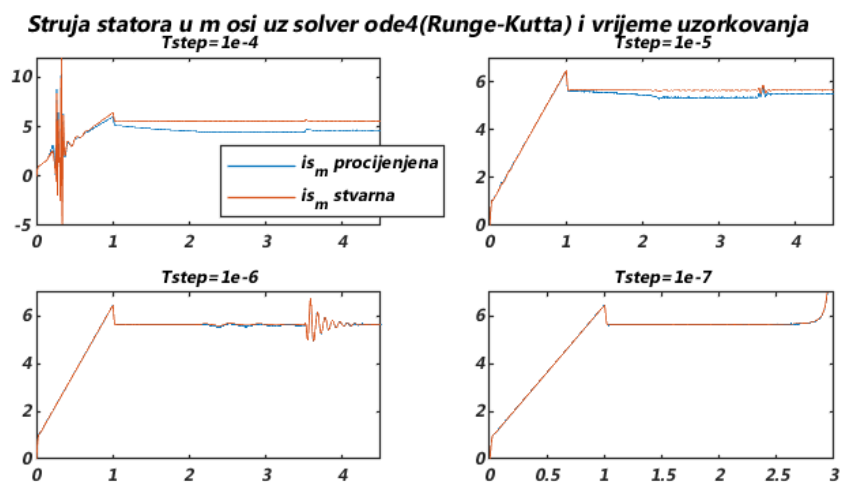


**SL. 5.11:** *Prikaz procijenjene i stvarne brzine vrtnje rotora sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver *ode4*(Runge-Kutta)*

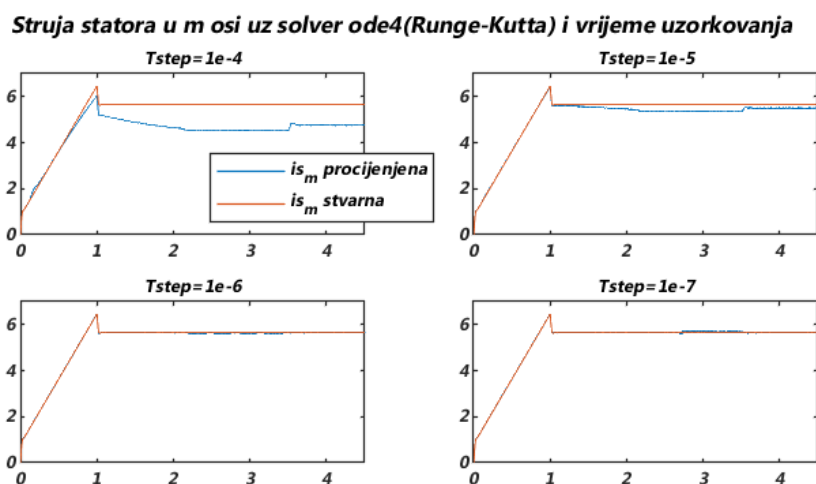


**SL. 5.12:** *Prikaz procijenjene i stvarne brzine vrtnje rotora sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver *ode4*(Runge-Kutta)*



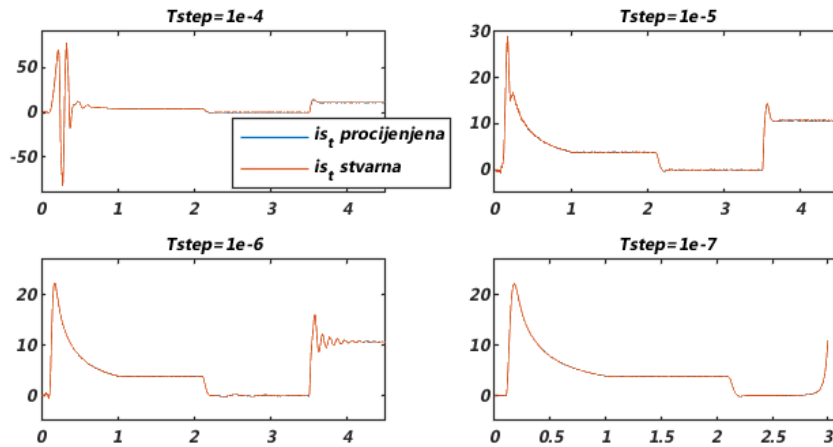


**SL. 5.13:** *Prikaz procijenjene i stvarne struje statora u m osi sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode<sub>4</sub>(Runge-Kutta)*



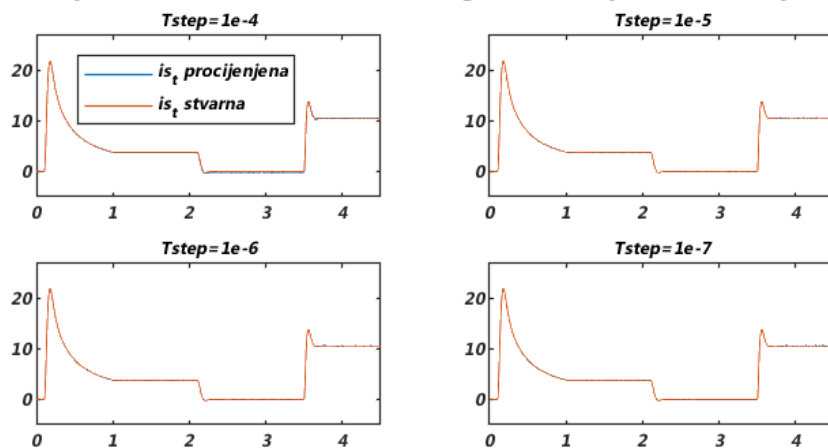
**SL. 5.14:** *Prikaz procijenjene i stvarne struje statora u m osi sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode<sub>4</sub>(Runge-Kutta)*

**Struja statora u t osi uz solver ode4(Runge-Kutta) i vrijeme uzorkovanja**



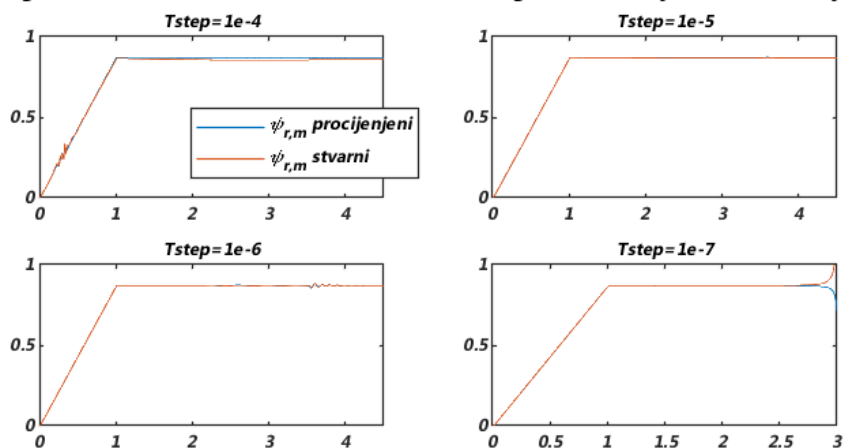
**SL. 5.15:** Prikaz procijenjene i stvarne struje statora u t osi sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode4(Runge-Kutta)

**Struja statora u t osi uz solver ode4(Runge-Kutta) i vrijeme uzorkovanja**



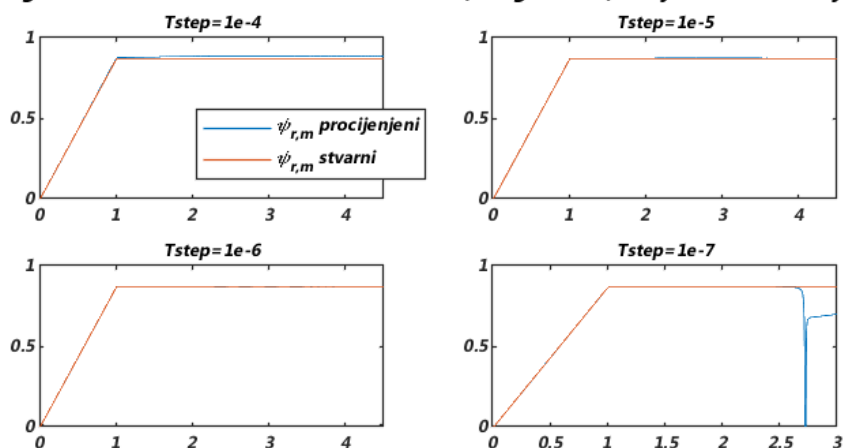
**SL. 5.16:** Prikaz procijenjene i stvarne struje statora u t osi sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode4(Runge-Kutta)

**Magnetski tok rotora u m osi uz solver ode4(Runge-Kutta) i vrijeme uzorkovanja**



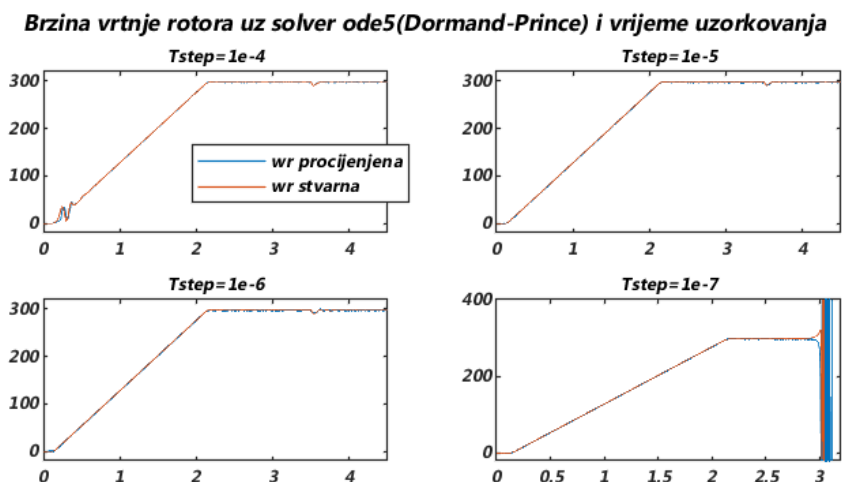
**SL. 5.17:** Prikaz procijenjene i stvarne vrijednosti magnetskog toka rotora u m osi sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode4(Runge-Kutta)

**Magnetski tok rotora u m osi uz solver ode4(Runge-Kutta) i vrijeme uzorkovanja**

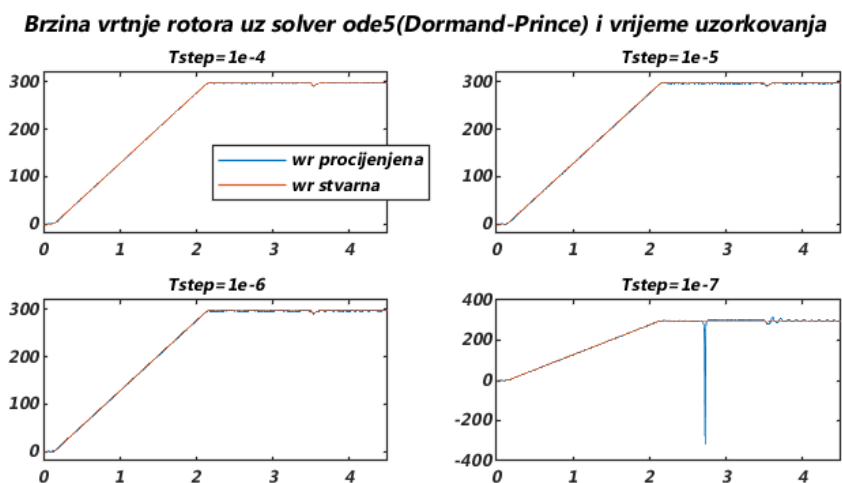


**SL. 5.18:** Prikaz procijenjene i stvarne vrijednosti magnetskog toka rotora u m osi sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode4(Runge-Kutta)

A kao rezultat primjene *ode5-Dormand-Prince* solver-a za rješavanje modela, dobivene su idući prikazi varijabli od interesa:

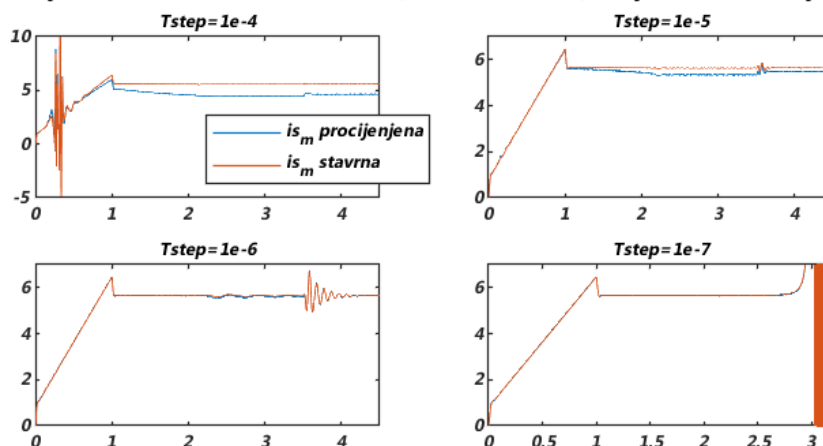


**SL. 5.19:** *Prikaz procijenjene i stvarne brzine vrtnje rotora sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver *ode5(Dormand-Prince)**



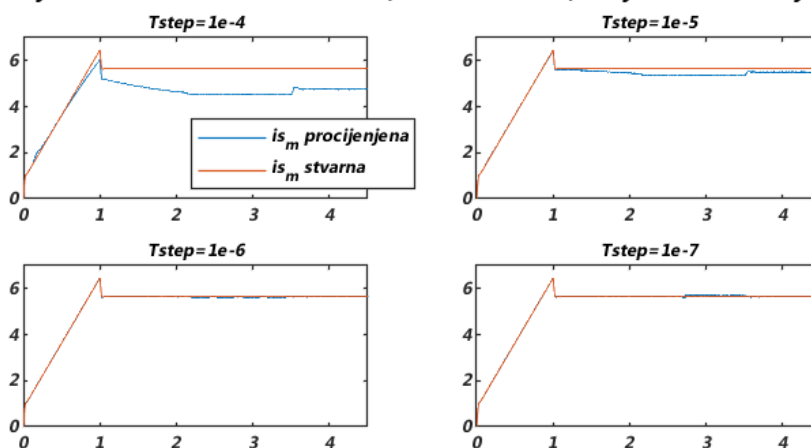
**SL. 5.20:** *Prikaz procijenjene i stvarne brzine vrtnje rotora sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver *ode5(Dormand-Prince)**

**Struja statora u m osi uz solver ode5(Dormand-Prince) i vrijeme uzorkovanja**



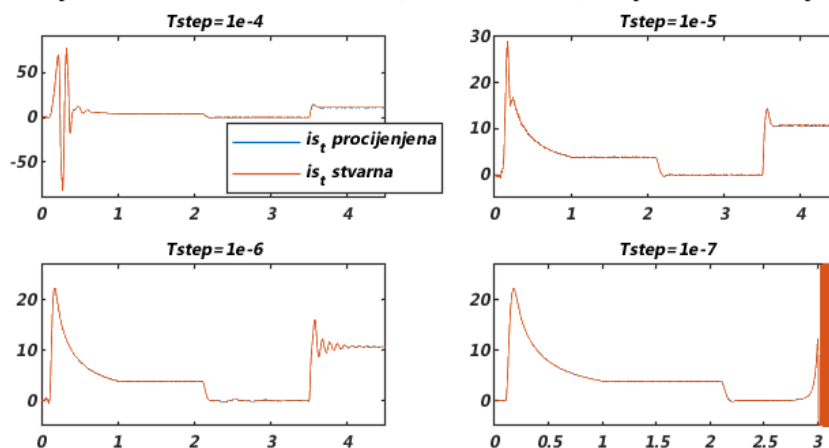
**SL. 5.21:** Prikaz procijenjene i stvarne struje statora u m osi sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode5(Dormand-Prince)

**Struja statora u m osi uz solver ode5(Dormand-Prince) i vrijeme uzorkovanja**



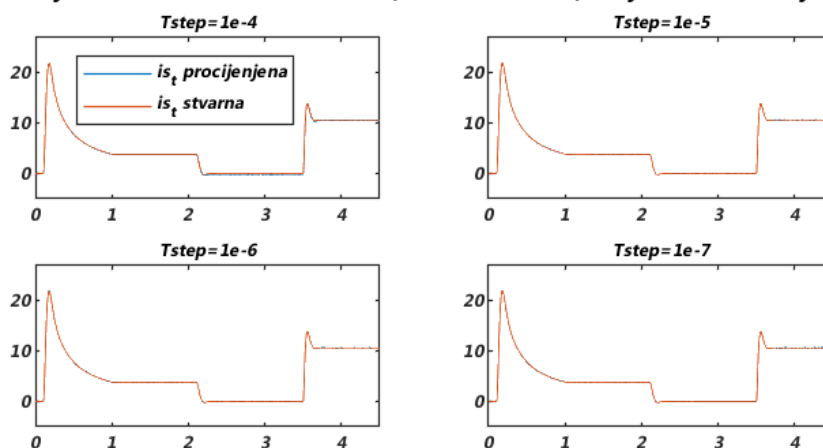
**SL. 5.22:** Prikaz procijenjene i stvarne struje statora u m osi sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode5(Dormand-Prince)

**Struja statora u t osi uz solver ode5(Dormand-Prince) i vrijeme uzorkovanja**



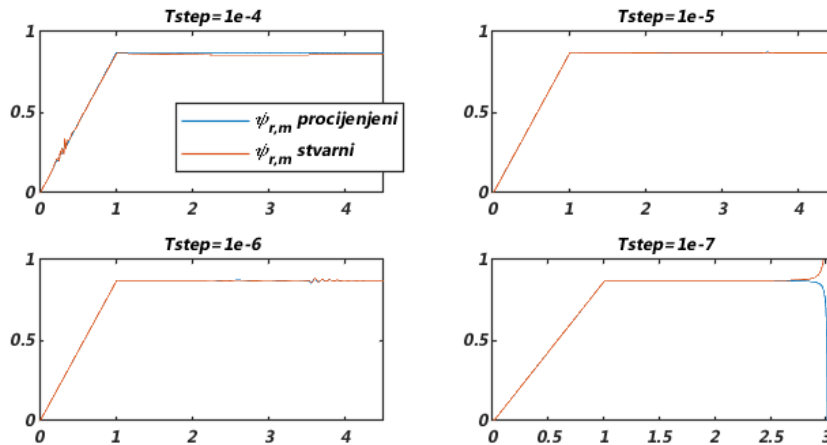
**SL. 5.23:** Prikaz procijenjene i stvarne struje statora u t osi sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode5(Dormand-Prince)

**Struja statora u t osi uz solver ode5(Dormand-Prince) i vrijeme uzorkovanja**



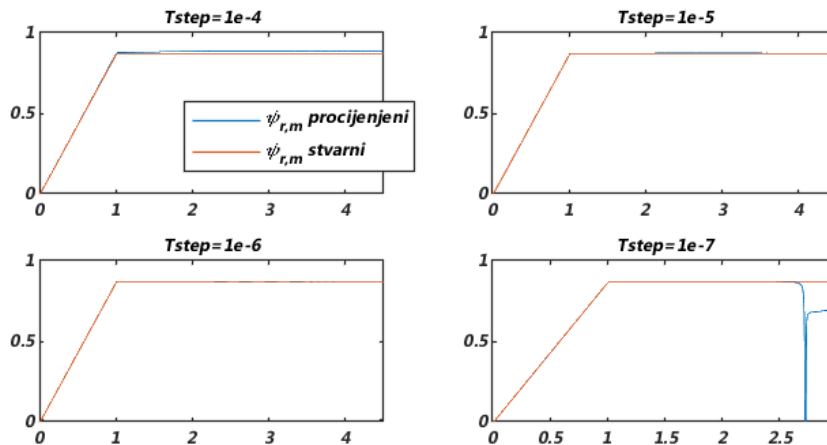
**SL. 5.24:** Prikaz procijenjene i stvarne struje statora u t osi sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode5(Dormand-Prince)

**Magnetski tok rotora u m osi uz solver ode5(Dormand-Prince) i vrijeme uzorkovanja**



**SL. 5.25:** Prikaz procijenjene i stvarne vrijednosti magnetskog toka rotora u m osi sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode4(Runge-Kutta)

**Magnetski tok rotora u m osi uz solver ode5(Dormand-Prince) i vrijeme uzorkovanja**



**SL. 5.26:** Prikaz procijenjene i stvarne vrijednosti magnetskog toka rotora u m osi sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode4(Runge-Kutta)

Na slikama 5.11 i 5.12 prikazana je procjena brzine vrtnje rotora  $\omega_r$  za obje povrtne veze i sva četiri vremena uzorkovanja kao rezultat rješavanja modela *ode4* solver-om, dok je analogno na slikama 5.19 i 5.20 prikaz procijenjene brzine vrtnje kao rezultat djelovanja *ode5-Dormand-prince* solver-a. Na osi ordinata je iznos brzine vrtnje u ( $s^{-1}$ ), a os apscisa predstavlja vrijeme u ( $s$ ). Analizom navedenih slika još jednom se zaključuje da smanjenje vremena uzorkovanja utječe na poboljšanje stabilnosti i konvergencije ali do određene granice koja je u ovom slučaju  $T = 10^{-5}$ , gdje daljnje smanjenje dovodi do nestabilnosti i za *solver ode4* iza kojeg stoji Runge-Kutta metoda četvrtog stupnja kao i za *solver ode5* koji radi na principu Dormand-Prince metode, a čije će numeričke pozadine biti objašnjene u nastavku. Prilikom razmatranja procijenjenih signala brzine vrtnje rotora za sva tri pojedina *solver*-a i njihovom međusobnom usporedbom, uočeni su točniji odzivi primjenom *solver*-a *ode5* i *ode4* u odnosu na *solver ode1*.

Procijenjene i stvarne vrijednosti struja statora u  $m$  i  $t$  osi za četiri vremena uzorkovanja, obje povratne veze i *solver ode4* prikazane su slikama: 5.13, 5.14, 5.15 i 5.16, dok su za *solver ode5* prikazane slikama: 5.21, 5.22, 5.23, 5.24. Komparacijom signala struja statora za *solver ode5* i *ode4* sa onima za *solver ode1* bilježi se poboljšanje odziva u pogledu stabilnosti i konvergencije pojedinih vremena uzorkovanja kao i kod prethodno razmotrenog signala brzine vrtnje rotora, a valja istaknuti značajan napredak kod vremena uzorkovanja  $T = 10^{-4}$  i primjene *Dormand-Prince* i *Runge-Kutta* metode. Jednako vrijedi i za signale magnetskog toka rotora.

Sumarno za sve prethodno prikazano može se iznijeti da: u usporedbi sa *ode1 solver*-om, *solver ode4*, kao i *solver ode5*, kako je priloženo slikama, za isto vrijeme uzorkovanja npr.  $T = 10^{-4}$  daje točnije rezultate glede stabilnosti i konvergencije i u slučaju povratne veze s *Extended Kalman filtrom* i u slučaju idealne povratne veze, za sve tri željene varijable stanja. Također, kada se uzme u razmatranje smanjenje vremena uzorkovanja do određene granice kod primjene bilo kojeg od tri analizirana *solver*-a jasno je uočljivo da su odzivi u smislu stabilnosti i konvergencije poboljšani kod svakog pojedinačnog *solver*-a.

Sva navedena odstupanja kao i poboljšanja predočena slikama, uvjetovana određenim vremenom uzorkovanja ili primjenom određenog *solver*-a, motivacija su za daljnju analizu utjecaja ovih sekundarnih čimbenika na stabilnost i konvergenciju, a posljedično na regulacijska odstupanja pojedinih varijabli. Pri analizi se pretpostavlja da su reziduali varijabli od interesa rezultat različitih metoda numeričke integracije kao pozadine određenog *solver*-a i same strukture sustava pod djelovanjem *Extended Kalman filtra* kao procjenitelja u vidu propagacije šuma kroz model.

## 5.3. Utjecaj sekundarnih čimbenika na stabilnost i konvergenciju

### 5.3.1. Parametriziranje regulatora

Prvi problem kod realizacije željenog odziva u pogledu stabilnosti i konvergencije pojavio se kod sinteze regulatora za vektorsku regulaciju asinkronog motora nakon implementacije *Extended Kalman filtra*. Naime, pokazalo se da regulacija po tehničkom i simetričnom optimumu nije dovoljno dobra, odnosno da korišteni PI regulatori sa vremenskim konstantama  $T_r$  zadužen za kompenzaciju nadvišenja i  $T_i$  zadužen za brzinu regulacijskog odziva, nisu kompetentni za upotrebu procjene stanja. Metodom višestrukih pokušaja i promatranja promjene na odzivima podešeni su parametri regulatora koji daju prethodno priložene optimalne odzive u svim promatranim veličinama. Zaključeno je da su vremenske konstante regulatora određene optimumom prvobitno bile takve da su oni posljedično djelovali prebrzo u odnosu na dinamiku referentnih signala pripadajućih veličina. Korištene vremenske konstante su:

REGULATOR	$T_r$	$T_i$
struje $d$ i $q$ osi	0.009	0.004
struje magnetiziranja	0.154	0.01
brzine vrtnje	0.04	0.006

**Tab. 5.3:** Vremenske konstante regulatora



### 5.3.2. Izbor vremena uzorkovanja

Jedan od ciljeva ovog rada, a kao posljedica promotrenih odziva prikazanih u poglavlju 5.2, jest utvrditi kako točno odabir vremena uzorkovanja utječe na stabilnost i konvergenciju odziva prilikom procjene stanja asinkronog motora. Motivacija za pristup ispitivanju ovog problema leži u tome što čak i danas manjka literature iz područja odabira vremena uzorkovanja i analize istoga za asinkrone motore. Većina pristupa je izgrađena na tome da se jednostavno ovaj problem prilagodi elementima energetske elektronike koji sudjeluju u upravljanju strojem, to jest da se vrijeme uzorkovanja karakterizira sklopnom frekvencijom pripadnih elemenata [13]. Međutim, područje numeričke matematike zastupa stajalište da se vrijeme uzorkovanja bira u skladu s nastojanjima da se minimizira greška uzrokovana korakom iteracije i zaokruživanjem što je izneseno i u knjizi Roberta Platona [53]. Treba napomenuti da je najznačajniji zaključak do kojeg je doveo pristup numeričke matematike, da se vrijeme uzorkovanja bira shodno problematici za koju se primjenjuje ali još važnije, da najbrže vrijeme ne daje najadekvatnije, optimalne rezultate.

### Polovi prijenosne funkcije kontinuiranog sustava u kontekstu stabilnosti

Kontinuirani model asinkronog motora temeljen na naponskom i strujnom modelu prikazan je linearnim diferencijalnim jednadžbama. Primjenom *Laplace*-ove transformacije na spomenute jednakosti, sustav se može opisati prijenosnim funkcijama definiranim u frekvencijskoj  $s$  domeni. Dakle, ukoliko je zadan linearni sustav kod kojeg pobudi, odnosno ulazu  $U(s)$  odgovara izlaz  $Y(s)$  funkcija:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

se naziva prijenosnom funkcijom. Generalna faktorizirana forma prijenosne funkcije odgovara:

$$H(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_n)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

gdje su sa  $z_1 \dots z_n$  označene nule sustava, a sa  $p_1 \dots p_n$  polovi sustava [44]. Kada se analizira stabilnost nekog sustava, grafički prikaz polova vrlo je koristan instrument. Prijenosna funkcija opisuje diferencijalnu jednadžbu, a njezini polovi i nule opisuju odziv sustava pri čemu položaj polova u kompleksnoj ravnini implicira na stabilnost sustava. Prema Ljapunov-ljevoj teoriji stabilnosti za polove kontinuiranog sustava vrijedi [44]:

- Kako su polovi kompleksni brojevi, ukoliko je njihov realni dio negativan, sustav je asimptotski stabilan.
- Kada najmanje jedan pol ima pozitivan realni dio, sustav je nestabilan.
- Kada polovi sustava imaju realni dio jednak nuli, nije moguće zaključivati o stabilnosti analiziranog sustava.

Odnosno, ukoliko se polovi kontinuiranog sustava nalaze u lijevoj polu ravnini kompleksne ravnine, sustav ima stabilan odziv. Analogno tome, ako su pak polovi smješteni u desnom dijelu kompleksne ravnine odziv se neće ustabiliti na neku konačnu vrijednost nego će njegove oscilacije rasti u amplitudi kako vrijeme teži u beskonačno [44].

Vektorski regulirani asinkroni motor izražen u obliku prijenosnih funkcija čini kontinuirani model četvrtog reda kojeg prema tome karakteriziraju četiri prijenosne funkcije promatrane kao četiri odvojena podsustava. Prijenosne funkcije su izvedene na temelju blokovskih

prikaza, odnosno regulacijskih petlji ili krugova za regulaciju struje statora u  $d$  i  $q$  osi, regulaciju struje magnetiziranja kao i brzinu vrtnje. Nakon uvrštavanje pripadajućih vremenskih konstanti konačne funkcije izgledaju ovako:

- prijenosna funkcija regulacije struje statora  $d$  osi, pri čemu je i za  $q$  os funkcija jednaka i odgovara:

$$H_1(s) = \frac{1 + 0.0092s}{4.782 \cdot 10^{-5}s^2 + 0.0144s + 1}$$

- prijenosna funkcija regulacije struje magnetiziranja:

$$H_2(s) = \frac{1.415 \cdot 10^{-3}s^2 + 0.163s + 1}{7.354 \cdot 10^{-8}s^4 + 2.263 \cdot 10^{-5}s^3 + 3.097 \cdot 10^{-3}s^2 + 0.173s + 1}$$

- prijenosna funkcije regulacije brzine vrtnje:

$$H_3(s) = \frac{3.680 \cdot 10^{-4}s^2 + 0.049s + 1}{3.854 \cdot 10^{-8}s^4 + 1.161 \cdot 10^{-5}s^3 + 9.031 \cdot 10^{-3}s^2 + 0.049s + 1}$$

### Svojtvene vrijednosti diskretnog sustava u pogledu stabilnosti

Model asinkronog motora kojeg karakteriziraju diferencijalne jednadžbe je kontinuiran, a u radu je već napomenuto da je zbog prirode filtra provedena diskretizacija modela. O stabilnost diskretnog sustava također se može efikasno zaključivati na osnovu analize svojstvenih vrijednosti pripadajućeg sustava. Transformacija modela sustava iz kontinuiranog u diskretni podrazumijeva transformaciju iz  $s$  domene u  $z$  domenu pri čemu za svojstvene vrijednosti diskretnog sustava vrijedi:

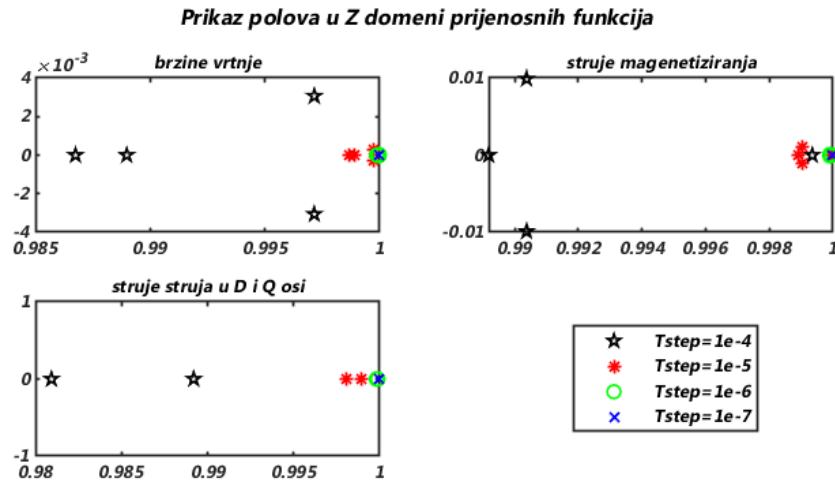
$$z = e^{\lambda T} \quad (5-138)$$

gdje su sa  $\lambda$  označeni polovi gore navedenih prijenosnih funkcija kontinuiranog sustava četvrtog reda, dobiveni kao rješenja karakterističnog polinoma, koji se dobije izjednačavanjem nazivnika prijenosnih funkcija s nulom.  $T$  predstavlja vrijeme uzorkovanja.

Prema Ljapunov-ljevoj teoriji stabilnosti za diskretne sustave, stabilnost ovisi o amplitudi svojstvenih vrijednosti, a ne o predznaku realnog dijela što je slučaj kod kontinuiranih sustava, prema tome vrijedi [44]:

- Ukoliko je amplituda, odnosno modul ili apsolutna vrijednost svih svojstvenih vrijednosti manja od 1, sustav je asimptotski stabilan.
- Sustav nije stabilan ukoliko je modul barem jedne svojstvene vrijednosti veći od 1.
- Kada je modul neke svojstvene vrijednosti manji ili jednak 1 sustav je na granici stabilnosti ili granično stabilan.

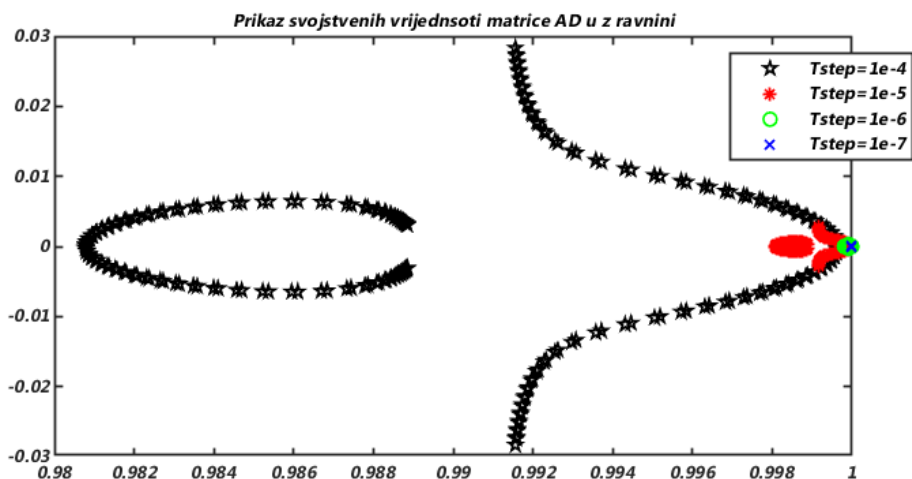
Dakle, prema teoriji stabilnosti sustava, za diskretni sustav se kaže da je stabilan ukoliko se svojstvene vrijednosti sustava u  $z$  ravnini nalaze unutar jedinične kružnice [13]. Da bi se konačno ustanovila stabilnost sustava vektorski reguliranog asinkronog motora, posredstvom Matlab skripte su dobiveni grafički prikazi polova u  $z$  ravnini sva četiri podsustava. Kako je primarni cilj ustanoviti utjecaj vremena uzorkovanja na stabilnost, provedena je analiza ponašanja diskretnih svojstvenih vrijednosti za četiri različita vremena uzorkovanja i to za već prethodno navedene vrijednosti:  $T = 10^{-4}$ ,  $T = 10^{-5}$ ,  $T = 10^{-6}$  i  $T = 10^{-7}$ .



**SL. 5.27:** Prikaz polova u Z domeni u ovisnosti o vremenu uzorkovanja pojedinih prijenosnih funkcija

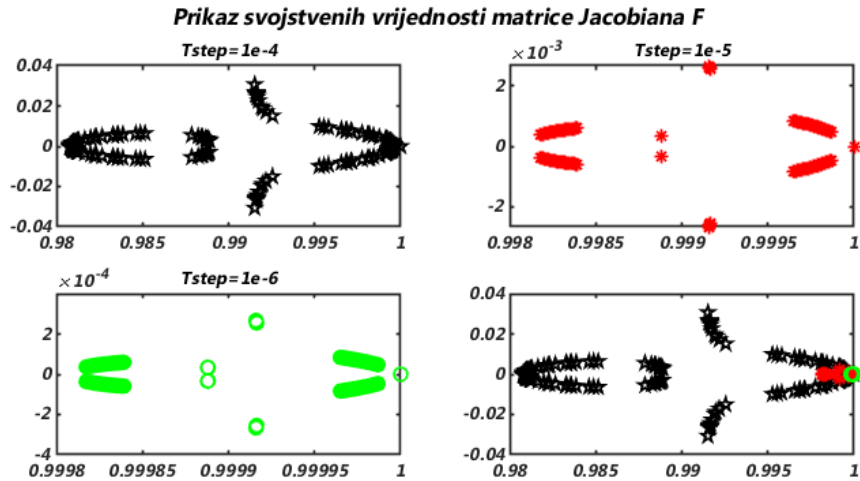
Rezultati analize kako slika (5.27) jasno prikazuje, govore da je sustav vektorski reguliranog asinkronog motora stabilan jer se polovi svih prijenosnih funkcija, odnosno sva četiri podsustava, za sva četiri različita vremena uzorkovanja, nalaze u jediničnoj kružnici. Također je vidljivo da se smanjenjem vremena uzorkovanja polovi svih funkcija približavaju rubnoj točki stabilnosti  $(1, 0)$ .

Kako bi se nadalje analizirala stabilnost *Extended Kalman filtra* potrebno je promatrati svojstvene vrijednosti diskretne matrice sustava  $\mathbf{A}_d$  kao i *Jacobian* matrice  $\mathbf{F}_k$  u ovisnosti o promjeni vremena uzorkovanja. U tu svrhu kreirane su Matlab programske skripte za računanje svojstvenih vrijednosti navedenih matrica i analizu njihovih promjena u ovisnosti o četiri vremena uzorkovanja koja su ponovno iznosila:  $T = 10^{-4}$ ,  $T = 10^{-5}$ ,  $T = 10^{-6}$  i  $T = 10^{-7}$



**SL. 5.28:** Prikaz svojstvenih vrijednosti matrice  $\mathbf{A}_d$  u z ravnini

Na slici (5.28) je vidljivo da svojstvene vrijednosti i u ovom slučaju konvergiraju u točku  $(1, 0)$  kako se smanjuje vrijeme uzorkovanja  $T$ . S obzirom da je  $\mathbf{A}_d = \mathbf{I} + \mathbf{A}T$ , svojstvene vrijednosti matrice  $\mathbf{A}_d$  očekivano teže prema jedinici, budući da kako  $T \rightarrow 0$  tako i  $\mathbf{A}_d \rightarrow \mathbf{I}$ .



**SL. 5.29:** Prikaz svojstvenih vrijednosti matrice  $F_k$  u  $z$  ravnini u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja

Kako je matrica  $F_k$  zapravo parcijalna derivacija diskretne matrice  $A_d$  smanjenje vremena uzorkovanja očekivano jednako djeluje i na njezine svojstvene vrijednosti. Također se može za sva vremena uzorkovanja uočiti svojstvena vrijednost koja se nalazi striktno u točki  $(1, 0)$ , a ona je posljedica toga što se na posljednjem mjestu glavne dijagonale matrice *Jacobian*-a  $F_k$  prema izrazu (4-111) nalazi upravo 1.

Smanjenje vremena uzorkovanja osim što utječe na stabilnost sustava, ustanovljeno je da povlači i brojne negativne posljedice. Ono s čim se tijekom realizacije rada suočilo jest činjenica da malo vrijeme uzorkovanja utječe na trajanje računalnih procedura, a kao rezultat toga javlja se iznimno dugo trajanje izvršavanja simulacije. Zbog višesatnog trajanja izvršavanja simulacija na računalu posegnulo se za rješenjem u vidu implementacije simulacijskog modela u stvarno vremenski simulator OPAL-RT (engl. *Real Time*) kako bi se postupak ubrzao. Međutim, OPAL-RT-ov OP5031 koji je bio na raspolaganju, posjeduje ograničenje rada na vrijeme uzorkovanja najmanje  $T = 10^{-6}$ . Usprkos tome simulator je poslužio u svrhu usporedbe rezultata, to jest regulacijskog odstupanja željenih varijabli od interesa nastalih kao rezultat simulacije Simulink-a računala i onih dobivenih kao rezultat simulacije na OPAL-u budući da se numerička pozadina na ove dvije platforme razlikuje, o čemu će biti rečeno detaljnije u nastavku. Također, kako se vrijeme uzorkovanja smanjuje, tako se povećava broj podataka u nekoj simulaciji što ukazuje na probleme sa zauzimanjem memorije i pohranom svih podataka potrebnih za kasniju analizu rezultata. Konačno i najbitnije ustanovljeno, ono što je pokazano i na prethodno priloženim slikama u poglavlju 5.2, da smanjenje vremena uzorkovanja u krajnjem slučaju rezultira nestabilnošću sustava sada je potkrijepljeno slikama (5.29), (5.28) i (5.27) kao dokazima. Na navedenim slikama jasno je prikazan uzrok takvog vladanja sustava jer kako se prilikom smanjenja vremena uzorkovanja svojstvene vrijednosti približavaju rubnoj točki na jediničnoj kružnici što ujedno znači i granici stabilnosti, daljnjim smanjenjem vremena uzorkovanja sustav postaje nestabilan.

### 5.3.3. Izbor solvera kod konfiguracije unutar Simulink-a

Dinamički sustav se simulira izračunavanjem njegovih stanja u uzastopnim vremenskim koracima tijekom određenog vremenskog raspona, koristeći informacije koje daje model. Proces izračunavanja uzastopnih stanja sustava na temelju modela sustava poznat je kao rješavanje modela [54]. Niti jedna metoda rješavanja modela nije kompetentna za sve vrste sustava. Sukladno tome unutar Matlab Simulink-a postoji skup programa, odnosno rješavača (engl. *solver*), od kojih svaki utjelovljuje poseban pristup rješavanja modela. Matematičari su razvili široku paletu tehnika numeričke integracije za rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi (engl. *ordinary differential equations - ODE*) koje predstavljaju kontinuirane dinamičke sustave. Osiguran je opsežan skup *solver*-a od kojih svaki implementira specifičnu *ODE* metodu rješavanja sustava [53]. U skladu s time, unutar konfiguracijskih parametara modela Simulink-a može se odabrati željeni *solver*, a svi *solver*i koje pruža Simulink slijede sličnu konvenciju imenovanja: *ode*, iza kojeg dolazi broj koji označava red složenosti *solver*-a. Izbor odgovarajuće vrste *solver*-a koji se treba primijeniti za simulaciju modela donosi se u skladu sa:

- dinamikom sustava,
- željenom stabilnošću rješenja,
- željenom brzinom izračuna,
- robusnosti *solver*-a.

Kao takvi, numerički *solver*-i koje nudi Simulink mogu se općenito klasificirati prema: vrsti koraka uzorkovanja; na one s fiksnim korakom i sa varijabilnim korakom, i u pogledu kontinuiranosti na kontinuirane i diskretne [54].

*Solver*-i s fiksnim korakom rješavaju model u pravilnim vremenskim intervalima tijekom određenog vremenskog raspona, od početka do kraja simulacije. Veličina intervala poznata je kao veličina koraka (engl. *Fixed step size*), odnosno kao vrijeme uzorkovanja. Smanjenje vremena uzorkovanja povećava vrijeme izvršavanja simulacije. *Solver*-i sa varijabilnim vremenom uzorkovanja mijenjaju veličinu koraka tijekom simulacije po principu da su gušće raspoređeni uzorci za vrijeme neke brze promjene stanja, prolaska kroz nulu itd., dok se smanjuje broj uzoraka kada se stanje modela mijenja polako ili se ne mijenja uopće, kako bi se izbjeglo bespotrebno gomilanje istih informacija [54]. Ovo se može smatrati prednošću, no povlači za sobom i nedostatke jer posljedično dovodi do povećanog računalnog tereta, koji još uz prvobitnu složenost modela dodatno može zakomplicirati izvršavanje simulacije. Zbog toga su u radu kao predmet analize odabrani *solver*-i s fiksnim vremenom uzorkovanja.

Što se tiče kontinuiranosti, kontinuirani *solver*-i s fiksnim korakom, izračunavaju sljedeće stanje dodavanjem vremenskog koraka fiksne veličine trenutnom vremenu, odnosno izračunavaju stanje sustava u kasnijem trenutku na temelju trenutnog stanja sustava [54]. Kako je model asinkronog motora kontinuirani sustav, odabrani su kontinuirani *solver*-i. Dvije su vrste kontinuiranih *solver*-a s fiksnim vremenom uzorkovanja koje nudi Simulink, a to su: eksplicitni i implicitni. Oba se pristupa koriste u numeričkoj analizi za dobivanje rješenja diferencijalnih jednadžbi kao što je potrebno u računalnim simulacijama procjene stanja sustava. Razlika između ove dvije vrste je u brzini proračuna i stabilnosti. Implicitni *solver* zahtjeva kompliciraniji proračun po koraku u odnosu na eksplicitni, posljedično je eksplicitni brži u izvršavanju matematičkih procedura. Eksplicitni *solver*-i za svaki od koraka koriste numeričku integraciju za izračunavanje vrijednosti stanja sustava u sljedećem vremenskom koraku, u vidu eksplicitne funkcije trenutne vrijednosti stanja i derivacije stanja između trenutnog i budućeg vremenskog koraka. Izraženo matematički za eksplicitni *solver* vrijedi [54]:

$$x(k+1) = x(k) + hDx(k) \quad (5-139)$$

gdje je sa  $x$  označeno trenutno stanje sustava,  $Dx$  je funkcija koja procjenjuje derivaciju stanja i ovisi o vrsti *solver*-a,  $h$  je veličina koraka, a  $k$  označuje trenutni vremenski korak. Simulink pruža brojne varijacije eksplicitnih kontinuiranih *solver*-a s fiksnim korakom, a međusobno se razlikuju upravo prema specifičnoj tehnici numeričke integracije koju koriste za izračunavanje derivacije stanja modela.

Niti jedan od njih nema mehanizam kontrole pogreške zato točnost i trajanje simulacije, ovisi u prvom redu o izboru vremena uzorkovanja koje se predaje *solver*-u. Tako da je uska poveznica, odnosno uzročno-posljedična veza u pogledu stabilnosti i konvergencije rezultata, između prethodno obrađenog poglavlja, to jest izbora vremena uzorkovanja i problematike izbora *solver*-a. Za potrebe rješavanja modela ovog rada kako je prikazano, odabrani su dakle eksplicitni kontinuirani *solver*-i s fiksnim vremenom uzorkovanja i to redom: *ode1 - Euler*, *ode4 - Runge-Kutta* i *ode5 Dormand-Prince*. Svaki od njih karakterizira posebna metoda numeričke integracije i numerička pogreška za koju se pretpostavlja da uzima udio u uzroku nastanka razlike procijenjene i stvarne vrijednosti pojedine varijable odnosno regulacijskog odstupanja, a sastoji se od iteracijske pogreške ili greške koraka iteracije i pogreške zaokruživanja pri čemu obje ovisi o vremenu uzorkovanja [53].

## Runge-Kutta metode

Da bi se pojasnila matematička pozadina odabranih *solver*-a, osnova je razumijevanje Runge-Kutta metodologije. Jedna od najčešće korištenih i najpoznatijih metoda za numeričko rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi u slučaju kada njihovo rješenje nije moguće dobiti egzaktno su upravo Runge-Kutta metode. Runge-Kutta metode su važna obitelj iterativnih metoda za aproksimaciju rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi to jest *ODE*-ova koje su razvili njemački matematičari C.Runge i M.W.Kutta [55]. Da bi se shvatilo zašto je uopće potrebno numeričko rješavanje jednadžbi potrebno je promotriti problem početne vrijednosti:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (5-140)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (5-141)$$

Funkcija  $y$  je nepoznata funkcija vremena  $t$  koja se želi aproksimirati. Vremenska derivacija  $\frac{dy}{dt}$ , stopa za koju se mijenja  $y$ , je funkcija samog  $y$  i vremena  $t$ , a kako je navedeno za početno vrijeme  $t_0$  odgovarajuća  $y$  vrijednost je  $y_0$ . Navedeni problem je poznat kao inicijalni problem, a jedan od načina rješavanja istog je pomoću Runge-Kutta metoda [55].

Prilikom pristupa rješenju najprije se definira interval kojem pripada  $t \in [a, b]$ :

$$a = [t_0, t_1, t_2 \dots t_n] = b$$

sa  $h$  je označena veličina koraka odnosno  $h = t_{i+1} - t_i, i = 0, \dots, n - 1$ .

Vrijednost  $y_{k+1}$ , u točki  $t_{k+1}$  računa se pomoću poznate vrijednosti  $y_k$  u točki  $t_k$  zbog čega se ove metode nazivaju metode jednog koraka (engl. *one-step methods*). U skladu sa svime definiranim, opći oblik Runge Kutta metoda određen je formulom:

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=1}^m c_i k_i \quad (5-142)$$

gdje je  $k = 0, \dots, n - 1$  trenutni korak,  $m$  je red metode, a  $k_i$  je dan izrazom:

$$k_i = f \left( t_k + \alpha_i h, y_k + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \right), i = 1, \dots, m \quad (5-143)$$

Numerička pogreška -  $e$ , metoda jednog koraka opisanih prethodnim izrazima, kako je već spomenuto, sastoji se od iteracijske pogreške i pogreške zaokruživanja i vrijedi:

$$\max \|e\| \leq K \left( h^p + \frac{\delta}{h} \right) \quad (5-144)$$

gdje je  $K = \frac{\max\{C,1\}}{L\varphi} [e^{L\varphi b} - 1]$ , a  $h$  je vrijeme uzorkovanja. Desna strana jednakosti sadrži dva izraza i to  $Kh^p$  koji se odnosi na globalnu pogrešku iteracije metode, dok drugi izraz  $K\frac{\delta}{h}$  odgovara akumuliranoj pogreški zaokruživanja. Dokaz i pripadne izvode navedene jednakosti moguće je pronaći u knjizi [53].

## Runge-Kutta metoda prvog reda

Kod izvoda Runge-Kutta metode prvog reda, red metode je  $m = 1$  i vrijedi:

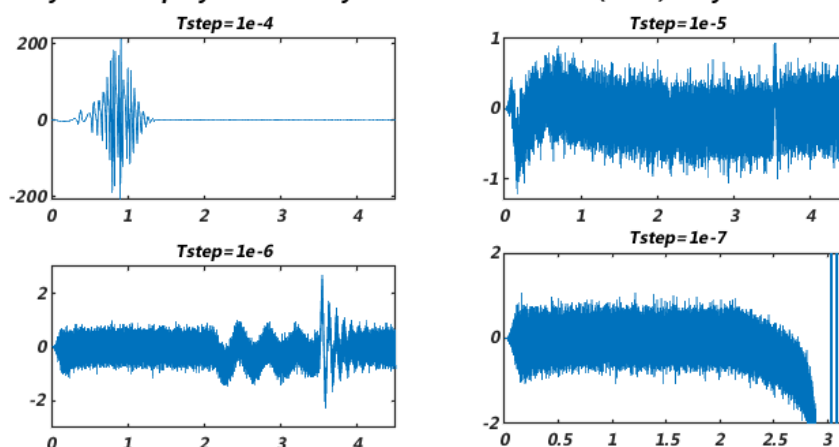
$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + hc_1 k_1 \\ y_{k+1} &= y_k + hc_1 f(t_k, y_k) \end{aligned}$$

Ako se sada razvije izraz za  $y_{k+1}$  u Taylorov red dobiva se:

$$y_{k+1} = y(t_k) + hy'(t_k) + O(h^2) = y_k + hf(t_k, y_k) + O(h^2) \Rightarrow c_1 = 1$$

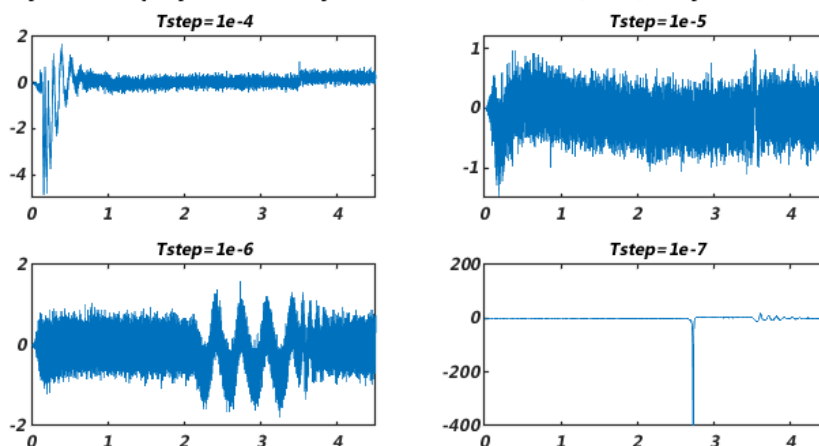
Dakle, Runge-Kutta metoda prvog stupnja je ekvivalentna eksplicitnoj Euler metodi [55]. Euler-ova metoda je prvog reda točnosti, stoga se može govoriti o Runge-Kutta metodi prvog reda na kojoj se temelji korišteni *solver ode1-Euler* i ima pripadnu pogrešku metode jednaku  $O(h^2)$ . Kako bi se promotrio utjecaj pogreške metode prvog reda na regulacijsko odstupanje svih varijabli od interesa, generiran je prikaz regulacijskog odstupanja, odnosno reziduala u ovisnosti o korištena četiri vremena uzorkovanja. Tako regulacijska odstupanja brzine vrtnje rotora nastala rješavanjem modela *ode1 solver*-om za slučaj povratne veze s *Extended Kalman filtrom* kao i za slučaj idealne povratne veze izgledaju ovako:

**Regulacijsko odstupanje brzine vrtnje rotora za solver ode1(Euler) i vrijeme uzorkovanja**



**SL. 5.30:** Prikaz regulacijskog odstupanja brzine vrtnje rotora sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode1(Euler)

### Regulacijsko odstupanje brzine vrtnje rotora za solver ode1(Euler) i vrijeme uzorkovanja

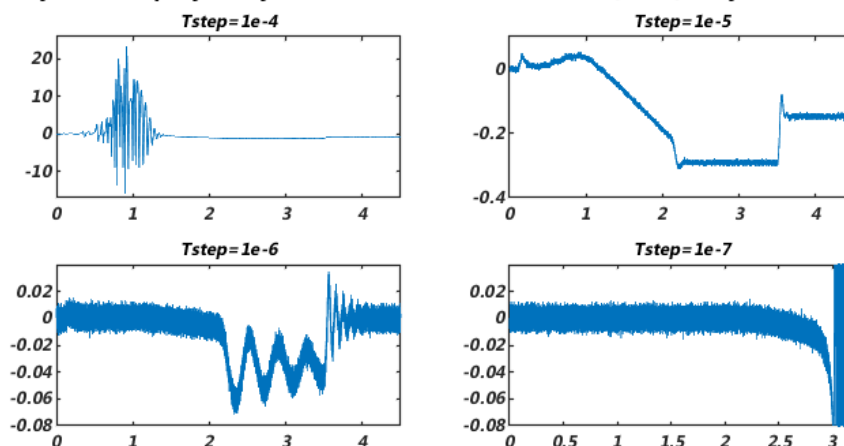


**SL. 5.31:** Prikaz regulacijskog odstupanja brzine vrtnje rotora sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode1(Euler)

Promatranjem prethodnih slika jasno je uočljivo da se regulacijsko odstupanje drastično smanjuje po amplitudi za slučaj smanjenja vremena uzorkovanja sa  $T = 10^{-4}$  na  $T = 10^{-5}$  za slučaj povratne veze s *Extended Kalman filtrom*. Ovo smanjenje je naročito uočljivo u periodu koji odgovara ubrzavanju stroja do druge sekunde. Isto vrijedi i za slučaj idealne povratne veze pri čemu su oscilacije u amplitudi i sami iznos regulacijskog odstupanja očekivano manjih vrijednosti u odnosu na one sa *EKF*-om u povratnoj vezi. Kao i na samom prikazu signala procijenjenih i stvarnih brzina vrtnje za pojedina vremena uzorkovanja priloženih u poglavlju 5.2, tako je i na signalima reziduala uočljiva prijelazna pojava prilikom terećenja stroja u  $T = 3.5$  s. Međutim, na signalu regulacijskog odstupanja koji odgovara vremenu uzorkovanja  $T = 10^{-6}$  oscilatorna dinamika regulacijskog odstupanja uočljiva je i prije trenutka terećenja, a naročito je izražena nakon terećenja u slučaju obje vrste povratne veze. Prikaz reziduala za  $T = 10^{-7}$  odgovara već ranije ustanovljenom ispadu iz stabilnosti sustava pri ovom vremenu uzorkovanja. Dakle, analizom ovih prikaza može se uočiti da brzina vrtnje rotora za vrijeme uzorkovanja  $T = 10^{-4}$  bilježi problem s konvergencijom dok stroj ne dosegne nazivnu brzinu vrtnje, odnosno pretpostavlja se utjecaj slučajne pogreške kao posljedice same dinamike zaleta motora. Smanjenjem vremena uzorkovanja na  $T = 10^{-5}$  dobiva se po iznosu značajno manje odstupanje, prema tome je *solver ode1* pri ovom vremenu uzorkovanja kompetentniji za primjenu ove vrste. Daljnjim smanjenjem vremena uzorkovanja na  $T = 10^{-6}$  javlja se povećan iznos regulacijskog odstupanja pretpostavlja se kao posljedica upravo smanjenja vremena uzorkovanja i njegovog djelovanja na numeričku pogrešku *ode1 solver*-a, a dodatno i zbog terećenja koje uvodi jasno uočljivu sistematsku pogrešku. Naredni predmet analize su regulacijska odstupanja signala struje statora u  $m$  i  $t$  osi nastala kao rezultat rješavanja modela istim *ode1 solver*-om za sva četiri vremena uzorkovanja i obje povratne veze.

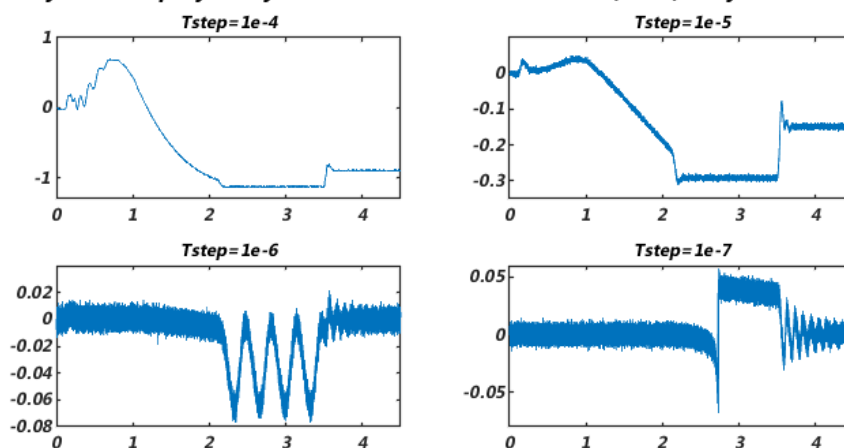


**Regulacijsko odstupanje struje statora u m osi za solver ode1(Euler) i vrijeme uzorkovanja**



**SL. 5.32:** Prikaz regulacijskog odstupanja struje statora u m osi sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode1(Euler)

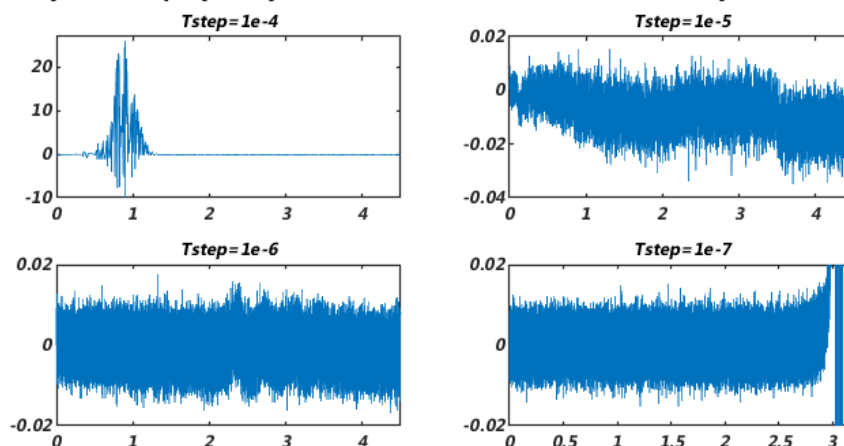
**Regulacijsko odstupanje struje statora u m osi za solver ode1(Euler) i vrijeme uzorkovanja**



**SL. 5.33:** Prikaz regulacijskog odstupanja struje statora u m osi sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode1(Euler)

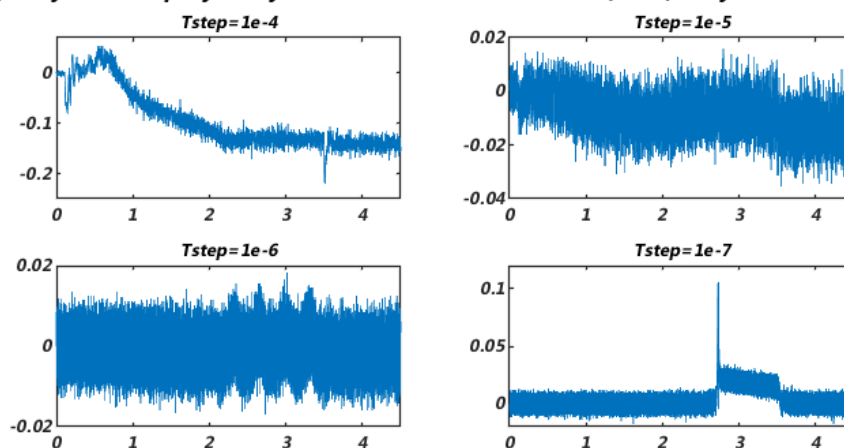
Kako je prethodno navedeno za rezidualne brzine vrtnje rotora, tako je i u slučaju regulacijskog odstupanja struje statora u  $m$  osi, značajno manji iznos za vrijeme uzorkovanja  $T = 10^{-5}$  u odnosu na odstupanje koje odgovara vremenu uzorkovanja  $T = 10^{-4}$  i to naročito kada je *Extended Kalman filter* u povratnoj vezi. Međutim, kako je i uočljivo na prethodnim slikama prema obliku regulacijskog odstupanja struje statora u  $m$  osi za vrijeme uzorkovanja  $T = 10^{-5}$  jasno je da procijenjena vrijednost struje prilikom magnetiziranja koje traje do  $T = 1s$  puno bolje prati stvarnu vrijednost u odnosu na kasniji period kada se bilježi razilaženje vrijednosti ova dva signala. U tom pogledu situacija je poboljšana daljnjim smanjenjem vremena uzorkovanja ali analogno rečenom za brzinu vrtnje i kod regulacijskog odstupanja struje javlja se prisustvo sistematske pogreške kod vremena uzorkovanja  $T = 10^{-6}$  što zbog daljnjeg smanjenja vremena uzorkovanja, što zbog opterećenja stroja.

**Regulacijsko odstupanje struje statora u t osi za solver ode1(Euler) i vrijeme uzorkovanja**



**SL. 5.34:** Prikaz regulacijskog odstupanja struje statora u t osi sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode1(Euler)

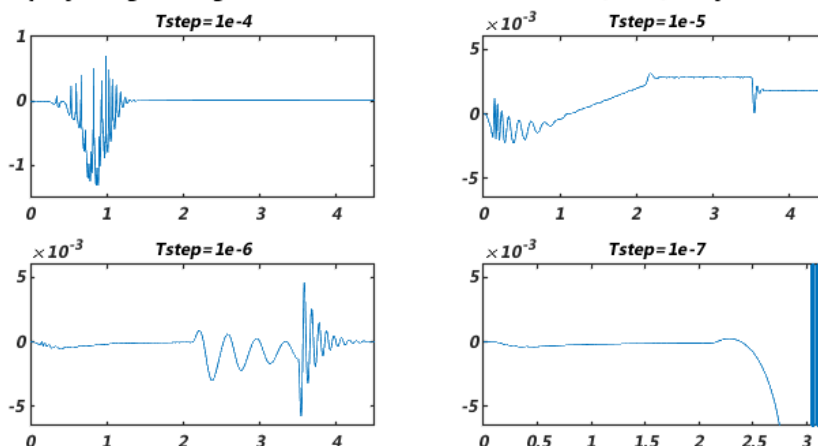
**Regulacijsko odstupanje struje statora u t osi za solver ode1(Euler) i vrijeme uzorkovanja**



**SL. 5.35:** Prikaz regulacijskog odstupanja struje statora u t osi sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode1(Euler)

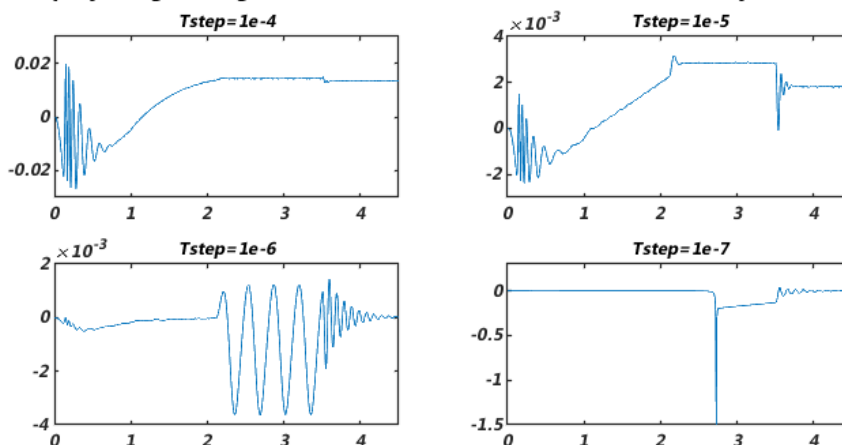
Na slikama 5.34 i 5.35 prikazana su regulacijska odstupanja struje statora u t osi za solver ode1, obje povratne veze i sva vremena uzorkovanja. Što se tiče ovih regulacijskih odstupanja još jednom se bilježi problem konvergencije signala za slučaj najvećeg iznosa vremena uzorkovanja i period zaleta, s time da je ovaj problem ponovno više istaknut za slučaj povratne veze s filtrom. Također je opet vidljivo smanjenje regulacijskog odstupanja smanjenjem vremena uzorkovanja na  $T = 10^{-5}$  pri čemu rezidual bilježi promjene koje odgovaraju dinamičkim promjenama u trenucima zaleta i terećenja. Na regulacijskom odstupanju za  $T = 10^{-6}$  se vidi doprinos sistematske pogreške s time da je u odnosu na prethodne varijable ovoga puta njezino prisustvo najmanje uočljivo ali u usporedbi sa vremenom uzorkovanja  $T = 10^{-5}$  svakako postoji.

**Reg. odstupanje magnetskog toka rotora u m osi za solver ode1(Euler) i vrijeme uzorkovanja**



**SL. 5.36:** Prikaz regulacijskog odstupanja magnetskog toka rotora u m osi sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode1(Euler)

**Reg. odstupanje magnetskog toka rotora u m osi za solver ode1(Euler) i vrijeme uzorkovanja**



**SL. 5.37:** Prikaz regulacijskog odstupanja magnetskog toka rotora u m osi sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode1(Euler)

Što se tiče prikaza regulacijskog odstupanja magnetskog toka rotora prilikom rješavanja modela *ode1 solver*-om u odnosu na sve ostale varijable, rezidual toka je sveden na minimum vrijednosti. I regulacijsko odstupanje magnetskog toka rotora je po iznosu najveće za najveće vrijeme uzorkovanja i slučaj povratne veze s *Extended Kalman filtrom*. Na regulacijskom odstupanju magnetskog toka rotora u *m* osi, očekivano se u periodu do prve sekunde koliko traje magnetiziranje, javlja problem konvergencije procijenjene i stvarne vrijednosti budući da magnetski tok rotora u *m* osi direktno odgovara struji magnetiziranja. Također se u trenutku terećenja javlja tranzijent vrijednosti regulacijskog odstupanja magnetskog toka rotora. Za vrijeme uzorkovanja  $T = 10^{-6}$  i na regulacijskom odstupanju magnetskog toka rotora se uočava oscilatorna dinamika koja je vjerojatno posljedica upravo smanjenja iznosa vremena uzorkovanja i njegovog utjecaja na numeričku pogrešku. Oscilatorna dinamika je sada već očekivano naročito izražena u trenutku opterećenja stroja i to za slučaj povratne veze s *Extended Kalman fitrom* jer se pretpostavlja da dolazi do akumuliranja sistematske pogreške koja odgovara terećenju i slučajne pogreške koja je rezultat same primjene algoritma *EKF*-a.

## Runge-Kutta metoda četvrtog reda

Iza drugog korištenog *ode4 solver*-a stoji Runge-Kutta metoda numeričke integracije četvrtog reda za koju vrijedi [56]:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (5-145)$$

gdje su:

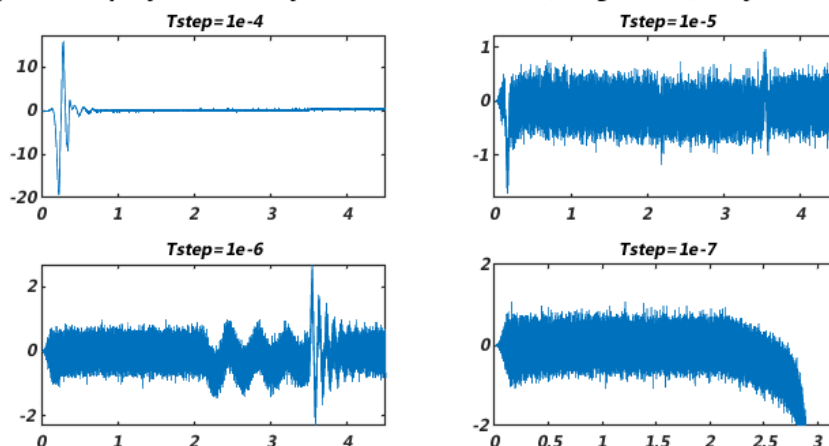
$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k) \\ k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 &= f(t_k + h, y_k + hk_3) \end{aligned}$$

Dakle,  $y_{k+1}$  je *RK-4* aproksimacija  $y(t_{k+1})$  i određena je zbrojem trenutne vrijednosti  $y_k$  i ponderiranog prosjeka četiri koraka, gdje je svaki korak produkt veličine intervala  $h$  i procijenjenog nagiba pravca određenog funkcijom  $f$  i to kako slijedi [56]:

- $k_1$  je korak određen nagibom na početku intervala koristeći vremensku derivaciju od  $y$  - Euler metoda
- $k_2$  je korak određen nagibom u sredini intervala koristeći  $y' + \frac{1}{2}hk_1$
- $k_3$  je korak određen nagibom u sredini intervala koristeći  $y' + \frac{1}{2}hk_2$
- $k_4$  je korak određen nagibom na kraju intervala koristeći  $y' + hk_3$

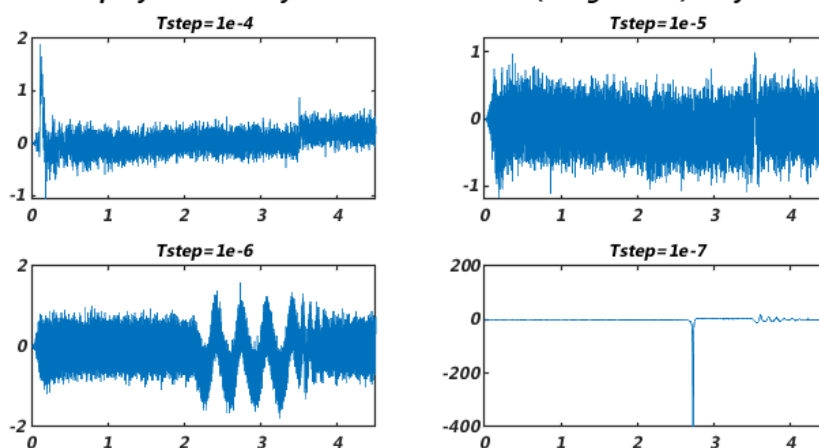
Pri izračunu prosječne vrijednosti navedena četiri koraka, težinska vrijednost je dodijeljena koracima koji se nalaze u sredini intervala. Za razliku od prethodno definirane *RK-1* metode, *RK-4* numerička metoda koja ogovara *solver*-u *ode-4*, ima povećan stupanj točnosti budući da je globalna pogreška Runge-Kutta metode četvrtog reda jednaka  $O(h^4)$ . U skladu s time, a u cilju usporedbe numeričkih pogreški metoda generirana su regulacijska odstupanja svih varijabli nastala kao rezultati rješenja modela primjenom ovog *solver*-a i izgledaju ovako:

**Regulacijsko odstupanje brzine vrtnje rotora za solver ode4(Runge-Kutta) i vrijeme uzorkovanja**



**SL. 5.38:** Prikaz regulacijskog odstupanja brzine vrtnje rotora sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode4(Runge-Kutta)

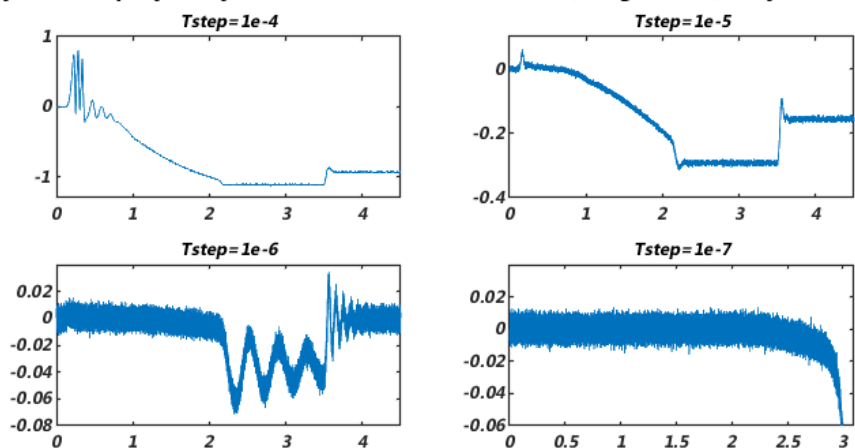
**Regulacijsko odstupanje brzine vrtnje rotora za solver ode4(Runge-Kutta) i vrijeme uzorkovanja**



**SL. 5.39:** Prikaz regulacijskog odstupanja brzine vrtnje rotora sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode4(Runge-Kutta)

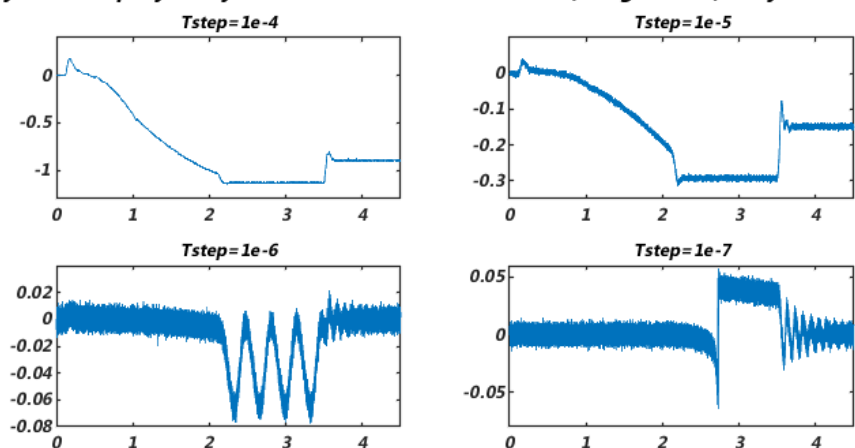
Na slikama 5.38 i 5.39 prikazana su regulacijska odstupanja brzine vrtnje rotora za slučaj obje povratne veze i sva četiri vremena uzorkovanja dobivena uz korištenje *ode4 solver*-a. Načelno, sve rečeno za regulacijska odstupanja kod primjene prethodnog *ode1 solver*-a vrijedi i za ova regulacijska odstupanja. Dakle, jednako se javlja problem s konvergencijom signala prilikom zaleta motora, jednako se smanjuje amplitudna vrijednost regulacijskog odstupanja prilikom smanjenja vremena uzorkovanja sa  $T = 10^{-4}$  na  $T = 10^{-5}$ , kao što se jednako javlja oscilatorna dinamika regulacijskog odstupanja kao posljedica daljnjeg smanjenja vremena uzorkovanja. Oscilatorna dinamika reziduala je pretpostavlja se rezultat rješavanja modela sustava numerički a ne analitički i sistematske pogreške koja se javlja prilikom terećenja stroja. Osim toga, ono što valja naglasiti jest da se promatranjem regulacijskih odstupanja brzine vrtnje rotora koja su nastala rješavanjem sustava *ode4 solver*-om i njihovom usporedbom sa regulacijskim odstupanjima nastala djelovanjem *ode1 solver*-a može uočiti da su odstupanja nastala *ode4 solver*-om nižih vrijednosti što se slaže s činjenicom da je ovaj *solver* višeg reda točnosti. Ovo se naročito ističe kod vremena uzorkovanja  $T = 10^{-4}$  za slučaj obje povratne veze.

**Regulacijsko odstupanje struje statora u m osi za solver ode4(Runge-Kutta) i vrijeme uzorkovanj.**



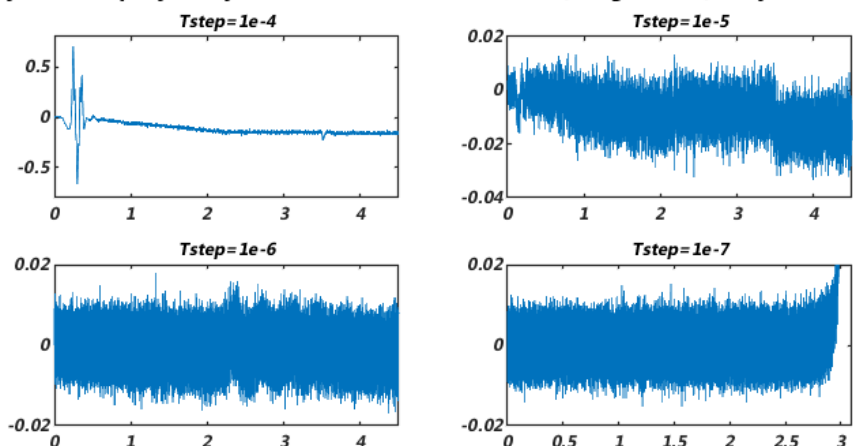
**SL. 5.40:** *Prikaz regulacijskog odstupanja struje statora u m osi sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode4(Runge-Kutta)*

**Regulacijsko odstupanje struje statora u m osi za solver ode4(Runge-Kutta) i vrijeme uzorkovanj.**



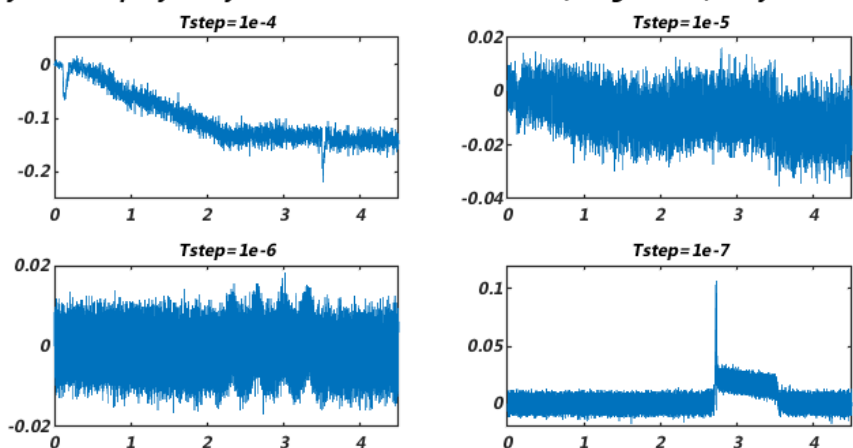
**SL. 5.41:** *Prikaz regulacijskog odstupanja struje statora u m osi sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode4(Runge-Kutta)*

**Regulacijsko odstupanje struje statora u t osi za solver ode4(Runge-Kutta) i vrijeme uzorkovanja**



**SL. 5.42:** Prikaz regulacijskog odstupanja struje statora u t osi sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode4(Runge-Kutta)

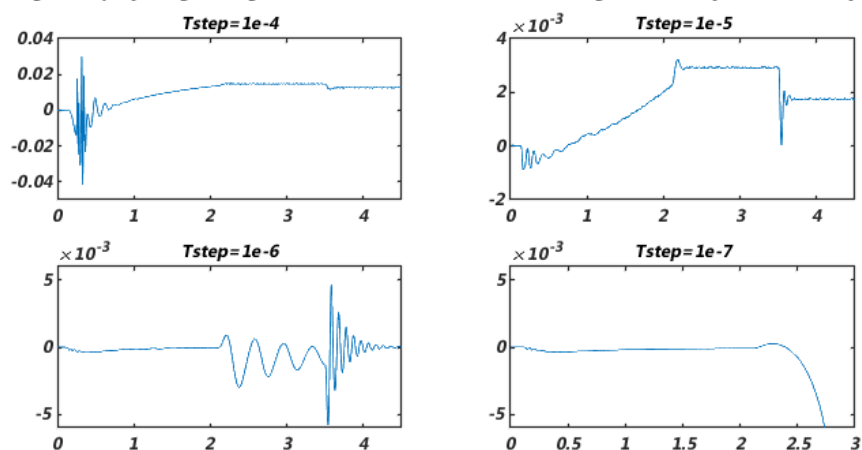
**Regulacijsko odstupanje struje statora u t osi za solver ode4(Runge-Kutta) i vrijeme uzorkovanja**



**SL. 5.43:** Prikaz regulacijskog odstupanja struje statora u t osi sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode4(Runge-Kutta)

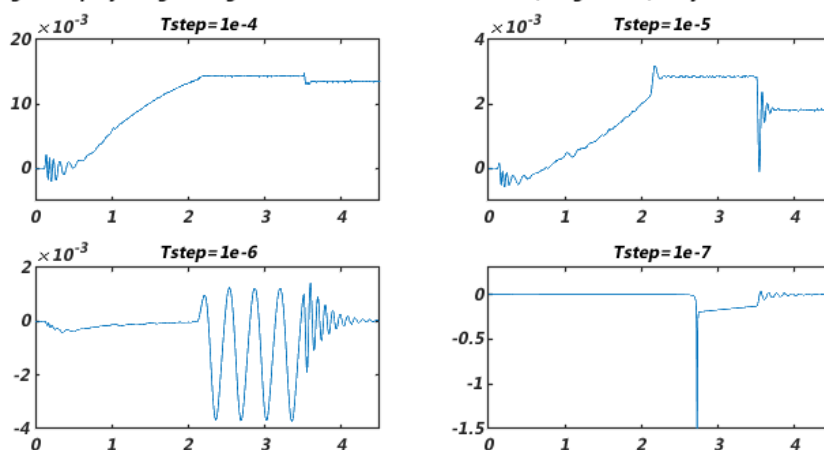
Analogno prethodnom objašnjenju za regulacijska odstupanja brzine vrtnje rotora, povučena paralela sa regulacijskim odstupanjima pripadnih signala prethodno objašnjenog *solver*-a vrijedi i za regulacijsko odstupanje struje statora u  $m$  i  $t$  osi. Dakle, izneseno objašnjenje slijeda događaja koji opisuju regulacijsko odstupanje struje statora u  $m$  osi i regulacijsko odstupanje struje statora u  $t$  osi, nastalo kao rezultat rješenja modela *ode1* *solver*-om vrijedi i za prikaze na slikama 5.40, 5.41, 5.42 i 5.43. Također, valja još jednom naglasiti da i u slučaju regulacijskog odstupanja struje statora u  $m$  kao i u  $t$  osi, primjena *ode4* *solver*-a daje poboljšana odstupanja odnosno točnije procijenjene vrijednosti u komparaciji sa prethodno analiziranim odstupanjima odgovarajućih signala *ode1* *solver*-a. Ponovno se poboljšanja u odstupanjima bilježe za sva vremena uzorkovanja, a najuočljiviji napredak se opet bilježi ukoliko se usporede rezultati ova dva *solver*-a za vrijeme  $T = 10^{-4}$ .

Reg. odstupanje magnetskog toka rotora u m osi za solver ode4(Runge-Kutta) i vrijeme uzorkovanja



SL. 5.44: Prikaz regulacijskog odstupanja magnetskog toka rotora u m osi sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode4(Runge-Kutta)

Reg. odstupanje magnetskog toka rotora u m osi za solver ode4(Runge-Kutta) i vrijeme uzorkovanja



SL. 5.45: Prikaz regulacijskog odstupanja magnetskog toka rotora u m osi sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode4(Runge-Kutta)

Na slikama 5.44 i 5.45 prikazana su regulacijska odstupanja magnetskog toka rotora u m osi za obje povratne veze kao rezultat primjene ode4 solver-a. U usporedbi sa prethodno analiziranim regulacijskim odstupanjima magnetskog toka rotora uz ode1 solver i regulacijska odstupanja toka rotora su primjenom ode4 solver-a poboljšana što ukazuje na povećanu točnost rezultata simulacije prilikom primjene ode4 solver-a.



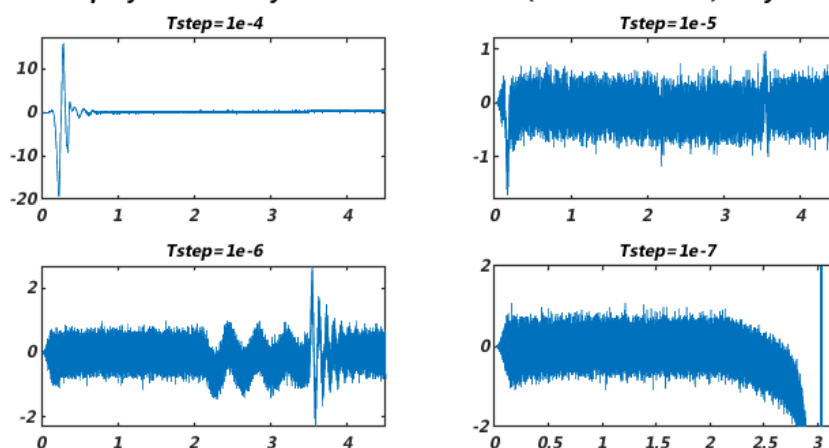
## Runge-Kutta metoda petog reda

Dormand-Prince metoda na kojoj se temelji naredni analizirani *solver ode5* i njegov utjecaj na odzive je također metoda iz obitelji Runge-Kutta numeričkih metoda. Ovu metodu karakterizira sedam faza pri čemu se koristi šest evaluacija funkcija po koraku jer ima svojstvo (engl. *first same as last*) odnosno, prvi jednak posljednjem prema čemu se posljednja faza trenutnog koraka računa u istoj točki kao prva faza idućeg koraka. Dakle, sljedeća vrijednost  $y_{k+1}$  se određuje na temelju sadašnje vrijednosti  $y_k$  i ponderiranog prosjeka šest koraka, gdje je svaki korak umnožak veličine koraka uzorkovanja to jest vremena uzorkovanja  $h$  i procijenjenog nagiba određenog funkcijom  $f$ . Pri čemu su [56]:

- $k_1$ ; jednako kao kod prethodnih metoda, korak određen nagibom na početku intervala koristeći vremensku derivaciju od  $y$  - Euler metoda
- $k_2, k_3, k_4$  i  $k_5$  su koraci temeljeni na nagibu, na redom 0.2, 0.3, 0.8 i 0.9 djela intervala, koristeći međusobne kombinacije
- $k_6$  je korak određen nagibom na kraju intervala također korištenjem kombinacija drugih  $k_i$

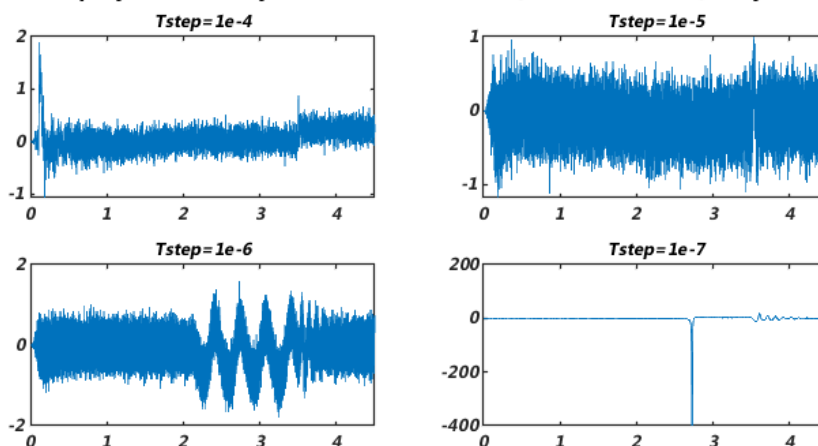
Dormand i Prince su odabrali koeficijente svoje metode s ciljem minimiziranja pogreške rješenja petog reda. To je glavna razlika u odnosu na Runge-Kutta metodu četvrtog reda jer je sada pogreška metode jednaka  $O(h^5)$ , prema čemu bi ova metoda numeričke integracije na kojoj se temelji *solver ode5*, trebala očekivano dati najtočnije rezultate odziva u pogledu stabilnosti i konvergencije, a samim time i najmanja regulacijska odstupanja. Iduće slike prikazuju regulacijska odstupanja u brzini vrtnje rotora, struji statora u  $m$  i  $t$  osi i magnetskom toku rotora u  $m$  osi za sva četiri vremena uzorkovanja, obje povratne veze i sada primjenu *ode5 solver-a*:

**Regulacijsko odstupanje brzine vrtnje rotora za solver ode5(Dormand-Prince) i vrijeme uzorkovan**



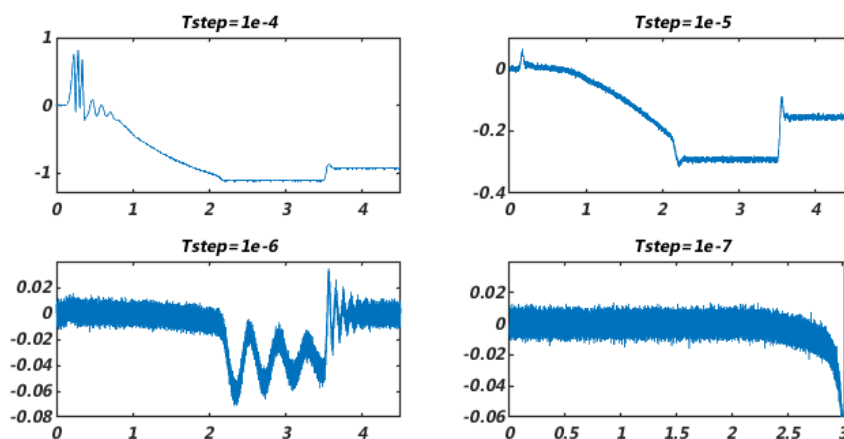
**SL. 5.46:** Prikaz regulacijskog odstupanja brzine vrtnje rotora sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode5(Dormand-Prince)

**Regulacijsko odstupanje brzine vrtnje rotora za solver ode5(Dormand-Prince) i vrijeme uzorkovanja**



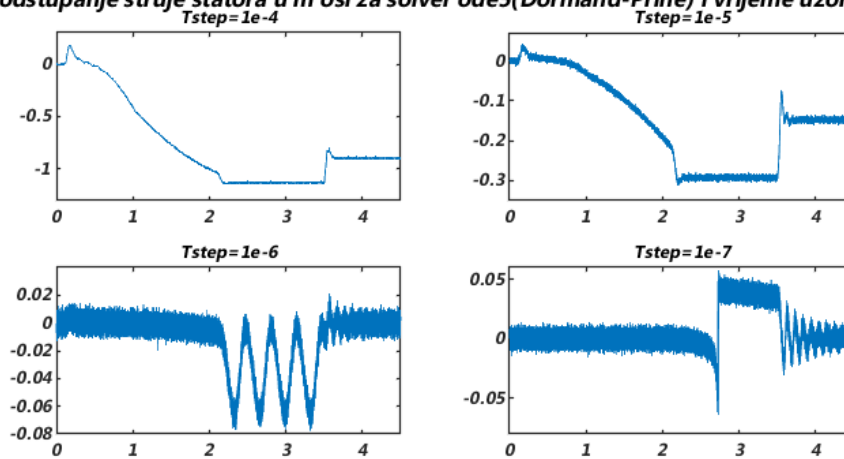
**SL. 5.47:** *Prikaz regulacijskog odstupanja brzine vrtnje rotora sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode5(Dormand-Prince)*

**Reg. odstupanje struje statora u m osi za solver ode5(Dormand-Prince) i vrijeme uzorkovanja**



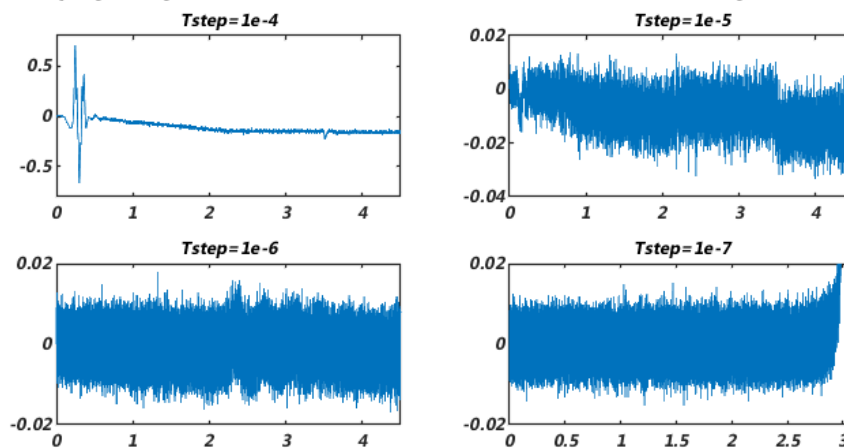
**SL. 5.48:** *Prikaz regulacijskog odstupanja struje statora u m osi sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode5(Dormand-Prince)*

**Reg. odstupanje struje statora u m osi za solver ode5(Dormand-Prine) i vrijeme uzorkovanja**



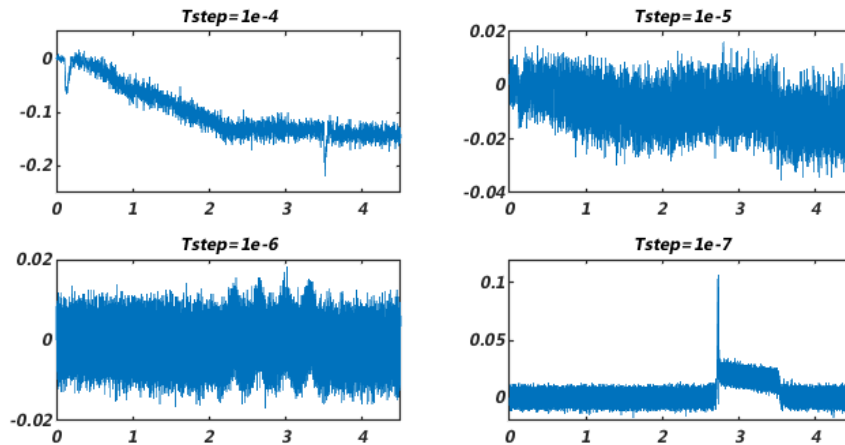
**SL. 5.49:** *Prikaz regulacijskog odstupanja struje statora u m osi sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode5(Dormand-Prince)*

**Reg. odstupanje struje statora u t osi za solver ode5(Dormand-Prince) i vrijeme uzorkovanja**



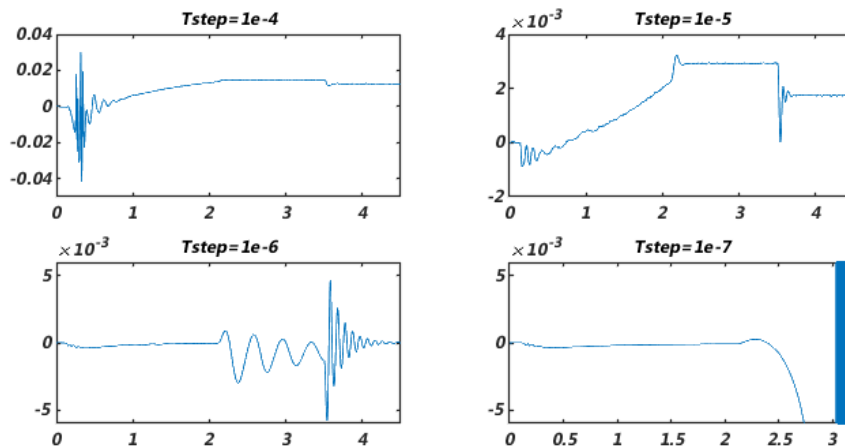
**SL. 5.50:** *Prikaz regulacijskog odstupanja struje statora u t osi sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode5(Dormand-Prince)*

**Reg. odstupanje struje statora u t osi za solver ode5(Dormand-Prince) i vrijeme uzorkovanja**



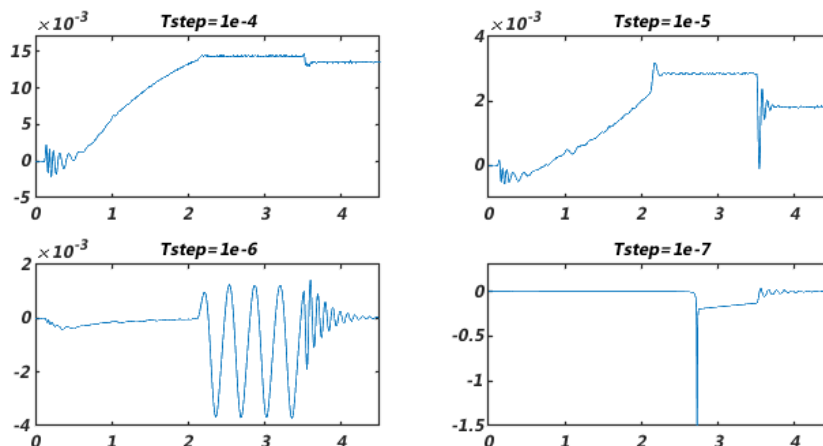
**SL. 5.51:** *Prikaz regulacijskog odstupanja struje statora u t osi sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode5(Dormand-Prince)*

**Reg. odstupanje magnetskog toka rotora u m osi za solver ode5(Dormand-Prince) i vrijeme uzorkovanja**



**SL. 5.52:** *Prikaz regulacijskog odstupanja magnetskog toka rotora u m osi sa EKF-om u povratnoj vezi u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode4(Dormand-Prince)*

Reg. odstupanje magnetskog toka rotora u m osi za solver ode5(Dormand-Prince) i vrijeme uzorkovanja



**SL. 5.53:** Prikaz regulacijskog odstupanja magnetskog toka rotora u m osi sa idealnom povratnom vezom u ovisnosti o različitim vremenima uzorkovanja za solver ode4(Dormand-Prince)

Kako bi se shvatila srž svega prethodno prikazanog od naročite važnosti je usporedba odgovarajućeg regulacijskog odstupanja iste varijable pri primjeni svakog pojedinog *solver*-a. Tada se mogu jasno vidjeti razlike tri *solver*-a različitih stupnjeva za ista vremena uzorkovanja. Ovom usporedbom dolazi se do zaključka da *ode5(Dormand-Prince)* i *ode4(Runge-Kutta)* u odnosu na *ode1(Euler)* daju točnije rezultate što je i potkrijepljeno činjenicom da *solver* višeg reda kako je rečeno, rezultira boljim učinkom zbog prirode pripadne numeričke pogreške pojedine metode. U tom smislu, ukoliko se usporedi npr., rezultat djelovanja *ode1 solver*-a to jest regulacijsko odstupanje bilo koje varijable u slučaju vremena uzorkovanja  $T = 10^{-4}$ , sa rezultatom *ode5* ili *ode4 solver*-a za isto vrijeme uzorkovanja, jasno je da regulacijsko odstupanje kod *ode5* i *ode4* ima značajno manji iznos, manje oscilacije vrijednosti i procijenjeni signal puno brže dostiže konvergenciju stvarnog iznosa. Veoma bitan zaključak koji je proizašao na temelju analize regulacijskih odstupanja jest da su za isto vrijeme uzorkovanja što je *solver* računalno složeniji rezultati simulacije točniji.

Također, u slučaju smanjenja vremena uzorkovanja do određene vrijednosti jasno je uočljivo da su odzivi u smislu stabilnosti i konvergencije poboljšani kod primjene sva tri *solver*-a pojedinačno. Razlog toga je u numeričkoj pogrešci pojedine metode i njezinim komponentama, odnosno iteracijskoj i pogrešci zaokruživanja. Za pogrešku Euler metode rečeno je da iznosi  $O(h^2)$ , dok je pogreška Runge-Kutta metode četvrtog reda jednaka  $O(h^4)$ , a pogreška Runge-Kutta metode petog reda, odnosno Dormand-Prince metode je jednaka  $O(h^5)$ . Kako bi se dobila jasnija slika tendencije promjene ovih pogrešaka, mogu se teoretski uzeti na razmatranje dva slučaja i to takva da je npr., u prvom slučaju  $h$  veličina koraka, odnosno vrijeme uzorkovanja jednako  $h = h$  a u drugom slučaju da je vrijeme uzorkovanja jednako  $h = \frac{h}{2}$ , tada za pogreške pripadnih metoda vrijedi:

- pogreška Runge-Kutta metode prvog reda pri vremenu uzorkovanja  $h$ :

$$e(y(t), h) \approx h^2$$

za vrijeme uzorkovanja  $\frac{h}{2}$  vrijedi:

$$e(y(t), h) \approx \frac{h^2}{4} \approx \frac{1}{4}e(y(t), h)$$

dakle, u slučaju da se veličina koraka odnosno vrijeme uzorkovanja smanji za faktor 2, pogreška Euler metode će se smanjiti za 4 puta.

- pogreška Runge-Kutta metode četvrtog reda za vrijeme uzorkovanja  $h$ :

$$e(y(t), h) \approx h^4$$

dok za vrijeme uzorkovanja  $\frac{h}{2}$  vrijedi:

$$e(y(t), h) \approx \frac{h^4}{16} \approx \frac{1}{16}e(y(t), h)$$

Pogreška Runge-Kutta metode četvrtog reda će se prilikom smanjenja vremena uzorkovanja za faktor 2 smanjiti za 16 puta.

- pogreška Runge-Kutta metode petog reda za vrijeme uzorkovanja  $h$  jednaka je:

$$e(y(t), h) \approx h^5$$

dok je za vrijeme uzorkovanja  $\frac{h}{2}$  pogreška jednaka:

$$e(y(t), h) \approx \frac{h^5}{32} \approx \frac{1}{32}e(y(t), h)$$

Pogreška Runge-Kutta metode petog reda, ukoliko se vrijeme uzorkovanja smanji za faktor  $\frac{1}{2}$  će se smanjiti za 32 puta.

Dakle, pogreške svih metoda prilikom smanjenja vremena uzorkovanja bi se trebale načelno smanjivati, s time što je smanjenje s faktorom  $\frac{1}{16}$  kao i smanjenje s faktorom  $\frac{1}{32}$ , značajno više u odnosu na smanjenje pogreške prethodne metode. Iz ove analize se zaključuje da bi svaka pojedina metoda trebala dati točnije rezultate glede stabilnosti i konvergencije prilikom smanjenja vremena uzorkovanja jer se smanjenjem vremena uzorkovanja posljedično smanjuje iteracijska pogreška, a prema tome i ukupna numerička pogreška metode. To jest, Runge-Kutta numeričke metode održavaju stabilnost i konvergenciju uz smanjenje vremena uzorkovanja ali je veoma bitno znati i naglasiti da, stabilnost sustava postavlja granice vremena uzorkovanja. Odnosno, smanjenjem vremena uzorkovanja za svaku pojedinu metodu bi se trebala dobiti stabilnija rješenja ali pod uvjetom da vrijeme uzorkovanja ne postane premalo i ne padne ispod optimalne vrijednosti vremena uzorkovanja, zbog pogreške zaokruživanja. Naime prema izrazu 5-144, kako se vrijeme uzorkovanja smanjuje pogreška iteracije se smanjuje jer je iteracijska pogreška direktno proporcionalna sa vremenom uzorkovanja. Budući da je pogreška zaokruživanja obrnuto proporcionalna vremenu uzorkovanja, kako se vrijeme uzorkovanja smanjuje iznos ove pogreške se povećava [53]. U skladu s time ukupna numerička pogreška se smanjenjem vremena uzorkovanja smanjuje kako se smanjuje iteracijska pogreška do određene optimalne vrijednosti vremena uzorkovanja koje u ovom radu na temelju razmotrenih prikaza odgovara vrijednosti  $T = 10^{-5}$ , pri kojoj dominantno postane povećanje pogreške zaokruživanja te onda uslijed daljnjeg smanjenja vremena uzorkovanja numerička pogreška raste.

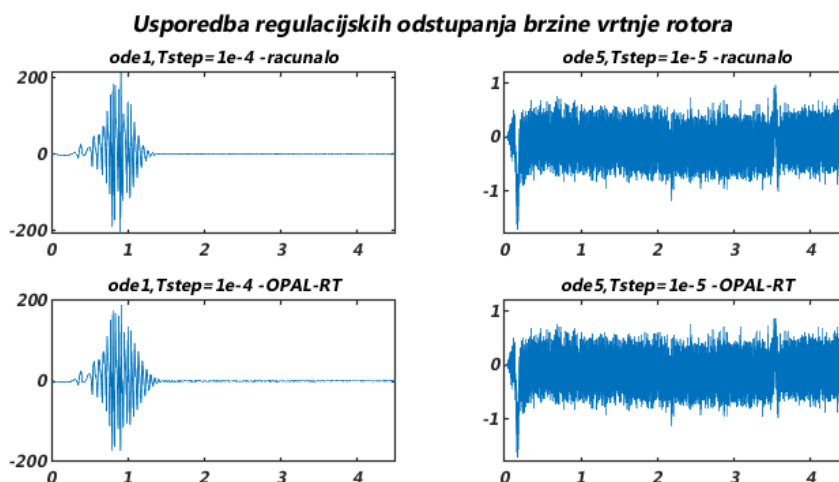
Budući da je prilikom promotrenih regulacijskih odstupanja svih varijabli od interesa, manja vrijednost regulacijskog odstupanja kod idealne povratne veze u odnosu na onu s *Extended Kalman filtrom*, može se zaključiti da na iznos regulacijskog odstupanja - reziduala osim numeričke pogreške primjenjivanog *solver*-a vjerojatno utječe i sama slučajna pogreška nastala zbog strukture modela kao posljedice primjene algoritma *EKF*-a, prisustva šuma i linearizacije modela.

### 5.3.4. Usporedba rezultata s OPAL-RT-a i Matlab-a računala

OPAL je simulator u stvarnom vremenu koji je najprihvaćenija platforma za simulacije od strane korisnika u industriji i u akademskoj zajednici. Razlog primjene istoga u ovom radu leži u problemu smanjenja vremena uzorkovanja koje direktno utječe na povećanje trajanja izvršavanja simulacije. Zbog svoje robusnosti, brzine proračuna modela i visoke razine preciznosti, a u cilju smanjenja trajanja izvršavanja simulacije posegnulo se za rješenjem u vidu simulatora. Međutim, prilikom analize kako je već prethodno spomenuto, ustanovljeno je da OPAL posjeduje ograničenja na rad s vremenom uzorkovanja  $T = 10^{-6}$ . Usprkos tome, rezultati dobiveni simulacijom modela na OPAL-u poslužili su u svrhu usporedbe s onima dobivenim rješavanjem modela u Matlab Simulink-u računala.

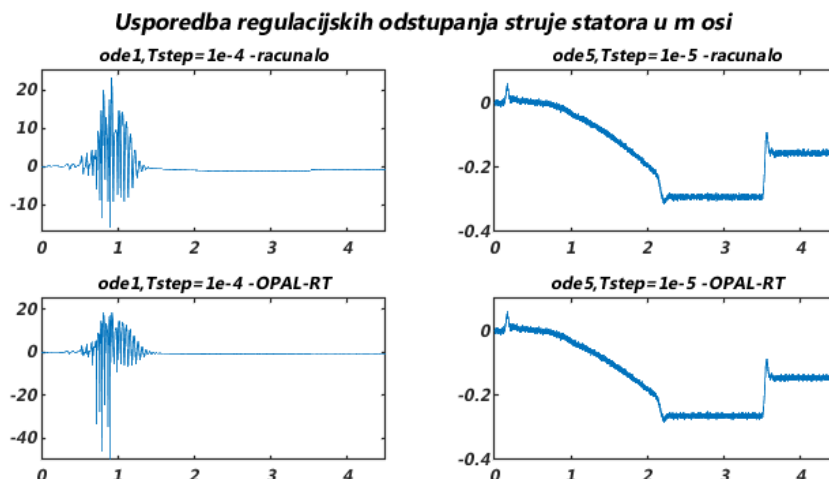
OPAL-RT-ov OP5031 je stvarno vremenski simulator koji sadržava mikroprocesor i operativni sustav linux. OP5031 je uparen sa OP5600 ekspanzijskom jedinicom (engl. *expansion box*) koja omogućava proširenje I/O komunikacijskih kanala za platformu simulatora, pružajući najširi izbor mogućih simulacija i testiranja za različite primjene u industriji. Na stražnjem dijelu kućišta simulatora nalaze se dakle konektori za pristup I/O jedinica, kabel za napajanje kao i glavni prekidač. Programski paket RT- Lab koji je kompatibilan sa Matlab Simulink-om koristi se za simuliranje modela pomoću OPAL-a jer se upravo iz sučelja ovog programskog paketa pristupa Simulink modelu. Također, RT-lab sučelje omogućava snimanje podataka pomoću *recorder*-a tijekom izvršavanja simulacije koji su potrebni za daljnju analizu rezultata [57]. Za samu simulaciju modela potrebno je najprije prilagoditi simulacijski model radu simulatora, to jest kreirati SM podsustav (engl. *subsystem master*) i unutar njega implementirati model vektorski reguliranog asinkronog motora s *Extended Kalman filtrom* u povratnoj vezi. Ovaj podsustav mora biti na tzv., glavnoj razini (engl. *root level*) Simulink-a. Princip simulacije modela na OP5031 simulatoru je sljedeći [57]: najprije se putem naredbe *build* simulacijski model načinjen od diferencijalnih jednadžbi prevodi u C kod. Nakon toga se posredstvom naredbe *load* model učitava na simulator, a krajnji korak je izvršavanje simulacije istoimenom naredbom *execute*. Kao rezultat izvršavanja simulacije na OP5031 simulatoru dobiveni su podatci to jest procijenjene vrijednosti varijabli od interesa u *csv* formatu.

Usporedba rada OPAL simulatora i Matlab programskog okruženja s računala, temeljena je na analizi regulacijskih odstupanja svih triju varijabli: brzine vrtnje rotora, struje statora u  $m$  i  $t$  osi kao i magnetskog toka rotora u  $m$  osi. Pri tome je na razmatranje uzet najlošiji i najbolji slučaj u smislu vremena uzorkovanja kao i djelovanja *solver*-a. Na osnovu zaključaka donesenih u prethodnim poglavljima, najlošiji slučaj karakterizira najveće vrijeme uzorkovanja  $T = 10^{-4}$  i najniža razina složenosti *solver*-a, koja odgovara *ode1(Euler) solver*-u u čijoj pozadini je Runge-Kutta numerička metoda integracije prvog reda. Analogno tome, najbolji slučaj odgovara optimalnom vremenu uzorkovanja  $T = 10^{-5}$  pri kojem je regulacijsko odstupanje kod svih analiziranih *solver*-a minimalno i *ode5 solver* najvišeg reda točnosti s najnižom numeričkom pogreškom integracije.



SL. 5.54: Usporedba regulacijskih odstupanja brzine vrtnje rotora

Slika 5.54 prikazuje usporedbu regulacijskih odstupanja brzine vrtnje rotora nastalih kao rezultat rješavanja modela unutar Simulink-a na računalu i rješavanjem modela posredstvom simulatora OPAL-RT. Lijevi prikazi na slici odgovaraju najlošijem slučaju s računala i OPAL-a, dok desni prikazi predstavljaju najbolje slučajeve. Ono što se može zaključiti promatranjem ovih regulacijskih odstupanja jest da OPAL i Matlab s računala ne daju identične rezultate. To je naročito uočljivo kod lijevih prikaza gdje je korišten *ode1 solver*. Na njima je jasno vidljivo da je kod primjene OPAL-a potrebno dulje vrijeme da sustav ostvari konvergenciju, a ukoliko se preciznije promotri period nakon ostvarenja konvergencije može se uočiti i problem sa stabilnošću u obliku blage oscilatorne dinamike signala reziduala. Najbolji slučaj kod primjene OPALA i računala je približno jednak ali se također može uočiti blago odstupanje prilikom terećenja stroja u vremenu  $T = 3.5s$ .

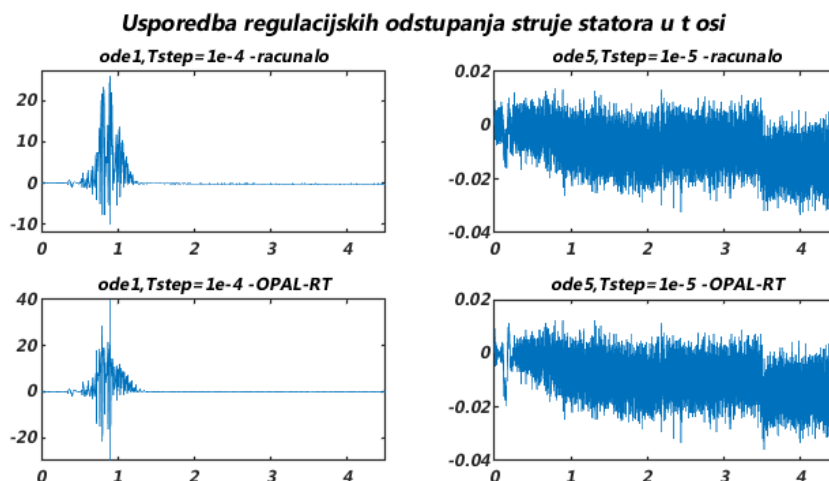


SL. 5.55: Usporedba regulacijskih odstupanja struje statora u m osi

Promatranjem prikaza regulacijskog odstupanja struje statora u  $m$  osi i usporedbom dobivenih reziduala rješavanjem modela na računalu s onim dobivenim primjenom simulatora, kako je već izneseno za regulacijska odstupanja brzine vrtnje rotora, najlošiji slučajevi se vidljivo razlikuju. Dakle, kod primjene OPAL-RT simulatora za vrijeme uzorkovanja  $T = 10^{-4}$  i *ode1 (Euler) solver*-a uočava se regulacijsko odstupanje većeg iznosa u periodu trajanja magnetizi-

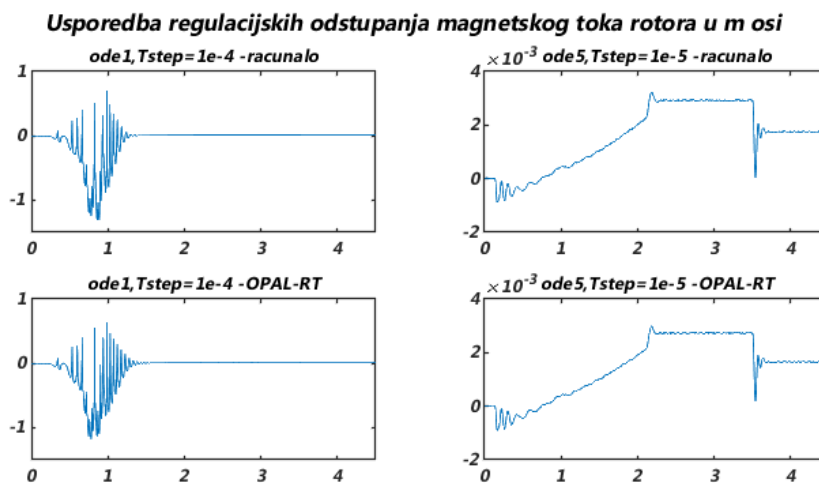


ranja stroja, u odnosu na isto dobiveno proračunom modela unutar Simulink-a na računalu. Najbolji slučaj regulacijskog odstupanja struje statora u  $m$  osi se minimalno razlikuje.



**SL. 5.56:** *Usporedba regulacijskih odstupanja struje statora u  $t$  osi*

Analogno prethodno iznesenom za struju statora u  $m$  osi i kod regulacijskih odstupanja struje statora u  $t$  osi najlošiji slučaj ponovno ima veći iznos regulacijskog odstupanja za slučaj rješavanja modela simulacijom na OPAL-RT simulatoru. Međutim, za slučaj struje statora u  $t$  osi, nakon što sustav ostvari konvergenciju bilježi se stabilniji odziv kod primjene OPAL simulatora za najlošiji slučaj u odnosu na primjenu Matlab Simulink-a s računala za isti slučaj. Kod razmatranja najboljeg slučaja uočljiva razlika regulacijskih odstupanja se javlja prilikom samog početka simulacije.



**SL. 5.57:** *Usporedba regulacijskih odstupanja magnetskog toka rotora u  $m$  osi*

Kod usporedbe regulacijskih odstupanja magnetskog toka rotora u  $m$  osi, još jednom se bilježi razlika pri najlošijem slučaju; sustavu je prilikom rješavanja modela na simulatoru OPAL potrebno dulje vrijeme da bi se ostvarila konvergencija signala. Dakle, na temelju promotrenih regulacijskih odstupanja svih varijabli od interesa može se zaključiti da simulacijski rezultati modela simuliranog na OPAL-RT-ovom OP5031 nisu identični rezultatima dobivenim rješavanjem simulacijskog modela implementiranog unutar Simulink-a na računalu, s time što su odstupanja izraženija za najlošiji slučaj u odnosu na ona za najbolji slučaj.

## 6. ZAKLJUČAK

Posljednjih godina predloženo je nekoliko pristupa za uklanjanje senzora iz industrijskih pogona s asinkronim motorima čija je uloga mjerenje brzine vrtnje rotora i njegovog magnetskog toka. Razlog sve češćih ovakvih stajališta je ekonomske i tehničke prirode, a s ciljem smanjena troškova i prvenstveno povećanja pouzdanosti cjelokupnog sustava. Stoga je nužna potreba za korištenjem pomoćnog dinamičkog sustava zvanog procjenitelj, čija je svrha kako i samo ime govori točna procjena varijabli od interesa. Da bi se vektorski upravljalo strojem potrebno je poznavati iznos i položaj magnetskog toka rotora za što se upravo i koristi estimator stanja jer se tok ne mjeri direktno, a da bi se dobila optimalna procjena ove i drugih željenih varijabli ista se vrši na temelju dostupnih mjerenja primjenom Kalman filtra. U posljednjem desetljeću *Extended Kalman filter* je najčešće korišten procjenitelj za stohastičke nelinearne sustave, zbog svoje sposobnosti da uzme u obzir nesigurnosti modela i inherentne nelinearnosti što je slučaj s asinkronim motorima. S druge strane, ključni problem primjene *Extended Kalman filtra* je taj što na njegovu izvedbu optimalne procjene varijabli, uvelike utječu parametri sustava i matrica kovarijanci šumova procesa i mjerenja  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ . Parametri ovih matrica se kao što je to izvedeno i u ovom radu uglavnom podešavaju metodom pokušaja i pogreški što je veoma zamoran proces. Osim toga, javljaju se i druge brojne komplikacije, a jedna od njih je generiranje matrice prelaza u svakom koraku za što se koristi zahtjevan proračun *Jacobian* matrica. Također, kako je riječ o nelinearnom modelu, linearizacija svakog vremenskog koraka može stvoriti dodatne pogreške i uzrokovati trajno odstupanje algoritma filtra. Dakle, implementacija samog *EKF*-a je složen proces. Usprkos tome rezultati računalne simulacije ovog rada, ukazuju na točnu i prihvatljivu izvedbu procjene brzine vrtnje rotora  $\omega_r$ , struje statora  $i_{s,mt}$ , kao i magnetskog toka rotora  $\psi_{r,mt}$  pri čemu regulacijska odstupanja svih triju željenih varijabli dokazuju učinkovitost realizacije glede stabilnosti i konvergencije sustava. Pokazano je da kada se koristi odgovarajući procjenitelj za vektorski upravljani asinkroni motor visokih performansi bez senzora, može se postići stabilan rad u širokom rasponu brzina što je naročito bitno za efikasno upravljanje pri čemu ključnu ulogu imaju odabrano vrijeme uzorkovanja i primjenjivani *solver*. U tom kontekstu pokazano je da smanjenje vremena uzorkovanja dovodi do poboljšanja rezultata zbog smanjenja iteracijske pogreške ali i da smanjenje ispod optimalne vrijednosti dovodi sustav do nestabilnosti zbog povećanja pogreške zaokruživanja i ispada svojstvenih vrijednosti sustava izvan jedinične kružnice, a posljedično produljuje vrijeme izvršavanja simulacije. Također je pokazano i da su za bilo koje vrijeme uzorkovanja što je *solver* računalno složeniji rezultati simulacije točniji. U skladu s provedenom analizom, najoptimalniji rad *Extended Kalman filtra* glede procjene varijabli stanja asinkronog motora, postiže se primjenom optimalnog vremena uzorkovanja u iznosu  $T = 10^{-5}$  koji se predaje kao fiksni korak *ode5 solver*-u za rješavanje modela sustava unutar Simulink-a, iza kojeg stoji Dormand-Prince metoda s najmanjom pogreškom numeričke integracije. Na temelju primjene stvarno vremenskog simulatora OPAL-RT-ovog OP5031 zaključeno je da simulacijski rezultati modela implementiranog unutar Simulink-a na računala nisu identični rezultatima dobivenim simuliranjem modela na OPAL-RT-ovom OP5031.

## LITERATURA

- [1] Bimal K. Bose. *Modern Power Electronics and AC Drives*. Prentice Hall PTR, 2001.
- [2] F. Blaschke. Blaschke, f.: The principle of field orientation as applied to the new transvector closed-loop control system for rotating field machines. *siemens review* 34(5), 217-219. *Siemens-Rev.*, 39, 01 1972.
- [3] Peter S. Maybeck. *Stochastic models, estimation, and control*. ACADEMIC PRESS, INC. (LONDON) LTD., 1979.
- [4] Isao Takahashi and Toshihiko Noguchi. A new quick-response and high-efficiency control strategy of an induction motor. *IEEE Transactions on Industry Applications*, IA-22(5):820–827, 1986.
- [5] Mustapha Messaoudi, Kraim Habib, Ben Mouna, Sbita Lassaad, and Abdelkrim Mohamed Naceur. A Robust Sensorless Direct Torque of Induction Motor Based on MRAS and Extended Kalman Filter. *Leonardo Journal of Sciences*, 7, 06 2008.
- [6] F. Blaschke, J. van der Burgt, and A. Vandenput. Sensorless direct field orientation at zero flux frequency. In *IAS '96. Conference Record of the 1996 IEEE Industry Applications Conference Thirty-First IAS Annual Meeting*, volume 1, pages 189–196 vol.1, 1996.
- [7] Peter Vas. *Sensorless vector and direct torque control*. Oxford University Press, 1998.
- [8] Shuying Yang, Dawei Ding, Xi Li, Zhen Xie, Xing Zhang, and Liuchen Chang. A novel online parameter estimation method for indirect field oriented induction motor drives. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 32(4):1562–1573, 2017.
- [9] Angelo Accetta, Maurizio Cirrincione, Marcello Pucci, and Gianpaolo Vitale. Neural sensorless control of linear induction motors by a full-order luenberger observer considering the end-effects. In *2012 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, pages 1864–1871, 2012.
- [10] Robert H. Shumway. *Time series analysis and its applications with R examples*. Springer, 2011.
- [11] Paul C. Krause. *Analysis of electric machinery and drive systems*. Wiley, 2013.
- [12] Jan A. Melkebeek. *Electrical Machines and Drives Fundamentals and Advanced Modelling*. Springer Cham, 2018.
- [13] Tin Benšić. *Unapređenje estimacija parametara i varijabli stanja asinkronom stroja primjenom statističkih metoda*. PhD thesis, Fakulteta elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek, 2021.
- [14] Ned Mohan. *Electric machines and drives a first course*. Wiley, 2012.
- [15] R. H. Park. Two-reaction theory of synchronous machines generalized method of analysis-part i. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 48(3):716–727, 1929.
- [16] R. H. Park. Two-reaction theory of synchronous machines-ii. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 52(2):352–354, 1933.

- [17] P. C. Krause and C. H. Thomas. Simulation of symmetrical induction machinery. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 84(11):1038–1053, 1965.
- [18] Filip Halak. Promjena induktiviteta asinkronog motora za vrijeme direktnog zaleta. Master's thesis, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek, 2018.
- [19] Marjan Ugljar. Implementacija modulacije prostornog vektora na crio fpga platformi. Master's thesis, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek, 2018.
- [20] W. A. Lewis. A basic analysis of synchronous machines-part i. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. Part III: Power Apparatus and Systems*, 77(3):436–453, 1958.
- [21] Colm J. O'Rourke, Mohammad M. Qasim, Matthew R. Overlin, and James L. Kirtley. A geometric interpretation of reference frames and transformations: dq0, clarke, and park. *IEEE Transactions on Energy Conversion*, 34(4):2070–2083, 2019.
- [22] Tin Benšić. Analiza dinamičkih stanja sustava vlastite potrošnje hidroelektrane. Master's thesis, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Elektrotehnički fakultet, 2014.
- [23] Vukadinović Dinko. *Procjena brzine vrtnje vektorski upravljanoj asinkronog motora primjenom neuronske mreže*. PhD thesis, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, 2005.
- [24] Vaibhav Shah and Krishna Prakash N. Fpga implementation of sensorless field oriented current control of induction machine. In *2017 IEEE International Conference on Computational Intelligence and Computing Research (ICCIC)*, pages 1–5, 2017.
- [25] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, 82(1):35–45, mar 1960.
- [26] E. A. Wan and R. Van Der Merwe. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation. In *Proceedings of the IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium (Cat. No.00EX373)*, pages 153–158, 2000.
- [27] Hesam Khazraj, F. Faria da Silva, and Claus Leth Bak. A performance comparison between Extended Kalman filter and unscented kalman filter in power system dynamic state estimation. In *2016 51st International Universities Power Engineering Conference (UPEC)*, pages 1–6, 2016.
- [28] Michael Roth, Carsten Fritsche, Gustaf Hendebay, and Fredrik Gustafson. The Ensemble Kalman filter and its relations to other nonlinear filters. In *2015 23rd European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pages 1236–1240, 2015.
- [29] Jeffrey L. Anderson. Ensemble Kalman filters for large geophysical applications. *IEEE Control Systems Magazine*, 29(3):66–82, 2009.
- [30] Alapić Mihael and Velčić Igor. Izvod jednadžbi diskretnog kalmanovogfiltera. Technical report, Osječki matematički list 18, 105-122, 2018.
- [31] Lessard Laurent. Steady-state Kalman filter. Technical report, 2021.
- [32] Mihael Alapić. Kalmanovi filtri. Master's thesis, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, 2019.

- [33] Svanström Fredrik. Kalman filtering with a radar tracking implementation. Technical report, Linnaeus University, Department of mathematics, 2013.
- [34] Marija Mostarac. Primjena kalmanovog filtra za fuziju senzora. Technical report, Fakulteta elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek, 2021.
- [35] Tony Lacey. Tutorial: the kalman filter 11.1 introduction 11.2 mean squared error. 1998.
- [36] Qiang Li, Ranyang Li, Kaifan Ji, and Wei Dai. Kalman filter and its application. In *2015 8th International Conference on Intelligent Networks and Intelligent Systems (ICINIS)*, pages 74–77, 2015.
- [37] Roland Hostettler, Wolfgang Birk, and Magnus Lundberg Nordenvaad. Extended kalman filter for vehicle tracking using road surface vibration measurements. In *2012 IEEE 51st IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5643–5648, 2012.
- [38] Yibing Li, Mingyang Jiu, Qian Sun, and Yansong Wang. An improved target tracking algorithm based on extended kalman filter for uav. In *2018 IEEE Asia-Pacific Conference on Antennas and Propagation (APCAP)*, pages 435–437, 2018.
- [39] Tamer Habib. Simultaneous spacecraft orbit estimation and control based on gps measurements via extended kalman filter. *The Egyptian Journal of Remote Sensing and Space Science*, 16:11–16, 06 2013.
- [40] Lingling Fan and Yasser Wehbe. Extended kalman filtering based real-time dynamic state and parameter estimation using pmu data. *Electric Power Systems Research*, 103:168–177, 10 2013.
- [41] HongYu Li, Qunjing Wang, Fang Xie, Cungang Hu, and Xiwen Guo. Parameters estimation of im with the extended kalman filter and least-squares. In *2015 IEEE 10th Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA)*, pages 1625–1628, 2015.
- [42] Hamidreza Gashtil, Volker Pickert, Dave Atkinson, Damian Giaouris, and Mohamed Dahidah. A case study of real time implementation of extended kalman filter in dual core dsp for the on-line estimation of induction machine parameters. In *2019 IEEE 13th International Conference on Compatibility, Power Electronics and Power Engineering (CPE-POWERENG)*, pages 1–7, 2019.
- [43] K. El Merraoui and A. Ferdjouni. Detection of inter-turn short circuits in stator windings of im by extended kalman filters. In *22nd Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 275–280, 2014.
- [44] P. Kundur. *Power system stability and control*. McGraw-Hill, 1994.
- [45] Bartol Borozan and Zoran Tomljanovic. Stabilnost linearnih dinamičkih sustava. Technical report, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, 2021.
- [46] John Baras, Alain Bensoussan, and M. James. Dynamic observers as asymptotic limits of recursive filters: Special cases. *Siam Journal on Applied Mathematics - SIAMAM*, 48, 10 1988.
- [47] Arthur Krener. The convergence of the extended kalman filter. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 286:173–182, 01 2003.

- [48] Yongkyu Song and Jessy W. Grizzle. The extended kalman filter as a local asymptotic observer for nonlinear discrete-time systems. In *1992 American Control Conference*, pages 3365–3369, 1992.
- [49] Barbara F. La Scala, Robert R. Bitmead, and Matthew R. James. Conditions for stability of the extended kalman filter and their application to the frequency tracking problem. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 8(1):1–26, mar 1995.
- [50] K. Reif and R. Unbehauen. The extended kalman filter as an exponential observer for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47(8):2324–2328, 1999.
- [51] Francesco Alonge, Tommaso Cangemi, Filippo D’Ippolito, Adriano Fagiolini, and Antonino Sferlazza. Convergence analysis of extended kalman filter for sensorless control of induction motor. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 62(4):2341–2352, 2015.
- [52] Knut Rapp and Per-Ole Nyman. Stability properties of the discrete-time extended kalman filter. *IFAC Proceedings Volumes*, 37(13):1377–1382, 2004. 6th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems 2004 (NOLCOS 2004), Stuttgart, Germany, 1-3 September, 2004.
- [53] Robert Plato. *Concise Numerical Mathematics*. American Mathematical Society, 2003.
- [54] Aliyu B Kisabo, C.A. Osheku, Adetoro M.A. Landre, and Aliyu Funmilayo A. Ordinary differential equations matlab/simulink solutions. *International Journal of Scientific and Engineering Research*, Volume 3, Issue 8, August 2012.
- [55] Dunja Čosić. Runge kutta metode za numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Master’s thesis, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2018.
- [56] Liancun Zheng and Xinxin Zhang. *Modeling and Analysis of Modern Fluid Problems*. Elsevier Science and Technology Books, 2017.
- [57] Knol Kristian. Kosimulacijska analiza rada sinkronog motora sa permanentnim magnetima i izrazenom reluktancijom stvarnom vremenu. Master’s thesis, Kosimulacijska analiza rada sinkronog motora sa permanentnim magnetima i izrazenom reluktancijom stvarnom vremenu, 2022.

## SAŽETAK

U ovom diplomskom radu je najprije u sklopu uvoda iznesena motivacija primjene Kalman filtra kao procjenitelja stanja. Kako je u fokusu procjena varijabli asinkronog motora isti je u narednom poglavlju opisan od principa rada, preko teorije dvoosne transformacije do detaljnog izvoda matematičkog modela koji je temelj implementacije vektorske regulacije stroja. Potom je iznesena teorijska analiza Kalman filtra s pripadnim matematičkim konceptom, izvodom jednadžbi za linearni oblik filtra kao i objašnjenjem algoritma provođenja procjene varijabli. U četvrtom poglavlju prikazan je pregled primjene *Extended Kalman filtra* za nelinearne sustave, objašnjeni su procesi diskretizacije i linearizacije modela kao i algoritam izvedbe *EKF*-a. Na temelju dinamičke analize rada asinkronog motora koja je obrađena u prethodnim poglavljima prikazan je model vektorski upravljaniog asinkronog motora sa paralelno implementiranim *EKF*-om unutar Matlab Simulink-a. U sklopu analize rezultata detaljno je objašnjen koncept konvergencije i stabilnosti sa uvjetima ostvarenja istih. Prikazan je utjecaj izbora različitih vremena uzorkovanja na vladanje sustava. Nadalje je analiziran i utjecaj različitih *solver*-a za rješavanje sustava i njihovih numerički pogreški. Promotrena su regulacijska odstupanja svih procijenjenih varijabli i u konačnici je dana usporedba rada simulatora OPAL-RT sa Simulink-om računala.

**Ključne riječi:** Asinkroni motor, *Extended Kalman filter*, vrijeme uzorkovanja, solver, stabilnost, konvergencija, regulacijsko odstupanje

## ABSTRACT

In this master thesis, the motivation for applying the Kalman filter as a state estimator was first presented as part of the introduction. As the focus is on the estimation of the states of the asynchronous motor, it is described in the following chapter from the working principle, through the theory of two-axis transformation to the detailed mathematical model that is the basis of the implementation of the vector control of the machine. Then the theoretical analysis of the Kalman filter was presented with the corresponding mathematical concept, the derivation of the equations for the linear form of the filter, as well as the explanation of the Kalman filtering algorithm. In the fourth chapter, an overview of the application of the Extended Kalman filter for nonlinear systems is presented, the processes of discretization and linearization of the model are explained, as well as the algorithm of EKF. Based on the dynamic analysis of the operation of the asynchronous motor, which was processed in the previous chapters, the model of the vector-controlled asynchronous motor with parallel implementation of EKF within Matlab Simulink is presented. As part of the analysis of the results, the concept of convergence and stability is explained in detail with the conditions for their realization. The influence of the choice of different sampling times on the control of the system is shown. The influence of different solvers and their numerical errors was also analyzed. The residuals of all estimated variables were observed and finally a comparison of the operation of the OPAL-RT simulator with Simulink of the computer was given.

**Keywords:** Asynchronous motor, Extended Kalman filter, sample time, solver, stability, convergence, residual



## ŽIVOTOPIS

Rad je napisala Marija Mostarac, rođena 26. kolovoza 1999. godine u Žepču, Bosna i Hercegovina. Osnovnu školu pohađala je u istom gradu, gdje je kroz svih osam razreda postigla odličan uspjeh i uzorno vladanje te je osim pohađanja nastave sudjelovala na školskim i općinskim natjecanjima iz predmeta matematike i fizike, ostvarujući izvrsne rezultate. Po završetku osnovnoškolskog obrazovanja upisala je Opću gimnaziju u Katoličkom školskom centru "Don Bosco" u Žepču. Kroz četverogodišnji period također je sudjelovala na školskim natjecanjima iz matematike, gdje je u drugom razredu postigla plasman na federalno natjecanje u Stolcu, BiH. Stekla je priznanje učenika generacije za period 2014.-2018. Iste godine upisala je preddiplomski sveučilišni studij Elektrotehnike, na Fakultetu Elektrotehnike, Računarstva i Informatičkih tehnologija na Sveučilištu Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku. Na drugoj godini studija opredijelila se za izborni blok Elektroenergetika. Osim redovitog pohađanja kolegija, obnašala je dužnost demonstratora u sklopu kolegija Fizika, Osnove Energetske Elektronike kao i Primjenjena Energetska Elektronika. Prema Odluci Fakultetskog vijeća od 25. svibnja 2021. godine, uručeno joj je priznanje za postignut odličan uspjeh u studiranju. Nakon završenog preddiplomskog, u istoj obrazovnoj ustanovi upisala je i diplomski studij i to izborni blok Industrijska elektroenergetika - DEC. U razdoblju od 19. - 21. listopada 2022. godine sudjelovala je na petoj Međunarodnoj znanstvenoj konferenciji odnosno "International Conference on Smart System Technologies - SST" u ulozi prezentatora svojeg prvog znanstvenog rada pod naslovom "Impact of different noise distributions in the application of Kalman filter in sensor fusion". Stručnu praksu je obavila u tvrtci Sigmatel d.o.o. u Zagrebu u sklopu Laboratorija za istraživanje visokofrekvencijskih elektromagnetskih polja. Po Odluci Fakultetskog vijeća od 18. travnja 2023. godine ponovno joj je dodjeljeno priznanje za uspješnost u studiranju. Na temelju Statuta Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, a u skladu s Odlukom Senata pomenutog Sveučilišta od 26. travnja 2023. godine prof. dr. sc. Vlado Gubec dodjelio joj je Rektorovu nagradu za akademsku 2021./2022. godinu za izniman uspjeh na studiju s prosječnom ocjenom 5.0. Bila je među prvim licenciranim mažoretkinjama Bosne i Hercegovine, a osim brojnih smotri sudjelovala je na XII. Europskom prvenstvu mažoretkinja. Karate karijeru započela je 2007. godine u sastavu karate kluba "Viktorija" Žepče. Kao dugogodišnja državna prvakinja BiH u disciplini Kate, osiguravala je mjesto u reprezentaciji Bosne i Hercegovine. Osvajala je odličja na brojnim natjecanjima različitih razina, a 2015. godine postigla je zvanje Majstor karatea, odnosno nositelj crnog pojasa I-DAN, kao i mogućnost obnašanja uloge trenera nižih dobnih skupina.