

# Primjena Kalman filtera za procjenu stanja istosmjernog stroja

---

Ronta, Patricija

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:200:697559>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-20**

*Repository / Repozitorij:*

[Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek](#)



SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I  
INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA OSIJEK

Sveučilišni studij elektrotehnike

PRIMJENA KALMAN FILTERA ZA PROCJENU STANJA  
ISTOSMJERNOG STROJA

Završni rad

Patricija Ronta

Osijek, 2023.

**FERIT**FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA  
I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA **OSIJEK****Obrazac Z1P - Obrazac za ocjenu završnog rada na preddiplomskom sveučilišnom studiju**

Osijek, 14.09.2023.

Odboru za završne i diplomske ispite

**Prijedlog ocjene završnog rada na  
preddiplomskom sveučilišnom studiju**

<b>Ime i prezime Pristupnika:</b>	Patricija Ronta
<b>Studij, smjer:</b>	Sveučilišni prijediplomski studij Elektrotehnika i informacijska
<b>Mat. br. Pristupnika, godina upisa:</b>	4879, 29.07.2020.
<b>OIB Pristupnika:</b>	56608834119
<b>Mentor:</b>	prof. dr. sc. Marinko Barukčić
<b>Sumentor:</b>	dr. sc. Tin Benšić
<b>Sumentor iz tvrtke:</b>	
<b>Naslov završnog rada:</b>	Primjena Kalman filtera za procjenu stanja istosmjernog stroja
<b>Znanstvena grana rada:</b>	<b>Elektrostrojarstvo (zn. polje elektrotehnika)</b>
<b>Zadatak završnog rad:</b>	Potrebno je izvesti dinamički model istosmjernog stroja u prostoru stanja te izraditi simulacijski model. Na temelju izvedenog modela strukturirati Kalman filter za procjenu stanja stroja te na dobivenim podacima rekurzivnim postupkom procjenjivati stanje istosmjernog stroja. Proučiti i komentirati izbor vremena uzorkovanja na rad Kalman filtera. Sumentor: dr.sc.Tin Benšić Rezervirano za: Patricija Ronta
<b>Prijedlog ocjene završnog rada:</b>	Izvrstan (5)
<b>Kratko obrazloženje ocjene prema Kriterijima za ocjenjivanje završnih i diplomskih radova:</b>	Primjena znanja stečenih na fakultetu: 3 bod/boda Postignuti rezultati u odnosu na složenost zadatka: 3 bod/boda Jasnoća pismenog izražavanja: 3 bod/boda Razina samostalnosti: 3 razina
<b>Datum prijedloga ocjene od strane mentora:</b>	14.09.2023.
<b>Datum potvrde ocjene od strane Odbora:</b>	24.09.2023.
Potvrda mentora o predaji konačne verzije rada:	Mentor elektronički potpisao predaju konačne verzije.
	Datum:

**FERIT**FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA  
I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA OSIJEK**IZJAVA O ORIGINALNOSTI RADA**

Osijek, 25.09.2023.

**Ime i prezime studenta:**

Patricija Ronta

**Studij:**

Sveučilišni prijediplomski studij Elektrotehnika i informacijska tehnologija

**Mat. br. studenta, godina upisa:**

4879, 29.07.2020.

**Turnitin podudaranje [%]:**

0

Ovom izjavom izjavljujem da je rad pod nazivom: **Primjena Kalman filtera za procjenu stanja istosmjernog stroja**

izrađen pod vodstvom mentora prof. dr. sc. Marinko Barukčić

i sumentora dr. sc. Tin Benšić

moj vlastiti rad i prema mom najboljem znanju ne sadrži prethodno objavljene ili neobjavljene pisane materijale drugih osoba, osim onih koji su izričito priznati navođenjem literature i drugih izvora informacija. Izjavljujem da je intelektualni sadržaj navedenog rada proizvod mog vlastitog rada, osim u onom dijelu za koji mi je bila potrebna pomoć mentora, sumentora i drugih osoba, a što je izričito navedeno u radu.

Potpis studenta:

# SADRŽAJ

<b>1.</b>	<b>Uvod . . . . .</b>	<b>4</b>
1.1.	Zadatak završnog rada . . . . .	5
<b>2.</b>	<b>Pregled područja teme . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>3.</b>	<b>Teorijska podloga za primjenu Kalman filtra . . . . .</b>	<b>7</b>
3.1.	Algoritam Kalman filtera. . . . .	13
<b>4.</b>	<b>Primjena Kalman filtra na električnu mrežu. . . . .</b>	<b>17</b>
4.1.	Matematičko modeliranje elektrotehničkih sustava . . . . .	17
4.2.	Modeliranje mreže . . . . .	18
4.3.	Analiza procjene stanja mreže Kalman filtrom. . . . .	20
<b>5.</b>	<b>Primjena Kalman filtra na istosmjerni (DC) stroj . . . . .</b>	<b>43</b>
5.1.	Princip rada istosmjernog stroja. . . . .	43
5.2.	Matematički model istosmjernog stroja. . . . .	44
5.3.	Analiza procjene stanja istosmjernog stroja Kalman filtrom . . . . .	46
5.4.	Analiza simulacije Kalman filtra na istosmjerni stroj . . . . .	61
<b>6.</b>	<b>Zaključak. . . . .</b>	<b>69</b>
	<b>Sažetak . . . . .</b>	<b>72</b>
	<b>Abstract . . . . .</b>	<b>72</b>
	<b>Životopis . . . . .</b>	<b>73</b>

# 1. UVOD

U posljednjim desetljećima, primjena elektromotora, posebno istosmjernih (DC) strojeva, postala je široko rasprostranjena u različitim industrijama. Istosmjerni su strojevi zbog svoje jednostavnosti, pouzdanosti i visokog stupnja preciznosti poželjan izbor primjene u baterijskim sustavima, električnim vozilima, sustavima za napajanje te u industrijskim automatizacijskim sustavima. Međutim, kako bi se postigla optimalna performansa ovih strojeva, ključno je imati pravodobnu i preciznu informaciju o njihovom stanju.

Stanje je sustava skup varijabli koje opisuju trenutno fizičko ili matematičko stanje sustava u određenom vremenskom trenutku. Spomenute varijable mogu biti bilo koje kvantitativne varijable koje opisuju ponašanje sustava, a u kontekstu istosmjernog stroja primjeri tih varijabli uključuju brzinu vrtnje, struju, napon, položaj rotora, moment, temperaturu te ubrzanje. Procjena stanja sustava odnosi se na proces određivanja ili procjenu skupa varijabli koje opisuju trenutno stanje sustava, ali koje nisu direktno dostupne ili mjerljive.

Jedan je od načina ispitivanja procjene stanja sustava linearno filtriranje koje koristi linearni matematički model sustava i linearni algoritam za kombiniranje informacija iz matematičkog modela i mjerenja kako bi se procijenilo stanje sustava. Osnovna je svrha linearnog filtriranja procijeniti unutarnje stanje sustava na temelju vanjskih mjerenja. U počecima teorije filtriranja koja je započela Wienerovim filtrom 1940., linearni su filtri djelovali s ograničenim uspjehom. U kompleksnijim sustavima ili sustavima s nelinearnim modelima, klasični linearni filtri nisu bili dovoljno precizni i učinkoviti. Jedan je od glavnih problema bio taj što nije postojao optimalan način da se kombiniraju informacije iz matematičkog modela sustava i mjerenja kako bi se dobila najbolja procjena stanja. Također, rješavanje problema filtriranja podataka koji sadržavaju šum nije bilo dovoljno učinkovito. Procjena stanja istosmjernih strojeva igra ključnu ulogu u postizanju visoke učinkovitosti i pouzdanosti njihova rada, a jedna od takvih najpoznatijih tehnika, koja je unaprijedila i riješila spomenute probleme prvotnih linearnih filtra, je Kalman filter.

Pojam Kalmanova filtra datira u 1960. godinu kada je Rudolf Emil Kalman (1930. - 2016.) objavio vlastiti znameniti rad pod nazivom *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems* u kojem je elaborirao rekurzivno rješenje problema linearnog filtriranja diskretnih podataka. Konstituirao je problem u prostoru stanja (*eng. state-space*) što omogućava pregledan smještaj više varijabli ulaza i izlaza ovisni o vremenu i pruža veću praktičnost u odnosu na Wienerov filter. Kalman filter nudi procjene stanja sustava na temelju nepreciznih i nesigurnih mjerenja te kada se ono ne može direktno izmjeriti. Nadalje, na temelju njegovih prošlih procjena omogućuje predviđanje budućih stanja sustava. Prema tome, filter je potentan u nekoliko aspekata: podržava procjene prošlih, sadašnjih, pa čak i budućih stanja, a to može učiniti čak i kada je točna priroda modeliranog sustava nepoznata.

Cilj je ovog završnog rada istražiti primjenu Kalman filtra za procjenu stanja istosmjernog stroja. Rad će se usredotočiti na teorijske osnove Kalman filtra, promatrat će se sustav trećeg reda i sustav istosmjernog stroja opisanih odgovarajućim matematičkim modelima te će se putem MATLAB koda i MATLAB Simulinka izvršiti njegova primjena na prethodno spomenute sustave kako bi se evaluirala njegova učinkovitost, preciznost i važnost njegove primjene za procjenu stanja istosmjernog stroja koja može imati značajan utjecaj na različite industrije i doprinijeti napretku u području automatike i elektromotorike.

## 1.1. Zadatak završnog rada

Osnovni je zadatak ovog završnog rada izvesti dinamički model istosmjernog stroja u prostoru stanja te izraditi simulacijski model. Na temelju izvedenog modela strukturirati Kalman filter za procjenu stanja stroja te na dobivenim podacima rekurzivnim postupkom procjenjivati stanje istosmjernog stroja. Proučiti i komentirati izbor vremena uzorkovanja na rad Kalman filtra.

## 2. PREGLED PODRUČJA TEME

Estimatori su matematički algoritmi ili metode koji se koriste za procjenu nepoznatih parametara ili varijabli na temelju dostupnih podataka, a koriste se za stvaranje estimacija, odnosno procjena vrijednosti nepoznatih varijabli. U polju su elektrotehnike neizbježne situacije gdje su senzorska mjerenja podložna šumovima, izobličenjima i nepreciznostima. Estimatori omogućuju modeliranje ovih nesavršenosti i izračunavanje najboljih procjena stvarnih vrijednosti parametara sustava ili signala što je od značajne važnosti za optimizaciju performansi sustava te povećanje pouzdanosti mjerenja i upravljačkih sustava [1]. Međutim, neki su od glavnih problema estimatora i estimacija povezani s nesigurnostima, preciznošću i pouzdanošću procjena. Ovi se algoritmi oslanjaju na ograničene raspoložive podatke što inherentno donosi određenu mjeru nesigurnosti. Mjerenja nerijetko sadržavaju šum i nepotpunosti, dok modeli sustava mogu imati nedostatke koji rezultiraju nepreciznim ili nepouzdanim procjenama. Pored toga, može se pojaviti problem u izravnom mjerenju određene fizikalne veličine, a kao rješenje navedenih problema, aplicira se Kalman filter [2].

Kalman filter adaptivni je algoritam koji uključuje nesigurnosti i nepreciznosti u svoje modele, čime omogućuje precizniju i pouzdaniju procjenu stanja sustava. Kroz iterativno ažuriranje procjena na temelju novih informacija, Kalman filter pruža mogućnost boljeg modeliranja i rješavanja problema vezanih uz estimaciju u realnom vremenu [3]. Zbog svoje se univerzalnosti može primijeniti na različite vrste sustava, bez obzira na područje primjene. Prema tome, posebno je primjenjiv u elektrotehnici za procjenu stanja istosmjernih strojeva jer, kao adaptivni algoritam, omogućuje modeliranje realnog ponašanja istosmjernih strojeva u prisutnosti faktora poput šumova i varijacija u mjerenjima [4].

Prednosti istosmjernih strojeva leže u visokoj učinkovitosti, brzome odzivu na promjene opterećenja te u sposobnosti regeneracije energije. Naime, potencijalno nepredvidive promjene opterećenja te potreba za preciznom procjenom trenutnog i budućeg stanja i dinamike istosmjernih strojeva, koja je često otežana zbog nesavršenosti senzora, šuma i varijabilnosti okruženja, čine nedostatke istosmjernih strojeva. Upravo prema spomenutim nedostacima, Kalman filter pogodan je algoritam za ovakvu primjenu jer može kompenzirati šumove i nesavršenosti u mjerenjima te uzeti u obzir dinamiku sustava, čime se omogućuje točnija procjena stanja istosmjernih strojeva čak i u promjenjivim uvjetima rada [5].

Ovakva primjena sa sobom nosi prednosti u brzini i preciznosti procjene stanja stroja, u sposobnosti Kalman filtra za praćenjem brzih procjena istosmjernih strojeva te u optimalnoj procjeni što je od velike koristi za istosmjerne strojeve gdje je važno održavati stabilnost i kontrolirati rad [6]. S druge strane, nedostaci ovakve primjene uključuju: osjetljivost na početne uvjete, računalnu složenost te ovisnost o modelu, odnosno ako model nije točan ili se parametri mijenjaju tijekom vremena, tada to može rezultirati lošijim procjenama [7].

Unatoč navedenim nedostacima, Kalmanov filter ima široku primjenu u elektrotehnici i izvan nje. U elektrotehnici se koristi za praćenje stanja baterija, regulaciju brzine istosmjernih motora, upravljanje sustavima za napajanje i drugim aplikacijama [8], [4], [9], gdje je precizna procjena stanja važna. Također, granice primjena Kalman filtra dosežu još u područja medicine [10], zrakoplovnog inženjerstva [11], robotike te navigacije [12], [13], gdje se također susreću dinamički sustavi sa šumom i nesigurnostima.



### 3. TEORIJSKA PODLOGA ZA PRIMJENU KALMAN FILTRA

U ovome je poglavlju potrebno uvesti neke od temeljnih pojmova iz područja vjerojatnosti, statistike i linearnih sustava koji su neophodni za prihvaćanje složenih koncepata, izvođenja i načina rada Kalman filtra te za koncepciju primjene Kalman filtra na stvarni problem procjene stanja istosmjernog stroja.

Neki su od tih osnovnih pojmova sljedeći: uvjetna vjerojatnost (*eng. conditional probability*), slučajna varijabla, slučajni vektor i slučajan proces (*eng. random variable, random vector and random process*), normalna (Gaussova) distribucija (*eng. normal (Gaussian) distribution*), vremenski diskretan linearni sustav (*eng. discrete-time linear system*), osmotrivost sustava (*eng. observability of the system*), optimalne procjene (*eng. optimal estimation*) i rekurzija (*eng. recursion*).

#### Uvjetna vjerojatnost

U teoriji vjerojatnosti, dva su temeljna pojma eksperiment i događaj. Eksperiment predstavlja pažljivo osmišljeni proces ili situaciju koji ima potencijal za različite rezultate, poznate kao ishodi [14]. Događaj se odnosi na skup tih ishoda ili mogućih rezultata koji su relevantni za situaciju [14]. Drugim riječima, eksperiment je okvir unutar kojeg se provodi istraživanje nesigurnosti, dok događaj identificira specifične rezultate koji se mogu pojaviti unutar tog okvira. Na temelju ovih osnovnih pojmova, razvijaju se i ostali ključni aspekti teorije vjerojatnosti, uključujući koncept vjerojatnosti.

Vjerojatnost je kvantitativna mjera koja nam omogućava procjenjivanje izglednosti da će se određeni događaj ili skup događaja ostvariti. Ova konceptualna alatka igra ključnu ulogu u izražavanju nesigurnosti vezane uz ishode unutar određenog eksperimenta, situacije ili problema. Osim što omogućava razumijevanje vjerojatnih rezultata, vjerojatnost pruža osnovu za donošenje informiranih odluka u uvjetima nepotpunih informacija. Putem kvantifikacije izglednosti, vjerojatnost postaje ključno sredstvo za modeliranje slučajnosti i nesigurnosti.

Vjerojatnost da se dogodio neki događaj  $A$  računa se kao

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad (3-1)$$

pri čemu  $|A|$  označava broj povoljnih ishoda za događaj  $A$ , dok  $|\Omega|$  označava ukupan broj mogućih ishoda [15].

Teorija vjerojatnosti također uključuje koncept uvjetne vjerojatnosti. Uvjetna je vjerojatnost izvjesnost da će se događaj  $A$  dogoditi pod uvjetom da se događaj  $B$  već dogodio [15]. Ona omogućuje razumijevanje kako jedan događaj utječe na vjerojatnost drugog događaja uzimajući u obzir relevantne informacije. Uvjetna se vjerojatnost označava kao  $P(A|B)$  te se čita kao "vjerojatnost  $A$  pod uvjetom  $B$ " [15].

Matematički se izražava kao:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (3-2)$$

gdje  $P(A \cap B)$  predstavlja vjerojatnost da se istovremeno dogodi događaj  $A$  i događaj  $B$ , a  $P(B)$  predstavlja vjerojatnost događaja  $B$ .

## Slučajna varijabla, slučajni vektor te slučajan proces

Slučajna je varijabla ključni koncept u statistici i teoriji vjerojatnosti koji se koristi za opisivanje numeričkih vrijednosti povezanih s nasumičnim događajima. Ona djeluje kao most između matematičkog modeliranja nesigurnosti i stvarnih događaja. Slučajna se varijabla može definirati kao funkcija koja svakom ishodu u nekom eksperimentu ili događaju pridružuje numeričku vrijednost [14].

Slika se slučajne varijable, označena kao  $R(X)$ , odnosi na skup numeričkih vrijednosti koje slučajna varijabla  $X$  može poprimiti, bilo da su te vrijednosti diskretne ili kontinuirane. Ovisno o slici  $R(X)$ , postoje dvije vrste slučajnih varijabli: diskretne i kontinuirane. Diskretne slučajne varijable mogu poprimiti samo određene vrijednosti, tj. slika  $R(X)$  je konačan ili prebrojiv skup dok, s druge strane, kontinuirane slučajne varijable mogu poprimiti infinitezimalno mnogo vrijednosti unutar određenog raspona te je njihova slika  $R(X)$  neprebrojiv skup [14].

Diskretna se slučajna varijabla koristi za opisivanje i kvantificiranje nasumičnih događaja čiji su mogući rezultati izbrojivi i razdvojeni. U matematičkom smislu, diskretnu slučajnu varijablu  $X$  definiramo [15] kao funkciju

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (3-3)$$

pri čemu je  $\Omega$  skup svih mogućih ishoda eksperimenta, a  $\mathbb{R}$  skup realnih brojeva.

Diskretnu slučajnu varijablu zapisujemo tablično [15] u obliku

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix} \quad (3-4)$$

te ju nazivamo raspodjela (distribucija) od  $X$ . Prema (3-4) istaknuta su dva važna skupa brojeva. Jedan skup obuhvaća sve vrijednosti  $x_i, i \in \mathbb{N}$  koje slučajna varijabla  $X$  može poprimiti, stoga se takav skup odnosi na njenu sliku  $R(X)$ , a drugi je skup niz pripadnih vjerojatnosti  $p_i, i \in \mathbb{N}$  za koji vrijedi  $p_i = P(X = x_i)$  za  $x_i \in R(X)$  te označava vjerojatnost da će se dogoditi ishod  $x_i$  [15].

Kontinuirana se slučajna varijabla primjenjuje za izračunavanje nasumičnih događaja čiji su mogući rezultati beskonačno mnogo vrijednosti unutar određenog raspona. Matematički gledano, funkciju

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad (3-5)$$

za koju vrijedi

1.

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\}, x \in \mathbb{R} \quad (3-6)$$

što označava da za pojedinačni ishod  $\omega$  u skupu svih mogućih ishoda  $\Omega$  vrijedi da vrijednost neprekidne slučajne varijable  $X$  ne prelazi određenu numeričku vrijednost realnog broja  $x$ .

2. postoji nenegativna realna funkcija realne varijable  $f$ , takva da

$$P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(t)dt, x \in \mathbb{R} \quad (3-7)$$

što predstavlja vjerojatnost da će se dogoditi ishod iz skupa svih mogućih ishoda čija je vrijednost kontinuirane slučajne varijable manja ili jednaka od realnog broja  $x$ .

nazivamo kontinuirana slučajna varijabla [16], a funkciju  $f$  funkciju gustoće vjerojatnosti slučajne varijable  $X$ , pomoću koje se i zadaje neprekidna slučajna varijabla.

Slučajni je vektor koncept koji proširuje pojam slučajne varijable na više dimenzija [14]. Osim da se promatra pojedinačna slučajna varijabla, istovremeno se analizira više njih organiziranih kao vektor. Poput slučajnih varijabli, mogu biti diskretni i kontinuirani. Slučajni vektor

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (3-8)$$

sastoji se od  $n$  pojedinačnih slučajnih varijabli  $X_1, X_2, \dots, X_n$  te svaka od tih varijabli može imati svoju funkciju gustoće vjerojatnosti, distribuciju, očekivanje, varijancu i ostalo [17].

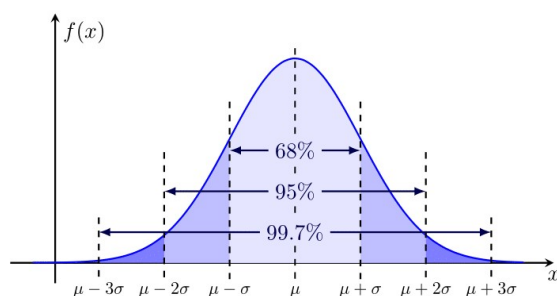
U različitim problemima optimizacije i donošenja odluka, prisutnost međusobno ovisnih varijabli može značajno utjecati na ishode. Upravo slučajni vektori omogućavaju analizu rizika i nesigurnosti te podržavaju bolje informirane odluke.

Slučajni je proces matematički model koji opisuje evoluciju vremenskih ili prostornih događaja koji se odvijaju nasumično [17]. U svojoj osnovi, slučajni je proces niz slučajnih varijabli koje su međusobno povezane vremenom ili prostorom. Mogu biti diskretni ili kontinuirani [14], ovisno o tome jesu li definirani u diskretnim vremenskim intervalima ili kontinuiranom vremenskom toku, odnosno diskretnim točkama u prostoru ili kontinuiranom prostoru. Od velike su važnosti jer osiguravaju analizu i modeliranje nesigurnosti i varijabilnosti u dinamičkim situacijama.

## Normalna (Gaussova) distribucija

Normalna je distribucija, etablirana i kao Gaussova distribucija, kontinuirana vjerojatnosna distribucija primijenjiva u statistici i vjerojatnosti za modeliranje slučajnih varijabli koje se pojavljuju u prirodi. Ona je dvoparametarska funkcija [15] definirana svojstvima srednje vrijednosti, odnosno očekivanja  $E(X) = \mu$  i varijance  $\text{Var}[X] = \sigma^2$ .

Krivulja je normalne distribucije simetrična i oblika zvona. Očekivanje ( $\mu$ ) označava centralnu točku krivulje, dok varijanca ( $\sigma^2$ ) mjeri raspršenost podataka oko srednje vrijednosti, tj. određuje širinu krivulje.



**Slika 3.1:** Graf funkcije gustoće za normalnu razdiobu

Prema slici 3.1, konstatira se kako normalna distribucija ima važno svojstvo poznato još po nazivu *68-95-99.7 pravilo*, odnosno oko 68% podataka pada unutar jedne standardne devijacije, oko 95% pada unutar dvije standardne devijacije i oko 99.7% pada unutar tri standardne devijacije.

Za neprekidnu slučajnu varijablu  $X$  s pripadnom funkcijom gustoće vjerojatnosti

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (3-9)$$

kaže se da ima normalnu distribuciju s parametrima  $\mu$  i  $\sigma$  [15], a pišemo  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ .

Kao poseban slučaj normalne distribucije, koristi se i standardizirana normalna razdioba ili jedinična normalna razdioba koja za parametre uzima  $\mu = 0$  i  $\sigma = 1$ , a označava se kao  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Uobičajeno je za parametre  $\mu$  i  $\sigma$  uzeti spomenute vrijednosti jer su tada podaci standardizirani i lakše se iščitavaju vrijednosti funkcije distribucije [15], stoga je primjena takve razdiobe uvelike praktična za izračune i analize.

## Vremenski diskretan linearan sustav

Vremenski je diskretan linearan sustav matematički model koji opisuje dinamiku sustava u diskretnom vremenskom koraku. U ovom su sustavu vrijednosti stanja i ulaza sustava definirane samo u određenim vremenskim točkama, obično jednako udaljenima.

Matematički, vremenski diskretan linearan sustav može se predstaviti pomoću rekurzivne diferencijalne jednadžbe ili jednadžbe razlike [18]. Spomenuti je sustav dan izrazom:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (3-10)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k), \forall k = 0, 1, 2, \dots \quad (3-11)$$

gdje su  $\mathbf{x}(k)$ ,  $\mathbf{u}(k)$ ,  $\mathbf{y}(k)$  redom vektori stanja, ulaza i varijabli izlaza u koraku  $k$  te  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  redom matrica parametara sustava, ulaza, izlaza i matrica direktnog prijenosa s realnim i konstantnim koeficijentima.

Prema jednadžbama (3-10) i (3-11) može se uočiti kako je jednadžba (3-10) ekvivalentna skupu od  $n$  linearnih jednadžbi diferencija [18], odnosno

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(k) + \sum_{l=1}^m b_{il}u_l(k); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3-12)$$

Jednadžba (3-11) ekvivalentna je skupu  $r$  linearnih algebarskih jednadžbi [18], odnosno

$$y_i(k) = \sum_{j=1}^n c_{ij}x_j(k) + \sum_{l=1}^m d_{il}u_l(k); \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (3-13)$$

Zaključno, vremenski diskretan linearan sustav opisan modelom (3-10) i (3-11) predstavlja linearnost sustava i konstantne matrice prijelaza i ulaza.

## Osmotrivost sustava

Osmotrivost je sustava ključni aspekt teorije upravljanja i analize sustava, a ona pokazuje da je sustav sposoban dati potpunu informaciju o svom trenutnom stanju kroz dostupna mjerenja [19]. Kada se kaže da je sustav osmotriv, to znači da se može nedvosmisleno odrediti trenutno stanje sustava iz podataka prikupljenih mjerenjem ulaza i izlaza sustava. Ovaj se koncept uglavnom odnosi na linearne sustave te se za linearne vremenski kontinuirane ili diskretne sustave, osmotrivost analizira pomoću matrice osmotrivosti.

Matrica osmotrivosti kvadratna je matrica s redovima koji predstavljaju mjerenja i stupcima koji predstavljaju stanje sustava [18]. Konstrukcija se matrice osmotrivosti temelji na matematičkim vezama koje povezuju mjerenja s unutarnjim stanjem sustava. Svaki element ove matrice odražava stupanj do kojeg svako mjerenje doprinosi razumijevanju određenog stanja sustava.

Ključni je pokazatelj osmotrivosti rang matrice osmotrivosti [19]. Ako se promotri linearan vremenski nepromijenjiv diskretan sustav zadan sljedećim oblikom

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \quad x(0) = a \in \mathbb{R} \quad (3-14)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (3-15)$$

dana se mjerenja  $\mathbf{y}(k)$  mogu računati preko sljedećih koraka:

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{C}\mathbf{x}(0) \quad (3-16)$$

$$\mathbf{y}(1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(1) = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}(0) \quad (3-17)$$

$$\mathbf{y}(2) = \mathbf{C}\mathbf{x}(2) = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{x}(0) \quad (3-18)$$

$$\vdots \quad (3-19)$$

$$\mathbf{y}(n-1) = \mathbf{C}\mathbf{x}(n-1) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}(0) \quad (3-20)$$

Ako se pomoću prethodnih korakara prikaže matrica

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

tada ona predstavlja matricu osmotrivosti [18]. Ukoliko matrica osmotrivosti ima puni rang [19], to implicira da su svi retci (mjerenja) ili stupci (stanja) unutar matrice međusobno linearno nezavisni te sva stanja sustava mogu biti potpuno rekonstruirana iz dostupnih mjerenja. S druge strane, ako matrica osmotrivosti nema puni rang, onda postoje neka stanja koja nisu potpuno vidljiva iz mjerenja, što može dovesti do nepreciznih ili netočnih procjena stanja sustava [2].

Kada se primjenjuje Kalmanov filter, od iznimne je važnosti da je odabrani sustav osmotriv. Ako sustav nije dovoljno osmotriv, odnosno ako određeni dijelovi sustava nisu u potpunosti vidljivi ili precizno promatrani, Kalmanov filter neće moći pružiti precizne i pouzdane procjene stanja. Stoga je razumijevanje osmotrivosti ključno za odabir prikladnih varijabli stanja i mjerenja, kao i za konfiguriranje Kalmanova filtra na način koji osigurava optimalne procjene stanja i točno praćenje dinamike sustava.

## Optimalne procjene

Optimalna je procjena estimacija koja minimalizira razliku između stvarne i procijenjene vrijednosti [20]. U općem smislu, ovo se može primijeniti ne samo na Kalmanov filter, već i na druge metode procjene i kontrole sustava.

Optimalne procjene koriste različite metode za poboljšanje svoje točnosti i pouzdanosti, uključujući

korištenje predikcijskih pogrešaka i reziduala. Predikcijska se pogreška koristi za procjenu nesigurnosti u predviđanju budućeg stanja sustava [15]. Obično se opisuje matricom kovarijance, koja s vremenom raste kako se nesigurnost povećava. Kako se rade nova predviđanja stanja, matrica kovarijance se ažurira kako bi uključila nova mjerenja.

Rezidual je na stanju razlika između stvarne, izmjerene vrijednosti i predviđene vrijednosti na temelju prethodnih procjena [15]. Ako je rezidual velik to može ukazivati na neprecizne ili neočekivane promjene u sustavu te se oni koriste za ispravljanje procjene bilance i smanjenje utjecaja takvih netipični i neočekivanih događaja.

Rezidual je na observaciji razlika između stvarnog mjerenja i očekivane vrijednosti na temelju procjene trenutnog stanja [15]. Taj se rezidual koristi za izračun inovacije i predstavlja nominalnu razliku između stvarnih i predviđenih mjerenja. Ova se inovacija koristi za ažuriranje procjene stanja i ispravljanje matrice kovarijance.

Gore navedeni koraci primjenjuju se u različitim metodama procjene stanja i upravljanja sustavom kako bi se postigla bolja točnost i pouzdanost procjene. To omogućuje precizno praćenje i kontrolu dinamičkih sustava, čineći najbolju procjenu ključnim alatom u raznim primjenama.

## Rekurzija

Rekurzija je matematički i računalni koncept koji se odnosi na postupak u kojem se neki problem ili funkcija rješava ili definira pomoću same sebe. Drugim riječima, rekurzija je pristup koji koristi ponavljanje iste operacije na manje sličnih podproblema sve dok se ne dođe do jednostavnog slučaja.

Metode kojima se koristi Kalman filter, osim što moraju matematički biti točne, moraju biti i računalno izvedive [2]. Konstatacijom da se računalna memorija ne preoptereti, svaka se nova procjena formira kao kombinacija stare, prethodne procjene i trenutnog mjerenja.

Osnovni su koraci u rekurzivnom procesu sljedeći:

1. Podjela problema: za početak se počne sa složenim problemom koji treba riješiti. Problem je podijeljen na manje, slične podprobleme te obično uključuje rekurzivno pozivanje iste funkcije ili algoritma za te podprobleme.
2. Rekurzivni poziv: za svaki se podproblem, ista funkcija ili algoritam poziva rekurzivno, dakle isti se postupak primjenjuje na svaki podproblem.
3. Rekurzijska osnova: rekurzija se zaustavlja kada se dođe do jednostavnog slučaja (obično dobro definiranog i rješenje se može izravno izračunati). Navedeno se zove još i rekurzivna baza.
4. Agregacija rezultata: agregiraju se rezultati dobiveni iz rješavanja manjih podproblema kako bi se dobio konačan rezultat složenog problema

### 3.1. Algoritam Kalman filtera

Kalmanov filter je, među ostalim, linearna kvadratna procjena (*eng. linear quadratic estimation*), optimalni statistički algoritam procjene slučajnog procesa modeliranog jednačinama u prostoru stanja. On je skup matematičkih jednačina koje pružaju učinkovito računalno (rekurzivno) rješenje metode najmanjih kvadrata (*eng. least-squares method*). Jedna je od mnogih njegovih benefita što ne zahtijeva puno memorije, odnosno ne treba čuvati nikakvu povijest, osim prethodnog stanja [21] te je vrlo brz što ga čini prikladnim za probleme u stvarnom vremenu i ugradbene računalne sustave (*eng. embedded systems*). Njegov algoritam procjene nalikuje algoritmu prediktor-korektor, kao što je prikazano na slici 3.2.



Slika 3.2: Algoritam Kalman filtera

Kalmanov filter sastoji se od dvije glavne jednačine: jednačine ažuriranja stanja (*eng. state update*) i jednačine ažuriranja mjerenja (*eng. measurement update*). Prije izvođenja jednačini Kalman filtra, neka se definira sustav opisan jednačinama

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \quad (3-22)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (3-23)$$

Navedeni sustav predstavlja stohastički linearni sustav. Stohastički linearni sustav matematički je model koji opisuje dinamiku sustava koja je istovremeno linearna i pod utjecajem stohastičkih (nasumičnih) varijacija ili fluktuacija. U takvim se sustavima, evolucija stanja ili izlaza sustava odvija prema linearnim zakonima, ali se uključuju nasumični procesi koji dodaju nesigurnost ili šum u sustav [22].

Jednačina (3-22) opisuje evoluciju stanja sustava u diskretnim vremenskim koracima  $k$  gdje je:

- $\mathbf{x}_k$  vektor stanja sustava u koraku  $k$
- $\mathbf{A}_k$  prijelazna matrica koja modelira dinamiku sustava između koraka  $k$  i  $k + 1$
- $\mathbf{B}_k$  matrica koja povezuje ulaz  $\mathbf{u}_k$  s promjenom stanja sustava
- $\mathbf{u}_k$  vektor ulaza u sustav u trenutku  $k$
- $\mathbf{w}_k$  predstavlja stohastički proces koji označuje nasumične fluktuacije, šum ili nesigurnosti u promjeni stanja sustava, procesni šum (*eng. process noise*)

Jednačina (3-23) predstavlja mjerenje izlaza sustava u diskretnim vremenskim koracima  $k$ . U ovome izrazu:

- $\mathbf{y}_k$  je vektor izlaza sustava u koraku  $k$
- $\mathbf{C}_k$  je matrica koja povezuje stanje sustava  $\mathbf{x}_k$  s izlazom  $\mathbf{y}_k$
- $\mathbf{v}_k$  označava stohastički proces koji opisuje nasumične fluktuacije, šum ili nesigurnosti u mjerenju izlaza sustava, mjerni šum (*eng. measurement noise*)

$\mathbf{w}_k$  i  $\mathbf{v}_k$  su slučajne varijable za koje se pretpostavlja da su neovisne jedna o drugoj, da odgovaraju bijelom šumu (*eng. white noise*) te se mogu opisati normalnom (Gaussovom) distribucijom [21]

$$p(\mathbf{w}) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}) \quad (3-24)$$

$$p(\mathbf{v}) \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}) \quad (3-25)$$

pri čemu je  $\mathbf{Q}$  matrica kovarijance procesnog šuma, a  $\mathbf{R}$  matrica kovarijance mjernog šuma. Matrica  $\mathbf{Q}$  opisuje nasumične fluktuacije ili šum koji proizlazi iz dinamike samog sustava koji se prati. Na primjer, ako sustav doživljava nepredvidive utjecaje poput vanjskih smetnji ili inherentnih nesavršenosti u modelu, matrica  $\mathbf{Q}$  modelira kako se ti poremećaji šire kroz stanja sustava tijekom vremena. S druge strane, matrica  $\mathbf{R}$  odražava nasumične fluktuacije ili šum koji se javlja u samim mjerenjima dobivenim iz stvarnog sustava. To je posebno relevantno kada se radi o sensorima koji često ne pružaju potpuno precizna mjerenja te su podložni različitim smetnjama i nesavršenostima. Stoga, matrica  $\mathbf{R}$  reflektira tu prirodnu nesigurnost u mjerenjima.

Prema prethodno objašnjenom pojmu rekurzije, definirat će se predikcija stanja  $\hat{\mathbf{x}}_k^{k-1}$  i procjena stanja  $\hat{\mathbf{x}}_k^k$ , [23]. Predikcija stanja je estimacija koja ukazuje na najbolju procjenu prije asimilacije mjerenja u koraku  $k$ , a procjena je stanja najbolja procjena trenutnog stanja sustava u trenutku  $k$ . Također, pogreške koje se javljaju prilikom estimacije neizbježne su, stoga definiramo dvije vrste pogrešaka:

1. Pogreška predikcije:

$$\mathbf{e}_k^{k-1} = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^{k-1} \quad (3-26)$$

2. Pogreška početne procjene stanja:

$$\mathbf{e}_k^k = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^k \quad (3-27)$$

Vektor greške  $\mathbf{e}_k$  predstavlja razliku između stvarnog stanja sustava i početne procjene stanja koju Kalman filter koristi kao početnu pretpostavku. Koristi se kako bi se korigirala procjena stanja na temelju novih mjerenja, a njegovi su elementi pozitivne varijance, odnosno  $\mathbf{e}_k = [\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2]$ . Da bi se izvele pridružene matrice kovarijance grešaka  $\mathbf{P}_k^{k-1}$  i  $\mathbf{P}_k^k$ , neka se započne od definicije varijance slučajne varijable, odnosno u ovom slučaju na vektor greške  $\mathbf{e}_k$

$$\text{Var}(e_{ki}) = E[(e_{ki} - \mu_i)^2] \quad (3-28)$$

Ako se pretpostavi da je očekivanje  $\mu = 0$  tada jednadžba (3-28) ima sljedeći oblik

$$\text{Var}(e_{ki}) = E[(e_{ki})^2] \quad (3-29)$$

Budući da je vektor greške  $\mathbf{e}_k$  dimenzija  $1 \times n$ , a matrice kovarijance grešaka su kvadratne matrice dimenzija  $n \times n$ , nadopisat će se transponirani vektor grešaka  $\mathbf{e}_k^T$  dimenzija  $n \times 1$ , čiji



su elementi označeni kao  $e_{kj}$ . Element je matrice  $\mathbf{P}_k$  na poziciji  $(i, j)$  definiran kao kovarijanca između  $e_{ki}$  i  $e_{kj}$ , odnosno

$$P_k(i, j) = \text{Cov}(e_{ki}, e_{kj}) = E[e_{ki}e_{kj}] \quad (3-30)$$

Ako su  $e_{ki}$  i  $e_{kj}$  pri  $i = j$  iste vrijednosti, tada će element matrice na toj pozici biti

$$P_k(i, j) = \text{Cov}(e_{ki}, e_{kj}) = E[e_{ki}e_{ki}] = E[(e_{ki})^2] = \text{Var}(e_{ki}) \quad (3-31)$$

Sada se može prikazati matrični zapis matrice kovarijanca grešaka kao

$$\mathbf{P}_k = \begin{bmatrix} \text{Var}(e_{k1}) & \text{Cov}(e_{k1}, e_{k2}) & \cdots & \text{Cov}(e_{k1}, e_{kn}) \\ \text{Cov}(e_{k2}, e_{k1}) & \text{Var}(e_{k2}) & \cdots & \text{Cov}(e_{k2}, e_{kn}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{Cov}(e_{kn}, e_{k1}) & \text{Cov}(e_{kn}, e_{k2}) & \cdots & \text{Var}(e_{kn}) \end{bmatrix} \quad (3-32)$$

Na temelju se ovog izvoda može zaključiti da su pridružene matrice kovarijanca grešaka

$$\mathbf{P}_k^{k-1} = E[\mathbf{e}_k^{k-1}(\mathbf{e}_k^{k-1})^T] \quad (3-33)$$

koja predstavlja matricu kovarijanca greške predikcije te

$$\mathbf{P}_k^k = E[\mathbf{e}_k^k(\mathbf{e}_k^k)^T] \quad (3-34)$$

i ona predstavlja matricu kovarijanca greške procjene stanja.

Pri izvođenju jednadžbi za Kalmanov filter, započinje se s ciljem pronalaska izraza za procjenu stanja. Ta se procjena računa kao linearna kombinacija predikcije i razlike između stvarnog mjerenja i predviđanja mjerenja [24], kako je formalizirano jednadžbom

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{K}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k)) \quad (3-35)$$

gdje se  $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$  supstituira s predikcijom  $\hat{\mathbf{x}}_k^{k-1}$  koja procjenjuje očekivano stanje sustava u sljedećem vremenskom koraku pomoću procjene stanja iz prethodnog vremenskog koraka. Stoga jednadžba (3-35) poprima oblik

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^{k-1} + \mathbf{K}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^{k-1}) \quad (3-36)$$

Jednadžba (3-35) opisuje korak ažuriranja procjene stanja u Kalmanovom filtru. Matrica  $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k$  opisuje predikciju stanja, a izraz  $\mathbf{y}_k - \mathbf{C}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k)$  predstavlja rezidual ili mjernu inovaciju koja označava razliku između stvarnog mjerenja  $\mathbf{y}_k$  i predviđenog mjerenja  $\mathbf{C}(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k)$  na temelju predikcije. Ukoliko je rezidual jednak nuli to znači da spomenuta dva mjerenja u potpunosti odgovaraju jedno drugome, odnosno nema nikakve razlike između predviđenih vrijednosti i stvarnih vrijednosti mjerenja.

Matrica  $\mathbf{K}$  u jednadžbi (3-35) i (3-36) naziva se matrica Kalmanovog pojačanja koja minimizira kovarijancu pogreške predikcije. Minimizacija se može postići na način da se prvo supstituira jednadžba (3-36) u jednadžbu (3-27). Nadalje, izvodi se deriviranje s  $\mathbf{K}$  i dobiveni se rezultat izjednačava s nulom u cilju minimiziranja traga matrice koji je jednak tragu transponirane matrice.

Jednadžbe ažuriranja stanja odgovorne su za predikciju i one glase [24]:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^{k-1} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}^{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (3-37)$$

$$\mathbf{P}_k^{k-1} = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}^{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q} \quad (3-38)$$

dok su za korekciju odgovorne jednađbe ažuriranja mjerenja [24] koje glase

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^{k-1}\mathbf{C}^T[\mathbf{C}\mathbf{P}_k^{k-1}\mathbf{C}^T + \mathbf{R}]^{-1} \quad (3-39)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k^k = \hat{\mathbf{x}}_k^{k-1} + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^{k-1}) \quad (3-40)$$

$$\mathbf{P}_k^k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k\mathbf{C})\mathbf{P}_k^{k-1} \quad (3-41)$$

Za izračunavanje jednađbi predikcije potrebno je inicijalizirati početna stanja, odnosno inicijalizirati  $\hat{\mathbf{x}}_0^0$  i  $\mathbf{P}_0^0$

## 4. PRIMJENA KALMAN FILTRA NA ELEKTRIČNU MREŽU

Predstojeće će se poglavlje posvetiti konceptu matematičkog modeliranja, pružajući temeljan pregled njegove važnosti u analizi elektrotehničkih sustava. Predstavit će se praktična primjena Kalman filtera na mrežu trećeg reda te će se detaljno opisati implementacija ovog sofisticiranog algoritma koristeći MATLAB kod i MATLAB Simulink okruženje. Izložit će se i komentirati rezultati simulacija kako bi se pružio dublji uvid u dobivene rezultate.

### 4.1. Matematičko modeliranje elektrotehničkih sustava

Elektrotehnički sustavi predstavljaju složene skupove međusobno povezanih električnih i elektromagnetskih komponenata, koji su ključni za različite svakodnevne i tehnološke potrebe. Oni omogućuju ne samo isporuku električne energije za osnovne funkcije, već i potporu naprednim inovacijama. Sustavi elektrotehnike obuhvaćaju raznolike komponente kao što su izvori napajanja, pasivni elementi poput otpornika, kondenzatora i induktora, te dinamičke komponente kao što su elektromotori i drugi uređaji. Njihova međusobna interakcija omogućuje precizno kontrolirano djelovanje i pruža funkcionalnost širokom spektru uređaja i aplikacija.

Kada je riječ o matematičkom modeliranju elektrotehničkih sustava, ono što je ključno je da nam ono služi za razumijevanje njihova ponašanja, optimizaciju njihovih performansi i razvoj novih tehnologija. Matematičko se modeliranje elektrotehničkih sustava temelji na pretvaranju stvarnog fizičkog sustava u matematički opis, čime se omogućuje analiza i simulacija njegova ponašanja.

Prilikom izvođenja matematičkog modela elektrotehničkog sustava, potrebno je raspisati odgovarajuće matematičke jednadžbe na temelju poznatih elektrotehničkih zakona i principa. Za složene električne mreže primjenjuju se Kirchoffovi zakoni. Kirchoffov zakon struje (KZS) glasi da za svaku Kirchoffovu mrežu [25], za svaki od njenih čvorova, u bilo kojem trenutku, algebarski zbroj struja grana spojenih na isti čvor jednak je nuli, odnosno

$$\sum_{k=1}^m a_{jk} i_k = 0 \quad (4-42)$$

gdje  $a_{jk}$  predstavlja 1 ili  $-1$  ovisno o podudarnosti referentnog smjera struje  $j$ -tog čvora s referentnim smjerom struje  $k$ -te grane, a  $m$  predstavlja ukupni broj grana mreže.

Kirchoffov zakon napona (KZN) glasi da za svaku Kirchoffovu mrežu, za svaku njenu petlju, u bilo kojem trenutku, algebarski zbroj napona grana duž jedne petlje jednak je nuli, odnosno

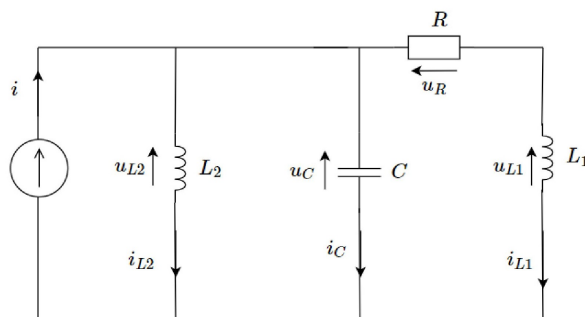
$$\sum_{k=1}^m b_{jk} u_k = 0 \quad (4-43)$$

gdje je  $b_{jk}$  1 ili  $-1$  ovisno o podudarnosti referentnog smjera napona  $j$ -te petlje s referentnim smjerom napona  $k$ -te grane, a  $m$  ukupan broj grana mreže.

Elektrotehnički sustavi često uključuju procese kao što su promjene u struji, naponu i drugim parametrima tijekom vremena. Kako bi se ovakve promjene precizno modelirale i opisao dinamički proces i interakcija unutar sustava, primjenjuju se diferencijalne jednadžbe [26].

## 4.2. Modeliranje mreže

Neka je dan sljedeći strujni krug sustava trećeg reda



**Slika 4.3:** Sustav trećeg reda

Za izvođenje matematičkog modela danog sustava trećeg reda, primijenit će se Kirchoffovi zakoni struje i napona te konstitutivne relacije napona induktiviteta i struje kapaciteta pomoću kojih će se izraziti varijable stanja  $i_{L1}$ ,  $i_{L2}$  i  $u_c$ . Primjenom Kirchoffova zakona struje, vrijede sljedeće jednadžbe:

$$i - i_{L2} - i_c - i_{L1} = 0 \quad (4-44)$$

$$i_c = i - i_{L2} - i_{L1} \quad (4-45)$$

Budući da je konstitutivna relacija struje kapaciteta

$$i_c = C \frac{du_c}{dt} \quad (4-46)$$

te ukoliko se pomoću nje izrazi napon kapaciteta kao

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C} i_c \quad (4-47)$$

i uvrsti jednadžba (4-45) u jednadžbu (4-47), dobiva se varijabla stanja  $u_c$ , odnosno

$$\frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C} (i - i_{L2} - i_{L1}) \quad (4-48)$$

Preko Kirchoffova zakona napona, raspiše se sljedeća jednadžba

$$u_c - Ri_{L1} - u_{L1} = 0 \quad (4-49)$$

Uvrštavanjem konstitutivne relacije za napon induktiviteta u jednadžbu (4-49), dolazi se do druge varijable stanja,  $i_{L1}$ .

$$\frac{di_{L1}}{dt} = \frac{1}{L1} u_{L1} = \frac{1}{L1} (u_c - Ri_{L1}) \quad (4-50)$$

Da bi se izrazila posljednja, treća varijabla stanja  $i_{L2}$ , potrebno je iz Kirchoffova zakona napona uočiti da vrijedi

$$u_{L2} = u_c \quad (4-51)$$

Kada se jednadžba (4-51) uvrsti u konstitutivnu relaciju napona induktiviteta, varijabla je stanja  $i_{L2}$  jednaka

$$\frac{di_{L2}}{dt} = \frac{1}{L2} u_{L2} = \frac{1}{L2} u_c \quad (4-52)$$

Nakon definiranja varijabli stanja, dani se sustav prikazuje u prostoru stanja u istome obliku kao što je prikazano u jednadžbama (5-68) i (5-69) te je konačan matematički model danog sustava trećeg reda

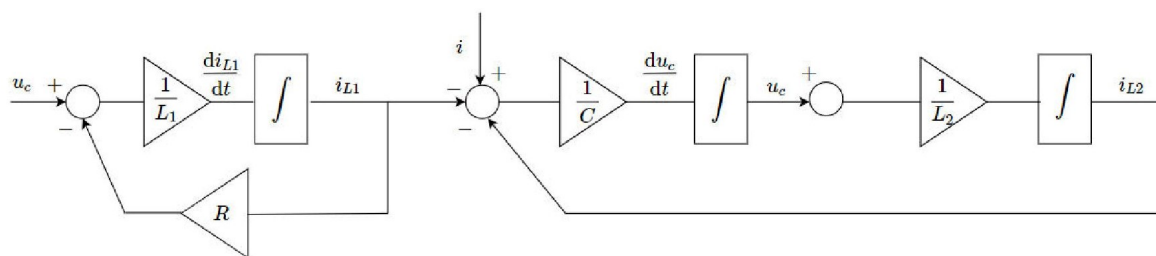
$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L_2} & 0 \\ -\frac{1}{C} & 0 & -\frac{1}{C} \\ 0 & \frac{1}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L2} \\ u_c \\ i_{L1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} i \quad (4-53)$$

$$y = [0 \quad 1 \quad -R] \begin{bmatrix} i_{L2} \\ u_c \\ i_{L1} \end{bmatrix} + [0] \quad (4-54)$$

pri čemu je vektor  $\frac{dx}{dt}$  jednak

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{L2} \\ u_c \\ i_{L1} \end{bmatrix} \quad (4-55)$$

Ukoliko se matematički model prikaže blokovski, dobije se sljedeći blokovski dijagram



**Slika 4.4:** Blokovski dijagram matematičkog modela sustava trećeg reda

### 4.3. Analiza procjene stanja mreže Kalman filtrom

U ovom će se potpoglavlju pružiti primjena Kalman filtra na električnu mrežu trećega reda pomoću programskog okvira MATLAB. Promatrat će se i analizirati rad Kalman filtra u okolini varijabilnih početnih uvjeta, odnosno analizirat će se koliko je njegova procjena pouzdana i koliko je filter osjetljiv na promjene u inicijalizaciji početnih uvjeta. Početni će se parametri mijenjati sukladno s tablicom 4.1.

**Tablica 4.1:** Varijacije parametara u analizi rada Kalman filtra

Vrijednost parametara za svaku konfiguraciju				
konfiguracija	$Q$	$R$	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{P}_0$
1	0.0001	1	0	0
2	0.0001	5	0	0
3	0.0001	10	0	0
4	0.0001	0.1	0	0
5	0.0001	0.04	0	0
6	0.01	10	0	0
7	0.001	10	0	0
8	0.00005	10	0	0
9	0.00001	10	0	0
10	0.0001	0.0001	0	0
11	10	10	0	0
12	0.00001	10	0.01	5
13	0.00001	10	5	0.01
14	0.00001	10	1	1

U ovom su sustavu definirane tri varijable stanja, stoga je matrica  $\mathbf{Q}$  jednaka dijagonalnoj matrici, veličine  $3 \times 3$ , čiji su elementi na dijagonali jednaki skalarima  $Q$ . Budući da se mjeri jedan izlaz sustava, matrica je  $\mathbf{R}$  jednaka samo skalaru  $R$ . Električna se mreža opisana jednadžbama 4-53 i 4-54 definira u MATLAB skripti kao što je prikazano sljedećim kodom

**Primjer koda 1:** Parametri i matrice za prikaz sustava u prostoru stanja

```

1  R_ohm=2; %Ohm
2  L1=3; %H
3  L2=4; %H
4  C=1; %F
5  A=[0 1/L2 0; -1/C 0 -1/C; 0 1/L1 -R_ohm/L1];
6  B=[0; 1/C; 0];
7  C=[0 1 -R_ohm];
8  D=0;

```

Za simulaciju je sustava važno uzeti u obzir utjecaj procesnog i mjernog šuma koji se generiraju korištenjem funkcije *randn* čija je svrha generiranje niza slučajnih brojeva iz normalne distribucije.

**Primjer koda 2:** Generiranje procesnog i mjernog šuma

```

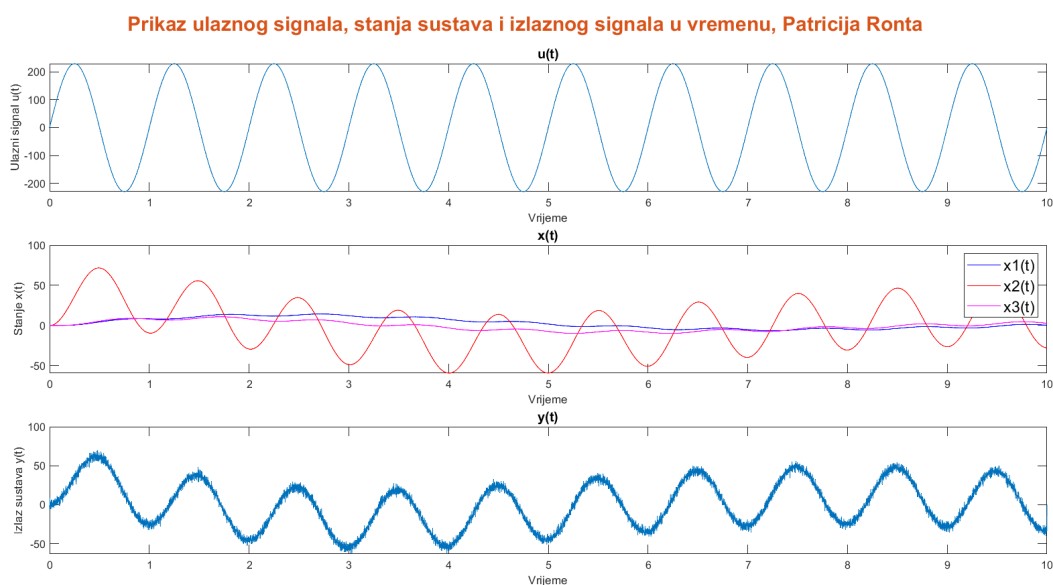
1  w = sqrt(Q)*randn(length(t),1);
2  v = sqrt(R)*randn(length(t),1);

```

Implementacija se Kalman filtra u MATLAB kodu vrši pomoću jednadžbi predikcije i korekcije, (3-37)-(3-41). Prije same njegove implementacije, potrebno je postaviti početne uvjete te nakon njihove inicijalizacije i integracije Kalman filtra, ključno je procijeniti i analizirati rad i pouzdanost Kalman filtra na dani sustav. Početni će uvjeti biti proizvoljno zadani, a ulazni je signal proizvoljno postavljen kao sinusoidalni signal amplitude 230, jer sustav trećega reda može pokazivati oscilatorno ponašanje, a sinusoidalne krivulje bolje odražavaju takvu dinamiku sustava i omogućuje Kalman filtru povoljniju prilagodbu u takvim uvjetima. Nadalje, sinusoidalni je signal kontinuiran i gladak, što omogućuje filtru bolju procjenu stanja i bolje filtriranje odstupanja od stvarnih vrijednosti. Kada se uspostavi optimalna okolina za rad Kalman filtra, tada će se na takve postavke početnih parametara mijenjati ulazni signal i ispitivati način rada filtra prilikom novih promjena. Ulazni će se signal najprije promijeniti da bude linearan iznosa  $u = 230t$ , a zatim će se promijeniti u signal koji postiže skok u četvrtoj sekundi na vrijednost 10, a prije toga je imao vrijednost 0.

### Ispitivanje Kalman filtra za $u = 230 \sin(2\pi t)$

Prikaz ulaznog signala  $u = 230 \sin(2\pi t)$ , varijabli stanja  $\mathbf{x}$  i izlaza sustava  $\mathbf{y}$  u vremenu dan je slikom 4.5



**Slika 4.5:** *Prikaz varijabli  $u(t)$ ,  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$*

Za početak, implementirat će se Kalman filter u slučaju kada se mijenjaju vrijednosti matrice  $\mathbf{R}$ . Početni će uvjeti biti jednaki uvjetima prikazanima u kodu 3.

#### Primjer koda 3: *Inicijalizacija početnih uvjeta*

```

1   Tstep=0.001;
2   t=0:Tstep:10;
3   u=230*sin(2*pi*t);
4   Q=0.0001; R=1;
5   x0=0; P0=0;

```

U svrhu detaljnog praćenja i dublje analize učinkovitosti Kalman filtra, bitno je sustavno izračunavati i interpretirati rezidual i predikcijsku pogrešku varijabli stanja i izlaza sustava. One su od velikoga značaja jer obje daju pojedinačne vrijednosti u svakom vremenskom trenutku za koje se sustav promatra te upravo je zbog toga praćenje stabilnosti sustava i filtra olakšano, a neizostavna je i detekcija njihovih netipičnih ponašanja u danoj okolini. Pored reziduala i predikcijskih pogrešaka, izračunavat će se korijen srednje kvadratne pogreške (RMSE) između stvarnih (mjerenih) vrijednosti i procijenjenih (izlaznih) vrijednosti. Važno je naglasiti da je RMSE pogodno izračunavati ako je sustav u stacionarnome stanju jer u dinamičkim sustavima koji se mijenjaju s vremenom, RMSE ima tendenciju rasta zbog pogrešaka u predviđanjima koje akumuliraju s vremenom. Također, RMSE daje agregirani rezultat za cijeli skup podataka, stoga nije moguć uvid u ponašanje sustava i procjene filtra u svakom vremenskom trenutku, što smanjuje pouzdanost analize isključivo na izračunavanju RMSE.

Ako se u kodu postave naredbe za izračunavanje RMSE za sve varijable stanja i za izlaz sustava pri vrijednostima  $R = 1$ ,  $R = 5$  i  $R = 10$  na način

**Primjer koda 4:** Računanje RMSE za sve varijable stanja  $\mathbf{x}$  i izlaz sustava  $\mathbf{y}$

```
1  rmse_x(:, k) = sqrt(mean((x(:, 1:k) - x_estimate(:, 1:k)).^2, 2));
2  rmse_output(k-1) = sqrt(mean((y(1:k-1) - y_aposteriori(1:k-1)).^2));
```

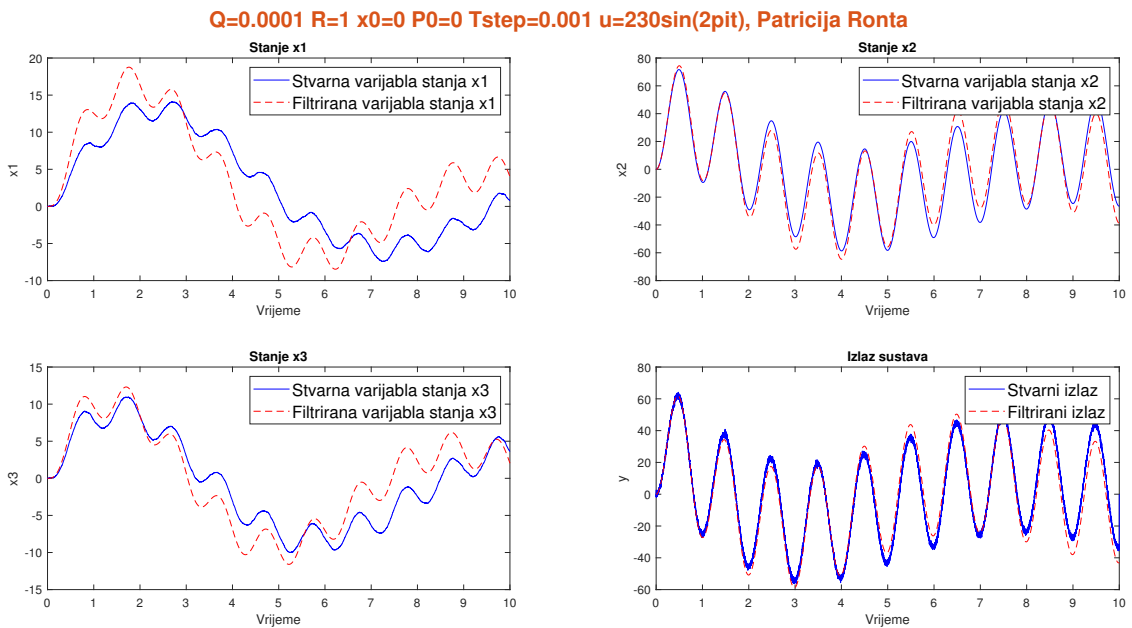
dobit će se iznosi RMSE za svaku varijablu stanja  $x_1$ ,  $x_2$  i  $x_3$  kao i za izlaz sustava  $\mathbf{y}$  kako je prikazano tablicom 4.2.

**Tablica 4.2:** Iznosi RMSE pri različitim vrijednostima matrice  $\mathbf{R}$

Iznosi RMSE za sve varijable stanja i za izlaz sustava		
$R = 1$	$R = 5$	$R = 10$
$x_1 = 3.3351$	$x_1 = 0.6166$	$x_1 = 0.6461$
$x_2 = 5.8922$	$x_2 = 1.5291$	$x_2 = 1.6042$
$x_3 = 2.7108$	$x_3 = 0.3810$	$x_3 = 0.3930$
$y = 6.3536$	$y = 2.5920$	$y = 3.4571$

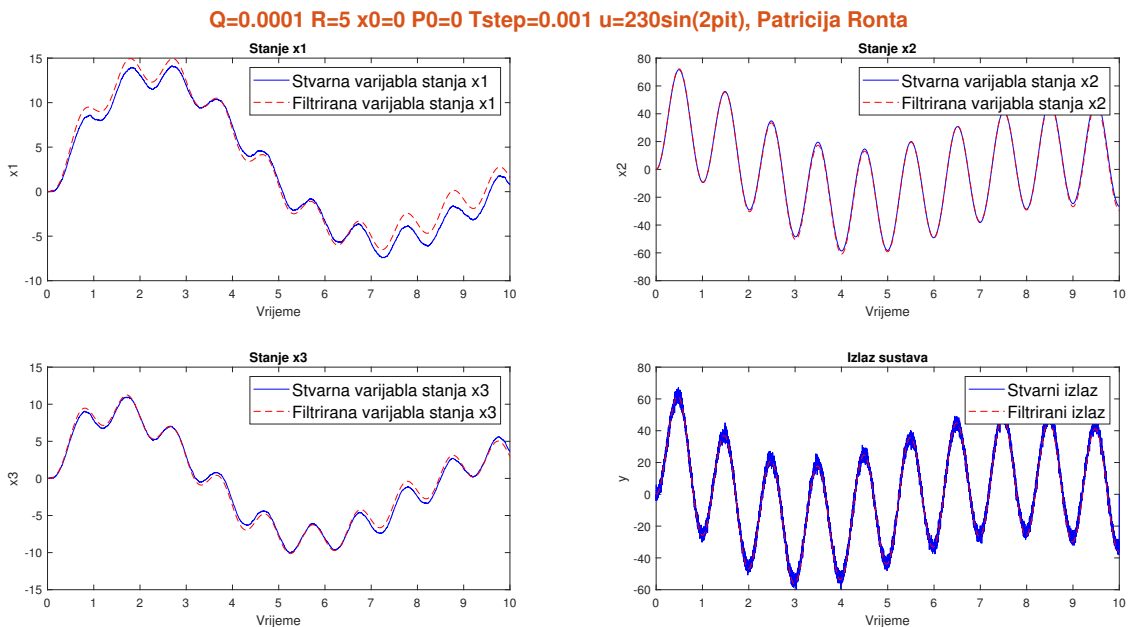
Rad je Kalman filtra u okolini opisanih uvjeta vidljiv na slici 4.6. Uočava se da su vrijednosti RMSE za  $R = 1$  relativno visoke, što ukazuje da Kalman filter nije u potpunosti precizno procijenio stanja i izlaz sustava. Prikaz na slici 4.6 otkriva da filtrirane vrijednosti varijabli stanja i izlaza sustava odstupaju od stvarnih vrijednosti, s najvećim odstupanjima u varijablama stanja  $x_1$  i  $x_3$ . Također je razvidno da je prisutan veći šum u mjerenjima izlaza sustava u usporedbi s mjerenjima varijabli stanja, što sugerira da filter intenzivnije reagira na šum u mjerenjima izlaza kako bi se dobila njegova preciznija estimacija.





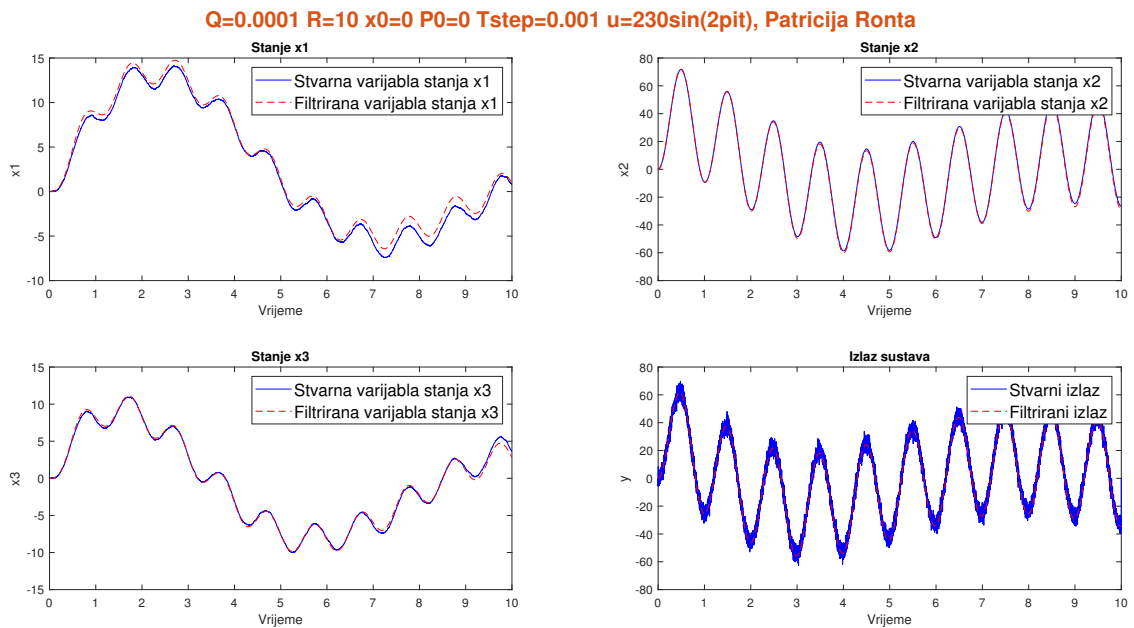
**Slika 4.6:** Rad Kalman filtera kada je  $R = 1$

Promjenom vrijednosti matrice  $R = 5$ , sve su se vrijednosti RMSE znatno smanjile u usporedbi s prethodnom konfiguracijom. To ukazuje na poboljšanje učinkovitosti Kalman filtera te da su njegove procjene u danoj okolini početnih uvjeta preciznije i točnije. Navedeno je vidljivo i sa slike 4.7 gdje se može uočiti kako se stvarne i filtrirane vrijednosti gotovo u potpunosti podudaraju, međutim u izlazu je sustava prisutan veći šum što označava da je filter postao još osjetljiviji na šum u mjerenjima izlaza.



**Slika 4.7:** Rad Kalman filtera kada je  $R = 5$

Prilikom postavljanja matrice  $\mathbf{R}$  na iznos 10, Kalman filter, prema 4.8, ima sljedeću konfiguraciju.



**Slika 4.8:** Rad Kalman filtera kada je  $R = 10$

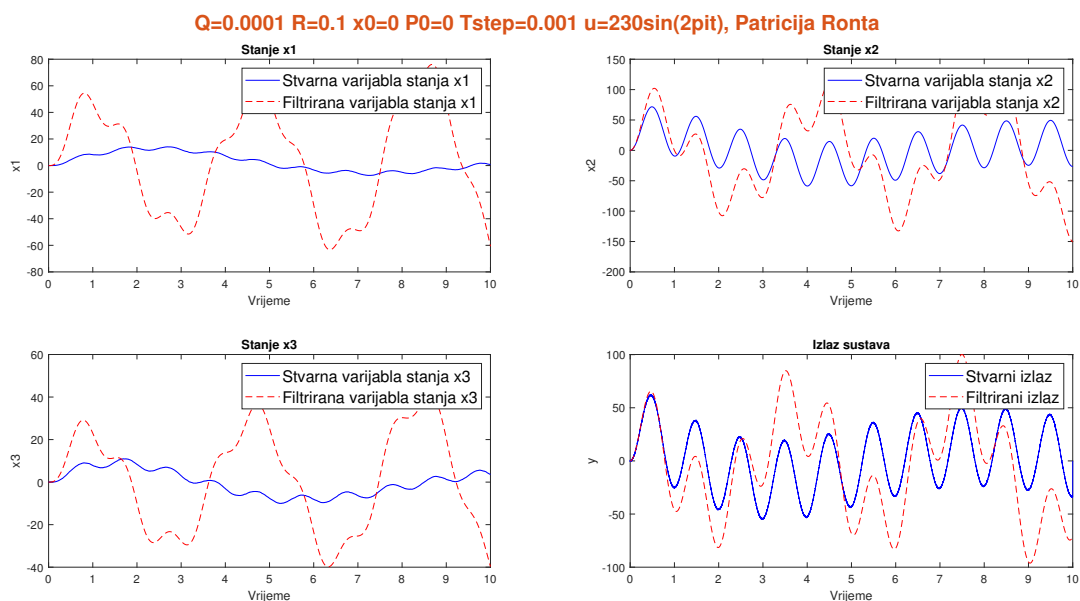
Iz tablice 4.2 se uočava da su vrijednosti RMSE još manje, ukazujući na to da Kalman filter postiže još točniju i precizniju procjenu u usporedbi s prethodnom vrijednošću matrice  $\mathbf{R}$  te ovakva konfiguracija čini da se stvarne vrijednosti i filtrirane vrijednosti najviše podudaraju. Važno je napomenuti da se povećanjem matrice  $\mathbf{R}$  povećava šum u stvarnoj vrijednosti izlaza sustava što potiče filter da intenzivnije reagira na fluktuacije u mjerenjima izlaza. Međutim, na svim grafičkim prikazima, filtrirana je vrijednost izlaza sustava vrlo dobro pratila stvarnu vrijednost, dakle Kalman je filter uspješno smanjio utjecaj šuma iz senzora, filtrirao isti te dao glađu i manje šumnu izlaznu vrijednost. Dodatno, može se uočiti da je za sve slučajeve povećanja matrice  $\mathbf{R}$  prisutan minimalan šum u stvarnim vrijednostima varijabli stanja. Navedeno sugerira da povećavanjem vrijednosti matrice  $\mathbf{R}$  filter više vjeruje svojim estimacijama i manje reagira na šum u mjerenjima. Što manje filter uzima u obzir šum u mjerenjima, to su estimacije varijabli stanja glađe i manje osjetljive na taj šum. To na kraju rezultira pojavom minimalnog šuma u stvarnim vrijednostima varijabli stanja jer filter uspješno smanjuje šum u vlastitim estimacijama.

Neka se u sljedeće dvije konfiguracije matrica  $\mathbf{R}$  smanjuje na vrijednosti 0.1 i 0.04. Vrijednosti RMSE za navedene vrijednosti matrice  $\mathbf{R}$  nalaze se u tablici 4.3

**Tablica 4.3:** Iznosi RMSE pri smanjenim vrijednostima matrice  $\mathbf{R}$

Iznosi RMSE za sve varijable stanja i za izlaz sustava	
$R = 0.1$	$R = 0.04$
$x_1 = 40.8448$	$x_1 = 2597.9824$
$x_2 = 63.4641$	$x_2 = 3089.5395$
$x_3 = 23.6015$	$x_3 = 1310.1436$
$y = 40.3615$	$y = 1299.2790$

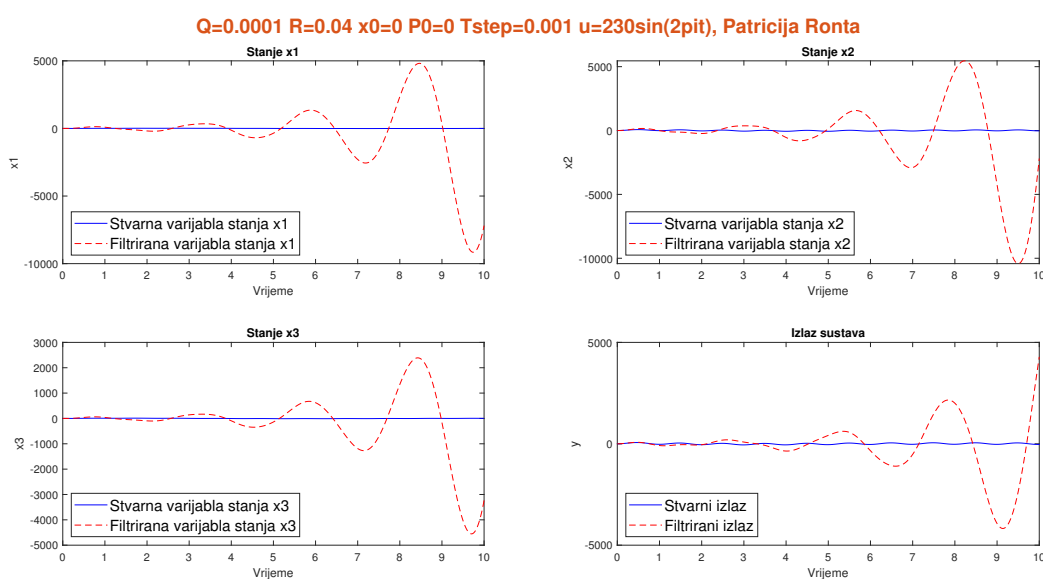
Na slici 4.9 vidljivo je ponašanje Kalman filtra u novoj okolini.



**Slika 4.9:** Rad Kalman filtra kada je  $R = 0.1$

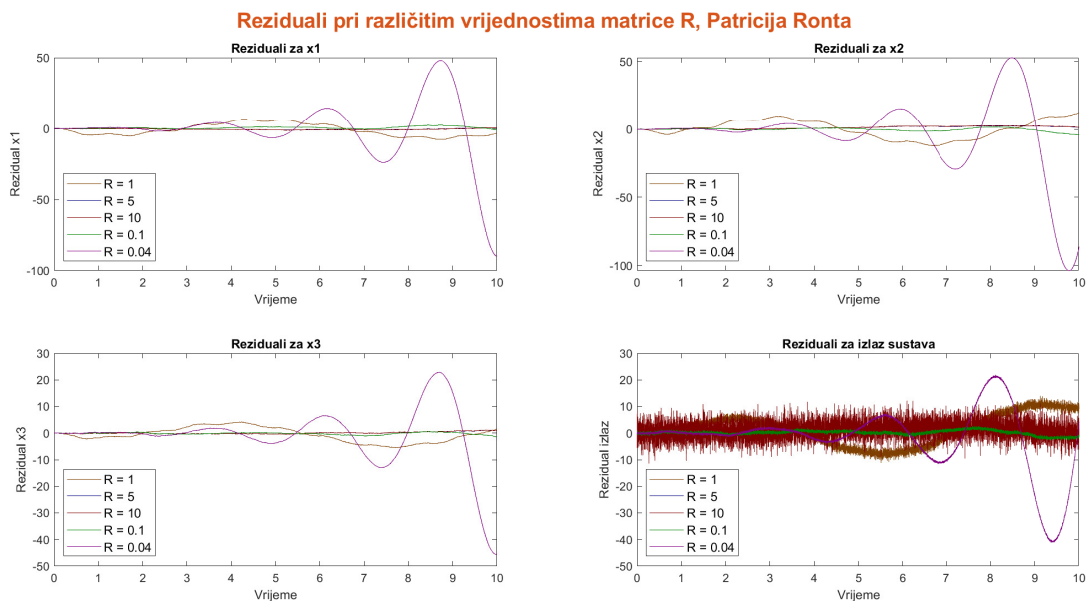
Za razliku od prethodnih konfiguracija, u ovome su slučaju veće oscilacije filtriranih vrijednosti, što je i vidljivo prema vrlo visokim vrijednostima RMSE. Kada se matrica  $\mathbf{R}$  smanji, filter zanemaruje senzorske podatke i gotovo se potpuno oslanja na model sustava, što rezultira da filtrirane vrijednosti odstupaju i ne prate stvarne vrijednosti.

Ukoliko se matrica  $\mathbf{R}$  dodatno smanji na vrijednost 0.04., vrijednosti su RMSE značajno velike što proizlazi iz velikih oscilacija filtriranih vrijednosti. Ovakve su oscilacije znak nestabilnosti filtriranja te on ne može pravilno konvergirati prema stvarnim vrijednostima jer je postao uvelike osjetljiv na male promjene u senzorskim podacima ili modelu u danoj okolini, što se može primijetiti na slici 4.10.

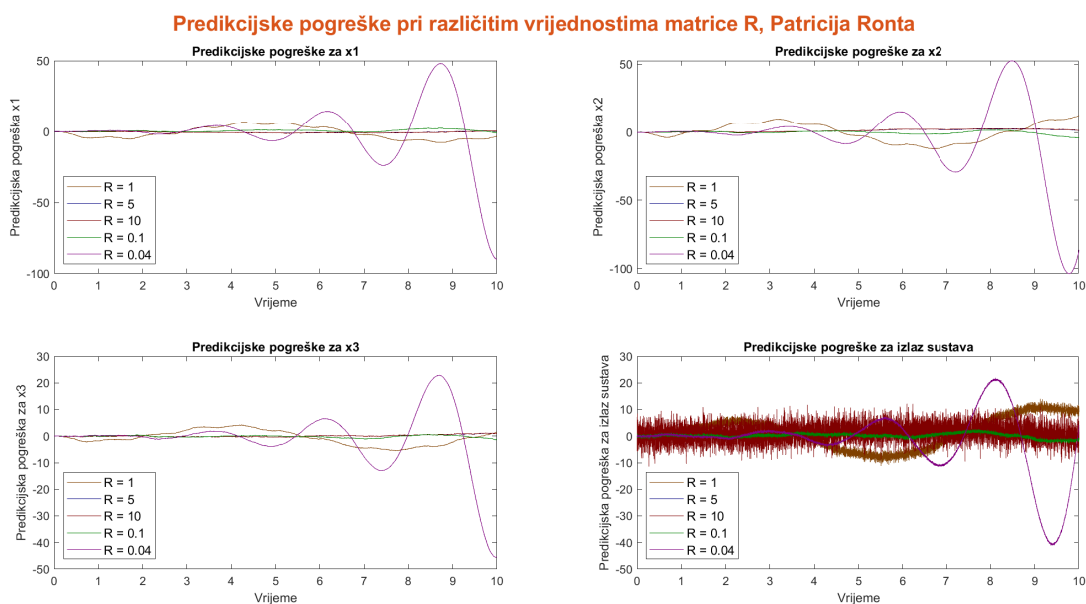


**Slika 4.10:** Rad Kalman filtra kada je  $R = 0.04$

Na slici 4.11 i 4.12 prikazani je svaki rezidual i predikcijska pogreška za određenu vrijednost matrice  $\mathbf{R}$  svih varijabli stanja i izlaza sustava.



Slika 4.11: *Reziduali za različite vrijednosti matrice  $\mathbf{R}$*



Slika 4.12: *Predikcijske pogreške za različite vrijednosti matrice  $\mathbf{R}$*

Ako se promotre reziduali za svaku varijablu stanja, zaključuje se da pri vrijednostima  $R = 1$  i  $R = 0.1$ , razlike stvarnih i procijenjenih vrijednosti nešto su veće od 0. Oni ukazuju da postoji neravnoteža između modela stanja i mjerenja jer su vrijednosti matrice  $\mathbf{R}$  manje, stoga filter više vjeruje modelu stanja nego mjerenjima, a navedeno je i vidljivo na slikama 4.6 i 4.9 gdje se stvarne i filtrirane vrijednosti ne podudaraju. Pri vrijednostima  $R = 5$  i  $R = 10$ , reziduali su za sve varijable stanja gotovo konstantno na 0, što ukazuje da za ove vrijednosti, Kalman filter precizno procjenjuje stanja te se filtrirane i stvarne vrijednosti mogu najbolje

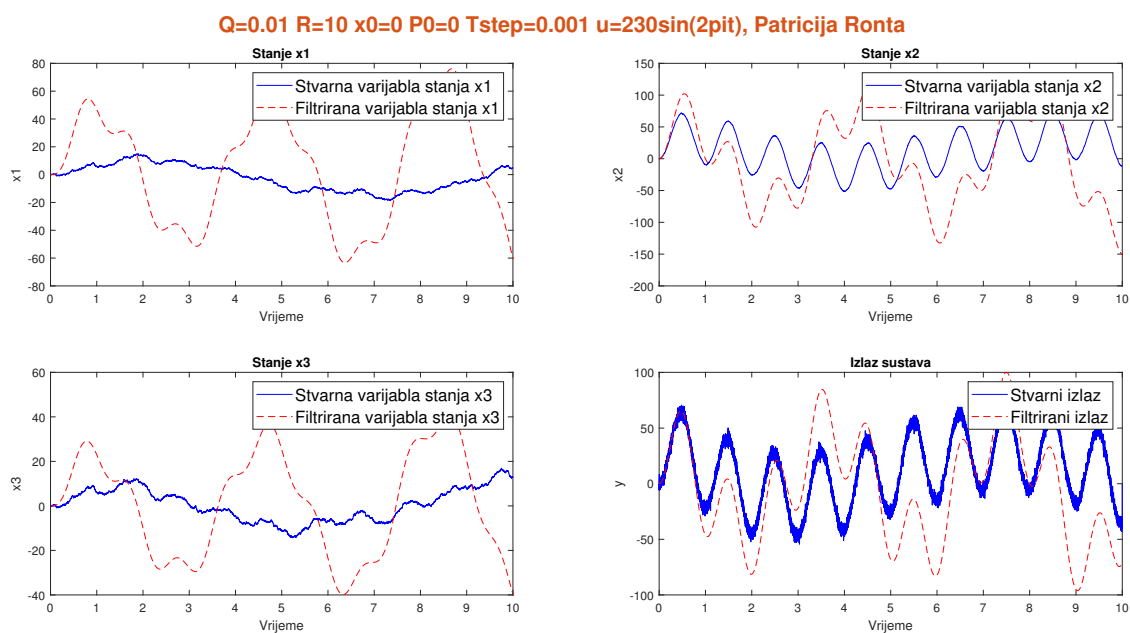
pratiti. Pri vrijednosti  $R = 0.04$ , filter postaje previše osjetljiv na mjerenja te reziduali sve više osciliraju s vremenom kao i na slici 4.10 jer je velika razlika između stvarnih i procijenjenih vrijednosti. Sve navedeno potvrđuje se i iz prikaza predikcijskih pogrešaka, vidljivi na slici 4.12.

Neka se u sljedećim konfiguracijama prikazanih u tablici 4.4, zajedno s pripadajućim vrijednostima RMSE, mijenja matrica kovarijance procesnog šuma  $\mathbf{Q}$  tako da poprima vrijednosti manje i veće od početne vrijednosti 0.0001. Prema prethodnim se primjerima najbolji rezultat dobio kada je matrica  $\mathbf{R}$  iznosila 10, stoga će se u ovim konfiguracijama sačuvati ta vrijednost.

**Tablica 4.4:** Iznosi RMSE pri različitim vrijednostima matrice  $\mathbf{Q}$

Iznosi RMSE za sve varijable stanja i za izlaz sustava			
$Q = 0.01$	$Q = 0.001$	$Q = 0.00005$	$Q = 0.00001$
$x_1 = 41.9655$	$x_1 = 4.5187$	$x_1 = 0.4244$	$x_1 = 0.1964$
$x_2 = 65.6853$	$x_2 = 6.9729$	$x_2 = 0.9951$	$x_2 = 0.4878$
$x_3 = 24.0191$	$x_3 = 2.4869$	$x_3 = 0.1948$	$x_3 = 0.1054$
$y = 42.3690$	$y = 7.1613$	$y = 3.3240$	$y = 3.2268$

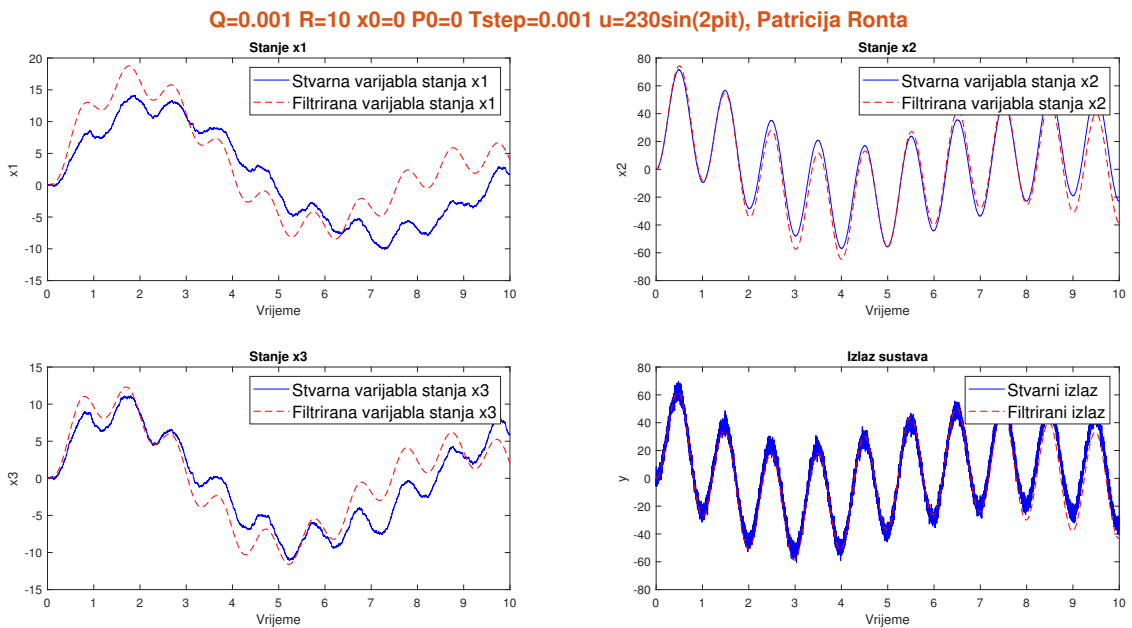
Prikaz načina rada filtra u okolini kada je  $Q = 0.01$  vidljiv je na slici 4.13.



**Slika 4.13:** Rad Kalman filtera kada je  $Q = 0.01$

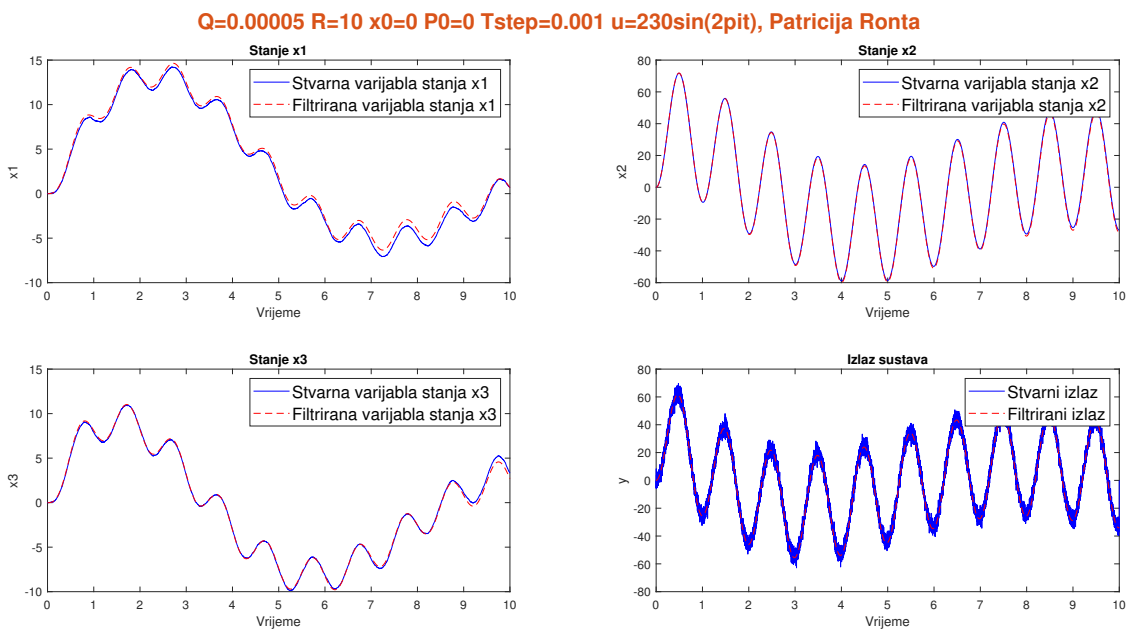
U danoj okolini postoje velike vrijednosti RMSE što rezultira većim oscilacijama filtriranih vrijednosti, kao i u slučaju kada je matrica  $\mathbf{R}$  bila postavljena na vrijednost 0.1. Povećanjem matrice  $\mathbf{Q}$  povećava se procjena šuma u modelu sustava, što znači da ukoliko je model precizan, ovakvo povećanje šuma rezultat će lošijim filtriranjem jer filter više neće točno pratiti model. Budući da je vrijednost matrice  $\mathbf{R}$  postavljena na konstantnu vrijednost kroz sve slučajeve, senzorski je šum ostao nepromijenjen. Time se uzrokuje neravnoteža između procjene šuma u modelu i senzorske šumu što može dovesti do stanja da filter puno više vjeruje senzorskim podacima nego modelu.

Ako se smanji vrijednost matrice  $\mathbf{Q}$  na 0.001, tada konfiguraciju filtra opisuje slika 4.14.



**Slika 4.14:** Rad Kalman filtera kada je  $Q = 0.001$

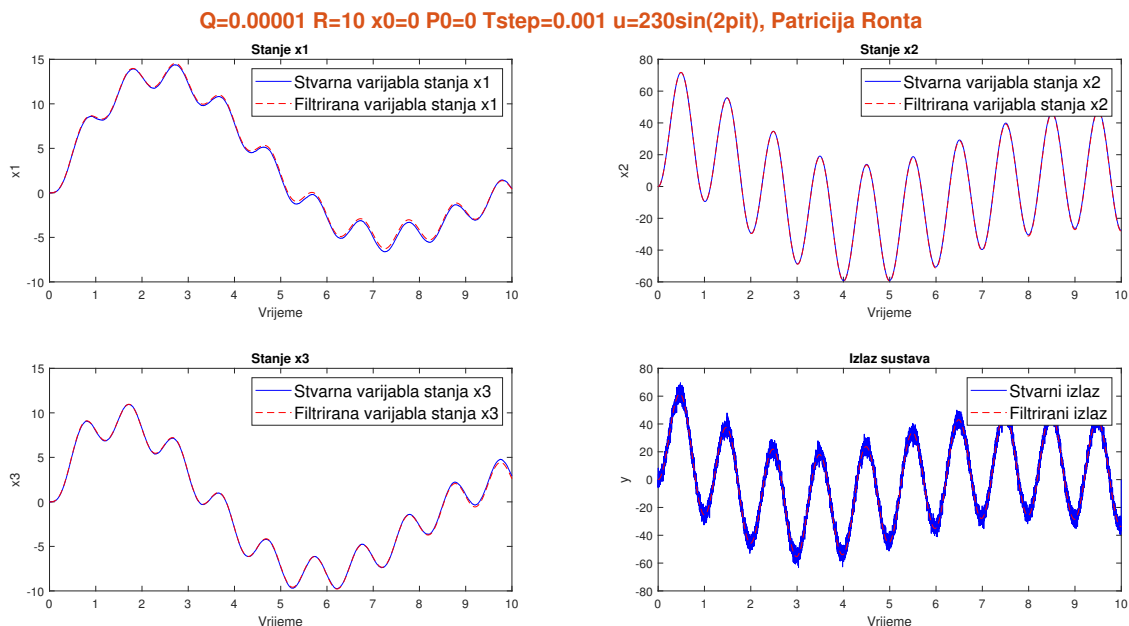
Osim što se smanjenjem vrijednosti matrice  $Q$  smanjila procjena šuma u modelu sustava, Kalman filter se bolje prilagodio promjenama u dinamici sustava. U slučaju preciznog modela sustava, smanjenje je šuma u modelu omogućilo filtru da bolje reproducira dinamiku stvarnog sustava. Navedeno se može primijetiti i prema smanjenim vrijednostima RMSE te grafičkom prikazu na slici 4.14 gdje filtrirane vrijednosti bolje slijede stvarne vrijednosti nego što je to bio slučaj u prethodnoj konfiguraciji. Nastavi li se smanjivanje matrice  $Q$ , dobije se naredni prikaz rada filtra.



**Slika 4.15:** Rad Kalman filtera kada je  $Q = 0.00005$

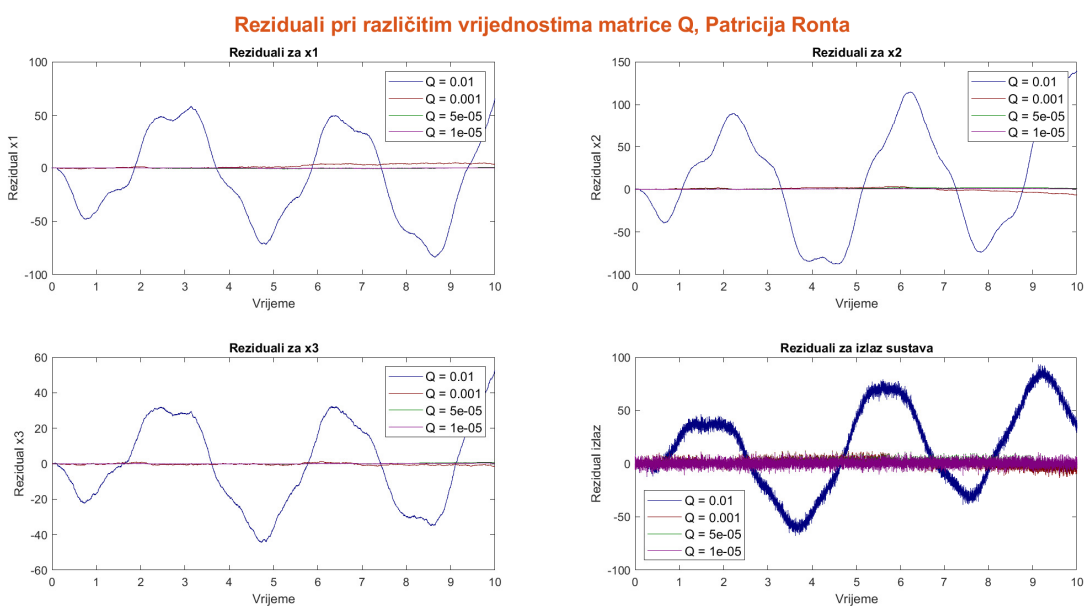
Sada već vrlo niske vrijednosti RMSE u ovakvoj okolini ukazuju kako filter radi značajno preciznije. Zbog niske vrijednosti matrice  $Q$  filter smatra da su promjene u sustavu manje nasumične i više se prilagođava modelu što rezultira da su varijable stanja glađe.

Postavi li se matrica  $Q$  na najmanju vrijednost, tada su rezultati rada filtra sljedeći

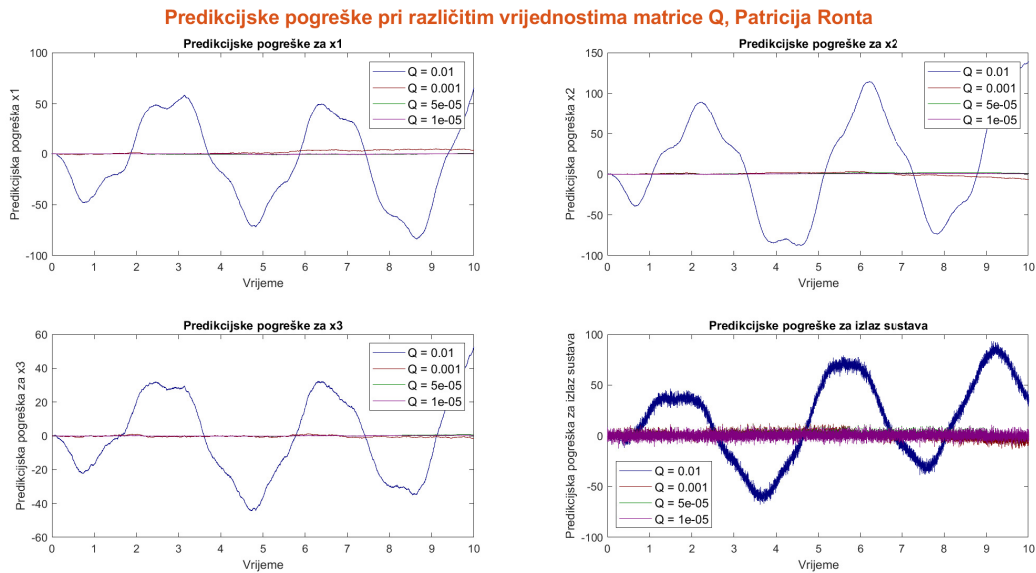


Slika 4.16: Rad Kalman filtera kada je  $Q = 0.00001$

Za ovaj se slučaj dobije najprecizniji način rada Kalman filtra naspram svih ostalih konfiguracija, a to potvrđuju i najniže vrijednosti RMSE. Stvarne i filtrirane vrijednosti se u potpunosti prate te je ovakva okolina za rad Kalman filtra i dani sustav optimalna. Postavkom matrice  $R$  na visoku vrijednost osiguralo se da su ulazna mjerenja kvalitetna i pouzdana te se filter bolje prilagođava stvarnim podacima. Vrlo se niskom vrijednošću matrice  $Q$  izrazilo povjerenje u model dinamike sustava, stoga je filter smatrao da su promjene u sustavu gotovo potpuno determinističke i manje nasumične. Ovime se postavila optimalna ravnoteža između povjerenja u mjerenja i povjerenja u model sustava. Prikaz reziduala i predikcijskih pogrešaka prilikom promjena matrice  $Q$  odgovara prikazima na slici 4.17 i 4.18



Slika 4.17: Reziduali za različite vrijednosti matrice  $Q$



**Slika 4.18:** *Predikcijske pogreške za različite vrijednosti matrice  $Q$*

Može se uočiti da su reziduli za sve varijable stanja najmanji kada su vrijednosti matrice  $Q$  postavljene na dvije najmanje vrijednosti. To odgovara prikazima na slici 4.15 i 4.16 na kojima se stvarne i filtrirane vrijednosti gotovo u potpunosti slijede što znači da Kalman filter u ovakvim okolinama ima najpreciznije procjene za razliku od druge dvije kombinacije. Najveći je rezidual u varijablama stanja i izlazu sustava kada je matrica  $Q$  postavljena na najvišu vrijednost 0.01. To ukazuje da u takvim uvjetima, filter ima lošije procjene te postoje veća odstupanja između filtriranih i stvarnih vrijednosti što se može vidjeti u njegovom prikazu rada na slici 4.13.

U sljedeće dvije konfiguracije promatrat će se kako se Kalman filter ponaša kada se izjednače matrice  $Q$  i  $R$  i to na vrlo nisku vrijednost 0.0001 i na vrlo visoku vrijednost 10. RMSE svih varijabli stanja i izlaza sustava u novoj okolini dani su idućom tablicom.

**Tablica 4.5:** *Iznos RMSE pri jednakim vrijednostima matrica  $Q$  i  $R$*

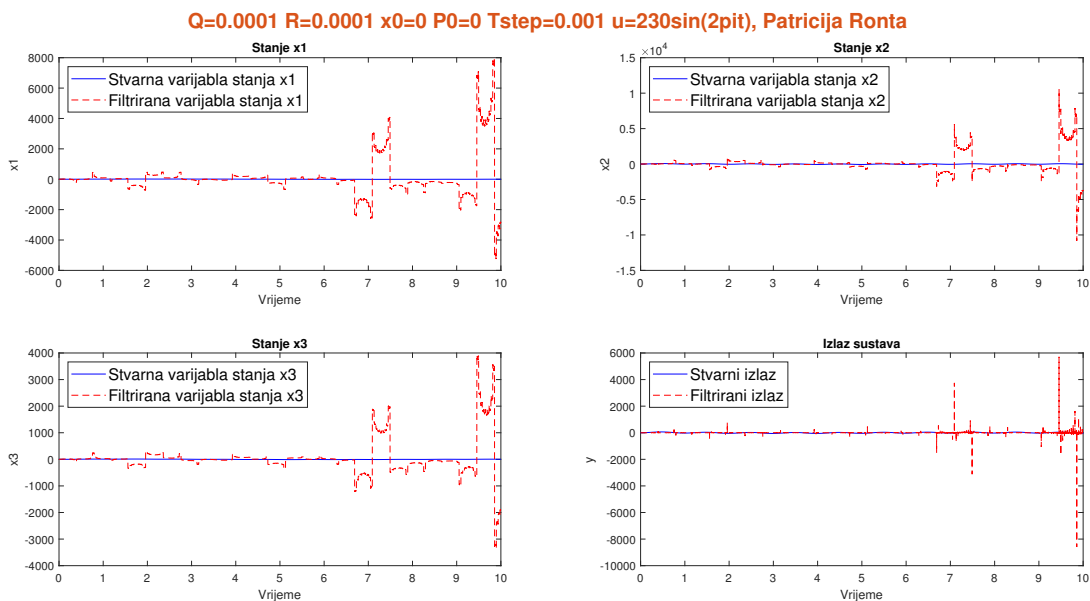
Iznosi RMSE za sve varijable stanja i za izlaz sustava	
$Q = R = 0.0001$	$Q = R = 10$
$x_1 = 1285.3791$	$x_1 = 1297.5570$
$x_2 = 1331.6675$	$x_2 = 1403.5046$
$x_3 = 664.6554$	$x_3 = 663.5719$
$y = 125.0283$	$y = 467.8707$

Na temelju se prethodnih analiza može pretpostaviti potencijalni problem u radu Kalman filtra pri danoj okolini jer će u ovim slučajevima filter dati jednaku važnost mjerenjima i modelu dinamike sustava.

U okolini gdje su matrice  $Q$  i  $R$  iznosa 0.0001, rad Kalman filtra prikazuje slika 4.19. U ovakvoj okolini Kalman filter radi neprecizno na što upućuju i vrlo visoke vrijednosti RMSE. Prema slici 4.19 može se uočiti da odmakom vremena dolazi do oscilacija u filtriranim vrijed-

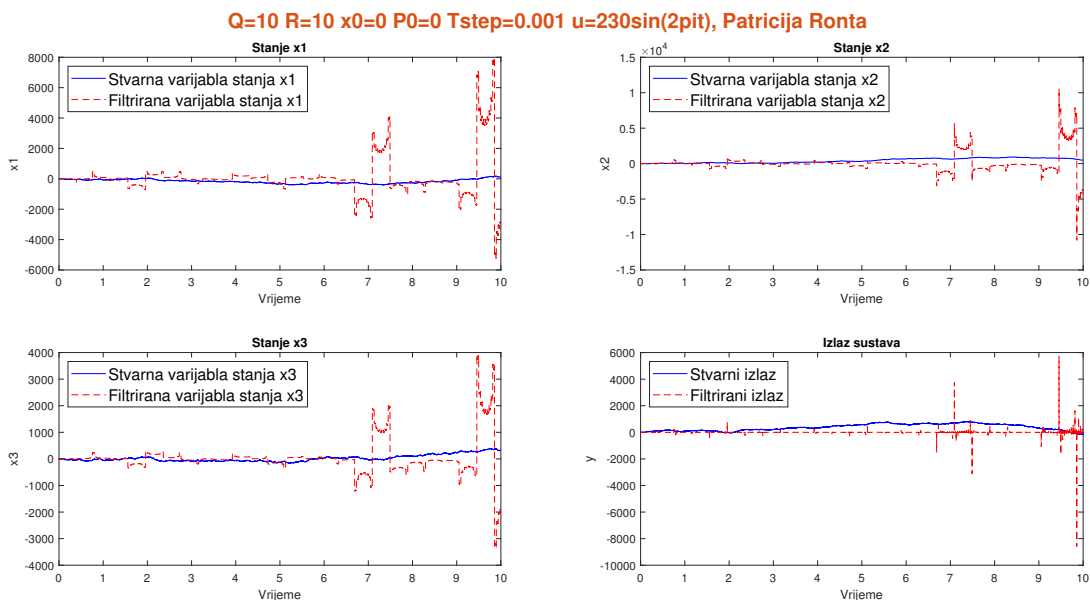


nostima, što upućuje da filter puno teže postigne stabilne procjene te da je otežana konvergencija filtra prema stvarnim vrijednostima.



**Slika 4.19:** Rad Kalman filtera kada je  $Q = R = 0.0001$

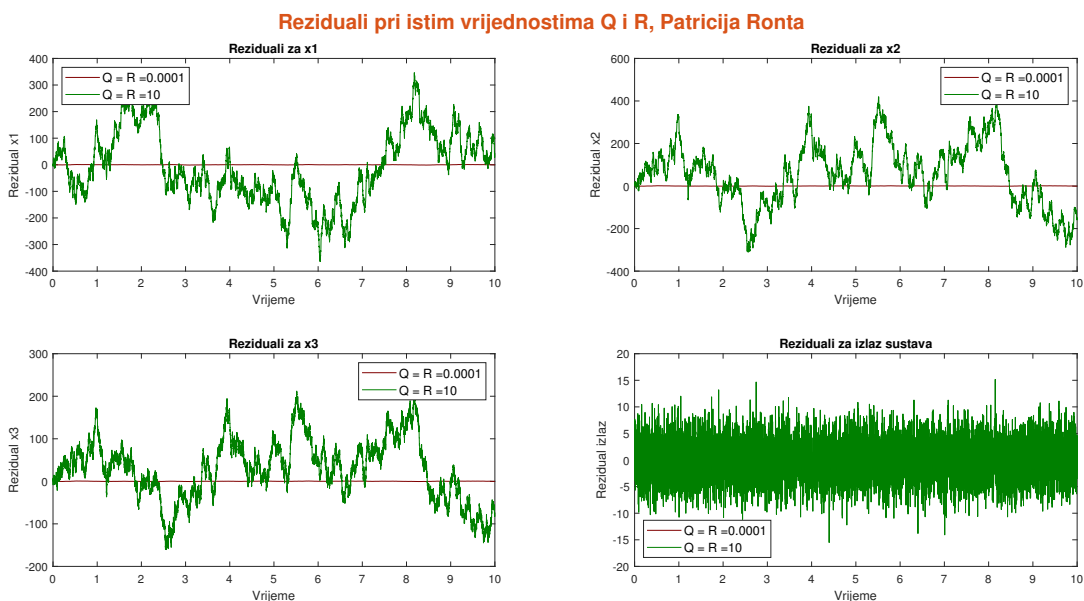
Ako se vrijednost matrica  $Q$  i  $R$  poveća na visoku vrijednost 10, Kalman filter radi kako je prikazano slikom 4.20.



**Slika 4.20:** Rad Kalman filtera kada je  $Q = R = 10$

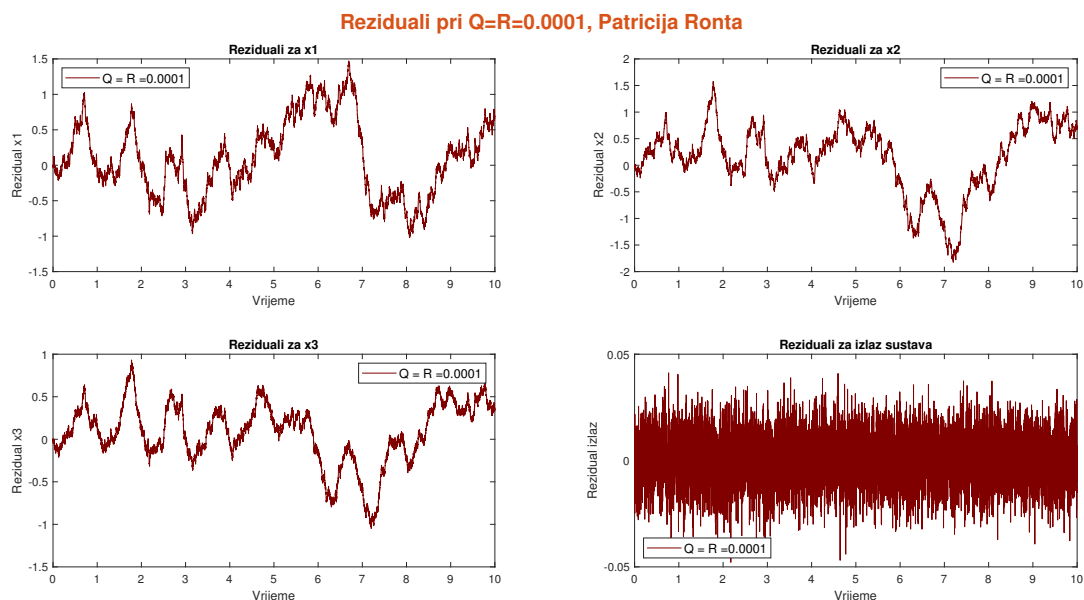
Rezultati rada filtra u ovakvoj okolini nisu bolji, što je i očekivano. Naime, izjednačavanjem vrijednosti ovih dviju matrica ne uzimaju se u obzir stvarne karakteristike sustava što uzrokuje nedovoljnu adaptaciju filtra na stvarna mjerenja, odnosno filter više ne razlikuje nesigurnost u modelu i nesigurnost u mjerenjima. Osim toga, filter u ovakvoj okolini brzo reagira na svaku

promjenu mjerenja, uključujući i slučajne šumove, a to znači da filter ne razlikuje stvarne promjene u sustavu od slučajnih fluktuacija u mjerenjima što rezultira oscilacijama u procjeni stanja. Navedene će se analize potvrditi slikama 4.21 i 4.23.



**Slika 4.21:** *Reziduali za iste vrijednosti matrica  $Q$  i  $R$*

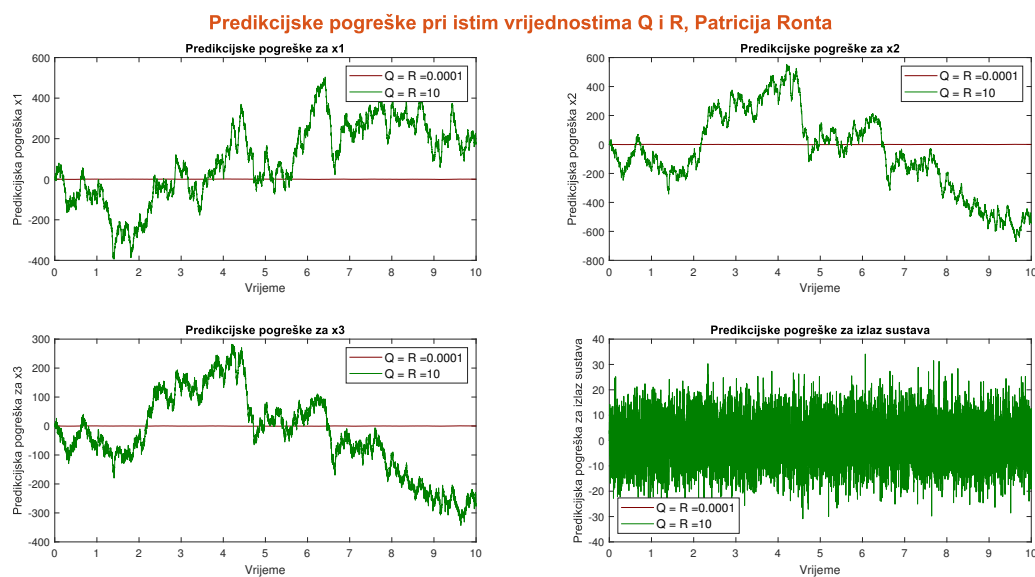
Kako bi se potvrdile navedene tvrdnje, posebno će se prikazati rezidual i predikcijska pogreška pri  $Q = R = 0.0001$  jer zbog velike skale na  $y$ -osi, pri ovim uvjetima ne vide se velike oscilacije koje nastupaju na manjim vrijednostima.



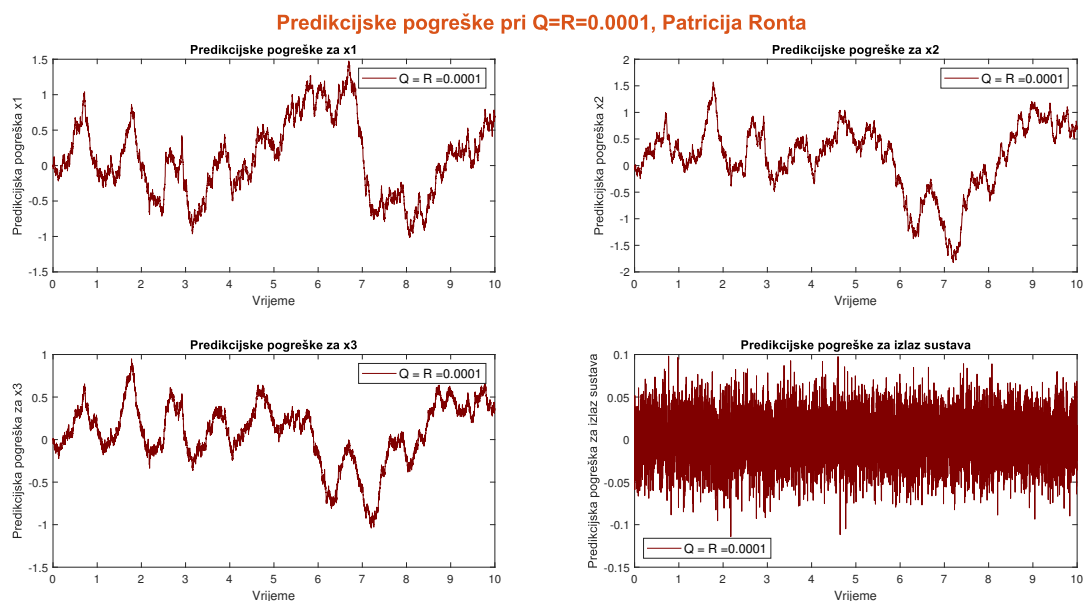
**Slika 4.22:** *Reziduali pri  $Q = R = 0.0001$*

Sada se može potvrditi da je, izjednačavanjem vrijednosti matrica  $Q$  i  $R$ , Kalman filter postavljen u okruženje koje nije pogodno za njegov ispravan rad. Zbog oscilacija u tim reprezentacijama, filter ne radi stabilno, jer izjednačavanjem ove dvije matrice daje visok prioritet

dinamičkom modelu i mjerenjima, što narušava ravnotežu između izbora da se više vjeruje mjerenjima ili modelu. Također, navedeno se zaključuje i iz prikaza 4.23 i 4.24.



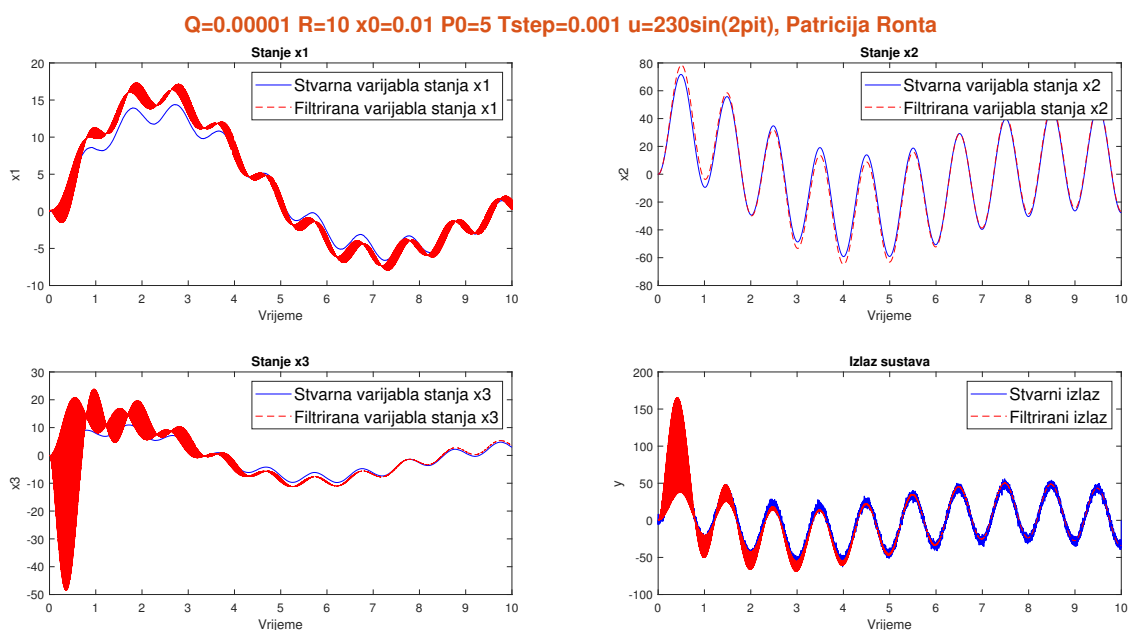
Slika 4.23: Predikcijske pogreške za iste vrijednosti matrica  $Q$  i  $R$



Slika 4.24: Predikcijske pogreške pri  $Q = R = 0.0001$

U sljedećim će se primjerima, kroz tri slučaja, mijenjati početna procjena stanja  $\mathbf{x}_0$  i početna nesigurnost  $\mathbf{P}_0$ , tako da će se iznosi povećavati, smanjivati ili izjednačiti, a za matricu  $Q$  i  $R$  uzet će se vrijednosti koje su dale najprecizniju procjenu, odnosno  $Q = 0.00001$  i  $R = 10$ . Prvome slučaju odgovara prikaz rada filtra na slici 4.25. Velika zadebljanja filtriranih vrijednosti kod varijabli stanja  $x_1$  i  $x_2$  ukazuju da Kalman filter ima poteškoća u praćenju promjena spomenutih varijabli te je vrijednost početne nesigurnosti  $\mathbf{P}_0$  za njih velika. Suprotno njima, a kao što je vidljivo na slici 4.25, Kalman filter dobro prati stvarno stanje varijable  $x_2$ , što znači da

visoka vrijednost početne nesigurnosti  $\mathbf{P}_0$  na nju nema prevelik utjecaj. Smanjenje zadebljanja tijekom vremena u varijabli stanja  $x_3$  i izlazu sustava  $y$  ukazuje na brzu konvergenciju filtra prema stvarnim vrijednostima i poboljšanju procjene. Izračunate se vrijednosti RMSE za ovaj slučaj, kao i za ostale slučajeve, mogu vijdeti u tablici 4.6.



**Slika 4.25:** Rad Kalman filtra kada je  $\mathbf{x}_0 = 0.01$  i  $\mathbf{P}_0 = 5$

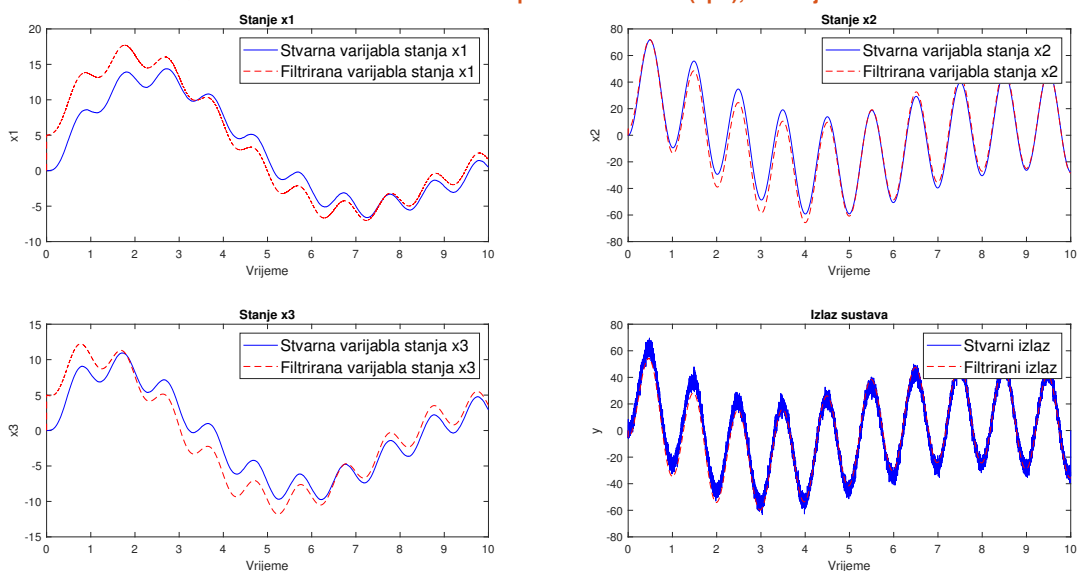
**Tablica 4.6:** Iznosi RMSE pri različitim vrijednostima  $\mathbf{x}_0$  i  $\mathbf{P}_0$

Iznosi RMSE za sve varijable stanja i za izlaz sustava		
$\mathbf{x}_0 = 0.01, \mathbf{P}_0 = 5$	$\mathbf{x}_0 = 5, \mathbf{P}_0 = 0.01$	$\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}_0 = 1$
$x_1 = 1.4706$	$x_1 = 2.5066$	$x_1 = 1.2895$
$x_2 = 3.5243$	$x_2 = 5.3529$	$x_2 = 1.1164$
$x_3 = 7.4773$	$x_3 = 2.1575$	$x_3 = 0.6364$
$y = 15.7249$	$y = 5.8661$	$y = 3.5211$

U drugoj se konfiguraciji vrijednosti  $\mathbf{x}_0$  i  $\mathbf{P}_0$  zamjenjuju, što se slikovito vidi na slici 4.26. U ovoj okolini grafovi filtriranih vrijednosti nisu zadebljani te su vrijednosti RMSE manje u usporedbi s prethodnom konfiguracijom što rezultira uspješnijim i preciznijim procjenama. Filter je stabilniji te točnije prati promjene u stvarnim podacima.

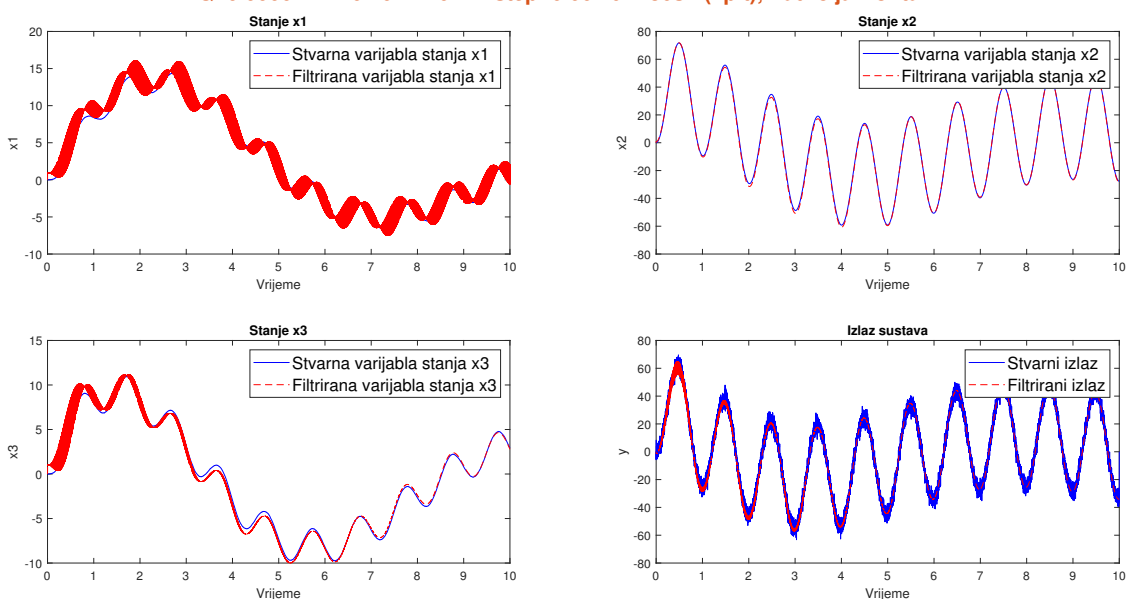
Ako su početna procjena stanja  $\mathbf{x}_0$  i početna nesigurnost  $\mathbf{P}_0$  postavljene na istu vrijednost, to znači da filter ima početnu procjenu stanja s relativno malom početnom nesigurnošću. S vremenom to dovodi do bolje konvergencije filtra prema stvarnoj vrijednosti, što se također odražava u smanjenju vrijednosti RMSE. Prema slici 4.27, filtrirana vrijednost varijable  $x_1$  znatno je deblja, što ukazuje da filter još uvijek ima poteškoća s praćenjem i filtriranjem ove varijable. Iako inicijalizacija parametara  $\mathbf{x}_0$  i  $\mathbf{P}_0$  nije nužno loša, Kalmanov filter je ipak precizniji i točniji u okruženju kada su početna procjena stanja i početna nesigurnost postavljeni na vrijednost 0.

$Q=0.00001$   $R=10$   $x_0=5$   $P_0=0.01$   $Tstep=0.001$   $u=230\sin(2\pi t)$ , Patricija Ronta



Slika 4.26: Rad Kalman filtera kada je  $x_0 = 5$  i  $P_0 = 0.01$

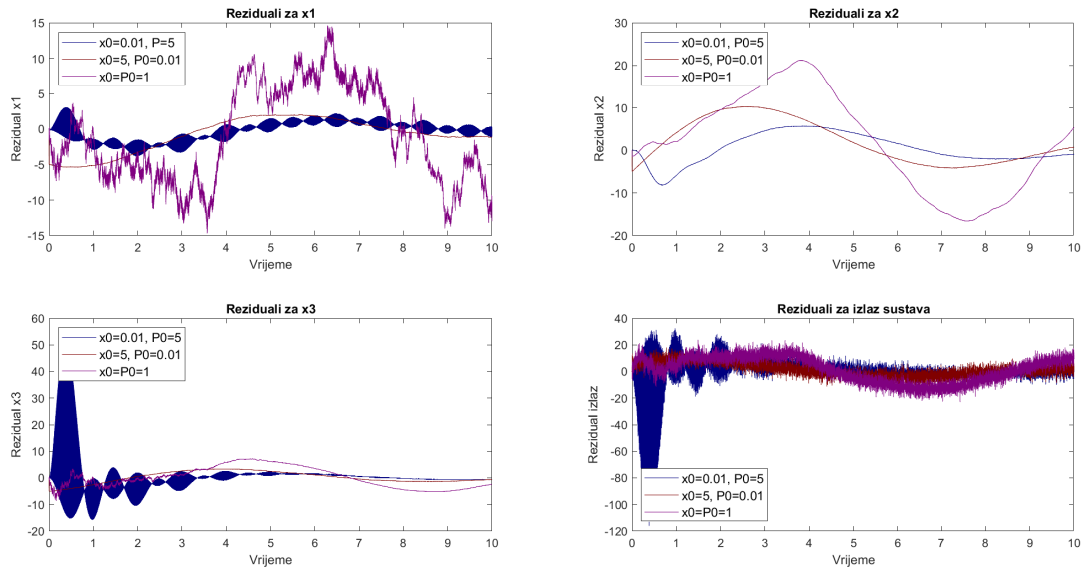
$Q=0.00001$   $R=10$   $x_0=1$   $P_0=1$   $Tstep=0.001$   $u=230\sin(2\pi t)$ , Patricija Ronta



Slika 4.27: Rad Kalman filtera kada je  $x_0 = P_0 = 1$

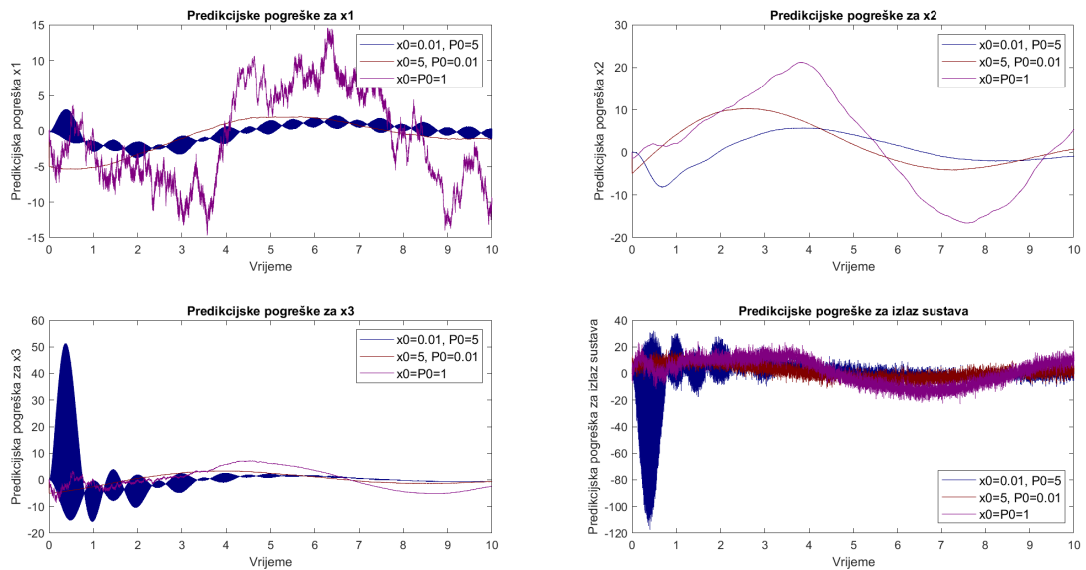
Promotre li se reziduali za sve varijable stanja i izlaz sustava, može se primijetiti da u svakom slučaju reziduali ili pogreške predviđanja nisu definitivno oko 0, već osciliraju oko nekih vrijednosti. Nadalje, pokazalo se da u prvom slučaju Kalmanov filter sve teže nadzire varijable stanja  $x_1$  i  $x_3$  i izlaz sustava  $y$ , što se i uspostavlja na slici 4.25. Iz slike 4.28 zaključuje se da ni u jednoj od ovih postavki filter ne može dobro procijeniti stanje te zbog toga postoji razlika između filtriranih i stvarnih vrijednosti vidljivih na slikama 4.25 - 4.27. Ako se promotre predikcijske pogreške na slici 4.29, one upućuju na iste tvrdnje koje su navedene promatrajući rezidualne za postavljene uvjete, odnosno one također potvrđuju da ovakvo okruženje nije pogodno za optimalan rad filtra.

Reziduali pri različitim vrijednostima  $x_0$  i  $P_0$ , Patricija Ronta



Slika 4.28: Reziduali za različite varijednosti  $x_0$  i  $P_0$

Predikcijske pogreške pri različitim vrijednostima  $x_0$  i  $P_0$ , Patricija Ronta

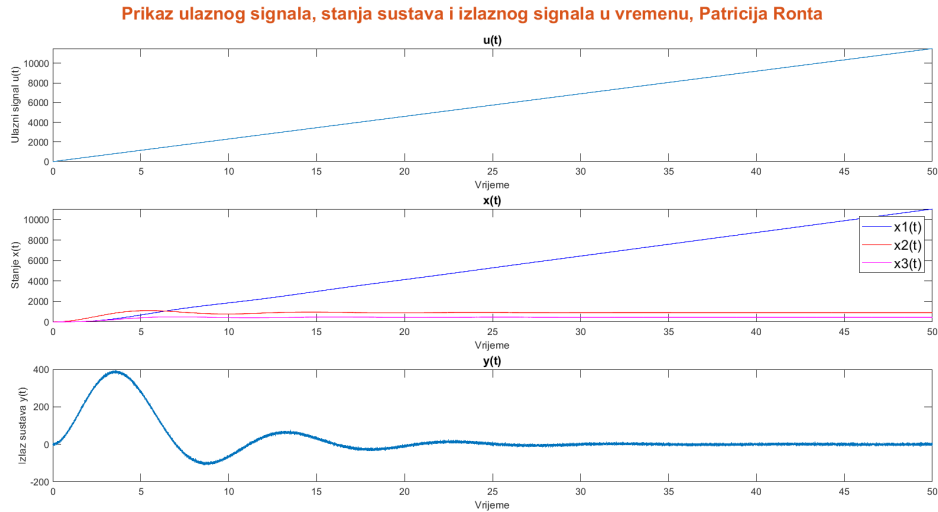


Slika 4.29: Predikcijske pogreške za različite vrijednosti  $x_0$  i  $P_0$

Pregledom svih konfiguracija, utvrđuje se da je optimalna okolina, koja nudi najpreciznije procjene Kalman filtra, postignuta za  $Q = 0.00001$ ,  $R = 10$ ,  $x_0 = 0$  i  $P_0 = 0$ .

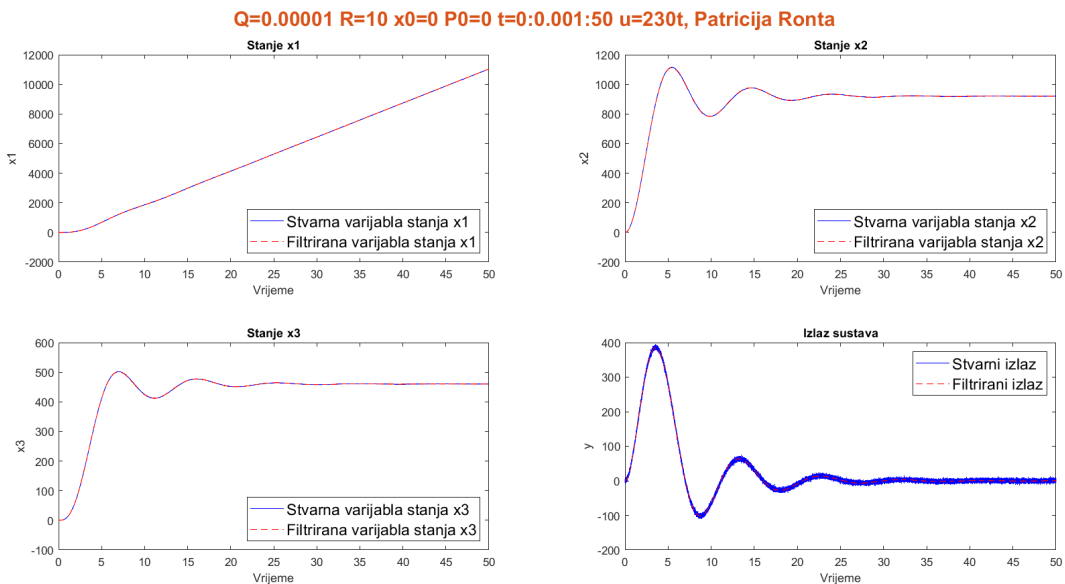
## Ispitivanje Kalman filtra za $u = 230t$

U sljedećoj konfiguraciji, ulazni sinusoidalni signal  $u = 230 \sin(2\pi t)$  zamijenjen je linearnim signalom  $u = 230t$ . Početni će parametri biti postavljeni na vrijednosti sukladno devetoj konfiguraciji u tablici 4.1, budući da je taj skup parametara uspostavio najpogodniju okolinu za optimalan način rada Kalman filtra. Vremenski prikaz lineranog ulaznog signala, varijabli stanja i izlaza sustava vidljiv je na slici 4.30.



**Slika 4.30:** Prikaz varijabli  $u(t)$ ,  $\mathbf{x}(t)$ ,  $y(t)$

Mijenjanjem ulaznog signala u linearni signal  $u = 230t$  očekivalo bi se da stvarne i filtrirane vrijednosti budu linearne jer je i sam sustav linearan, međutim slika 4.31 ne prikazuje u potpunosti linearne krivulje. Ulazni signal  $u = 230t$  povećava amplitudu signala kako vrijeme prolazi, što ne čini sustav nelinearnim. Sve filtrirane vrijednosti varijabli stanja i izlaza sustava u potpunosti prate stvarne vrijednosti što ukazuje na to da je Kalman filter precizan u procjeni stanja. Ako su početni uvjeti postavljeni na neprikladne vrijednosti ili ako su postavke parametara netočne, Kalman će se filter prilagoditi kako bi kompenzirao takve pogreške, što može rezultirati nelinearnim ponašanjem. Unatoč tome što Kalman filter točno procjenjuje stanja, ova okolina ipak nije optimalna za njegov rad jer rezultati nisu potpuno linearni kao što se očekivalo.



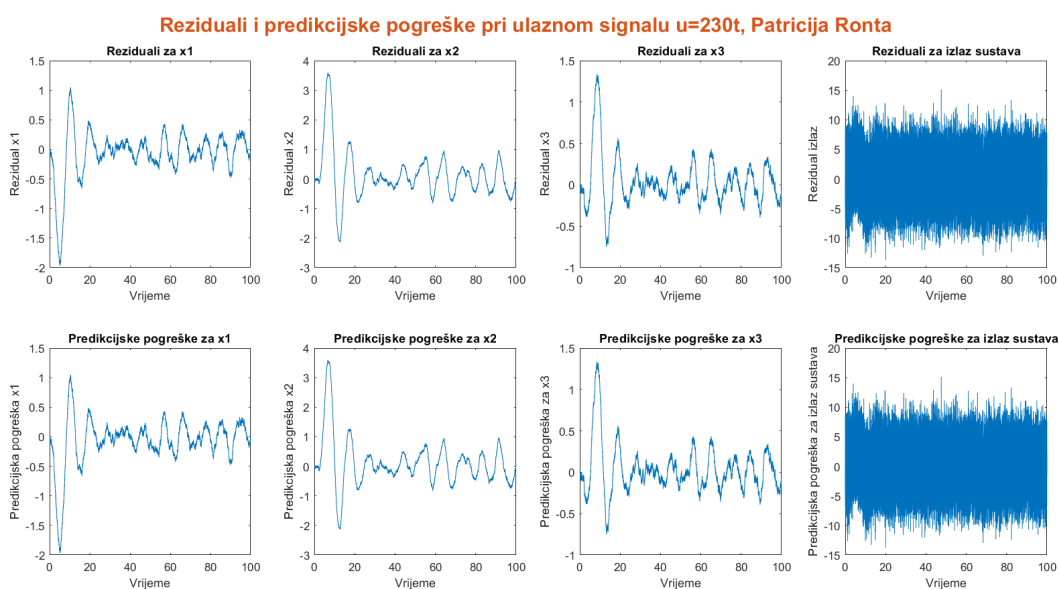
**Slika 4.31:** Rad Kalman filtera kada je  $u = 230t$

Vrijednost izračunatih vrijednosti RMSE za dani slučaj prikazani su tablicom 4.7.

**Tablica 4.7:** *Iznosi RMSE za linearan ulazni signal*

$u = 230t$
$x_1 = 1.0859$
$x_2 = 2.0436$
$x_3 = 0.6993$
$y = 3.5212$

Prema vrijednostima RMSE moglo bi se zaključiti da Kalman filter radi precizno, no iako radi precizno u smislu da se filtrirane i stvarne vrijednosti gotovo u potpunosti prate, ne radi optimalno jer očekivani linearni način rada nije postignut prije stacionarnog stanja. Zbog toga je potrebno promotriti rezidualne i predikcijske poreške prikazane na sljedećoj slici.



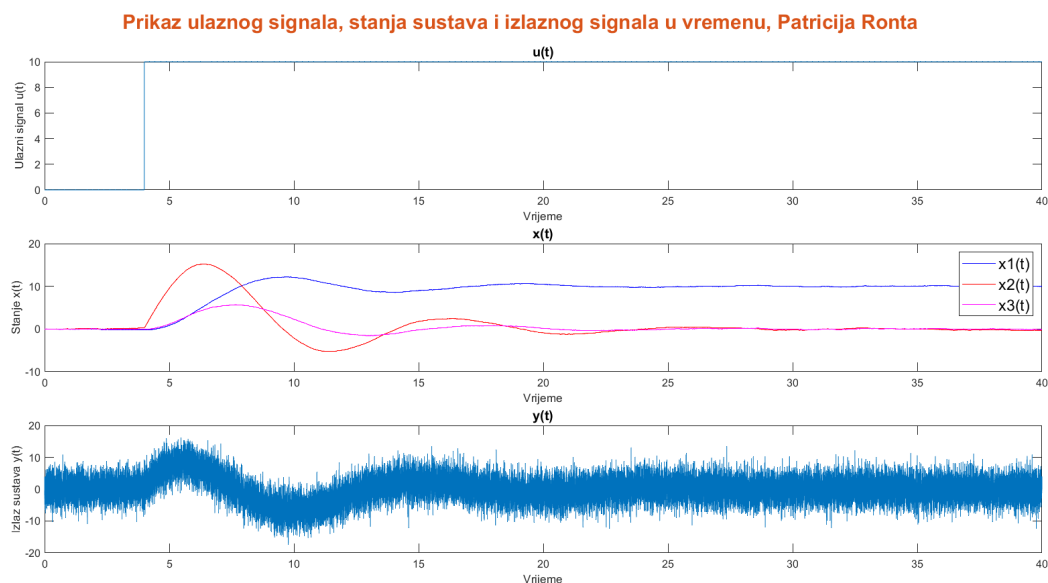
**Slika 4.32:** *Reziduali i predikcijske pogreške za  $u = 230t$*

Na temelju malih oscilacija reziduala i predikcijskih pogrešaka može se zaključiti da filter vrši preciznu procjenu stanja i uspješno minimizira šum. Prisutna nelinearnost u krivuljama do stacionarnog stanja upućuje na nedovoljno dobru inicijalizaciju početnih uvjeta. Za ovaj su slučaj  $\mathbf{x}_0$  i  $\mathbf{P}_0$  postavljene na vrijednost 0, stoga one sugeriraju da se procjena počela s multim početnim pretpostavkama o stanju i nesigurnosti filtriranja. Navedeno bi moglo zahtijevati dulje vrijeme za stabilizaciju filtra i njegovu konvergenciju u stacionarno stanje, posebno zbog naglog prijelaza iz sinusoidalnog ulaznog signala u linearni ulazni signal. Također, osim inicijalizacije početnih uvjeta, važno je razmotriti kako prirodne karakteristike komponenata u mreži mogu utjecati na nelinearnost sustava. Nelinearnosti komponenata mogu rezultirati tranzijentnim efektima koji se manifestiraju kao oscilacije ili nelinearne promjene u izlaznom signalu tijekom prijelaznih procesa. Ovi efekti mogu dodatno komplicirati postizanje stacionarnog stanja u filtriranju.



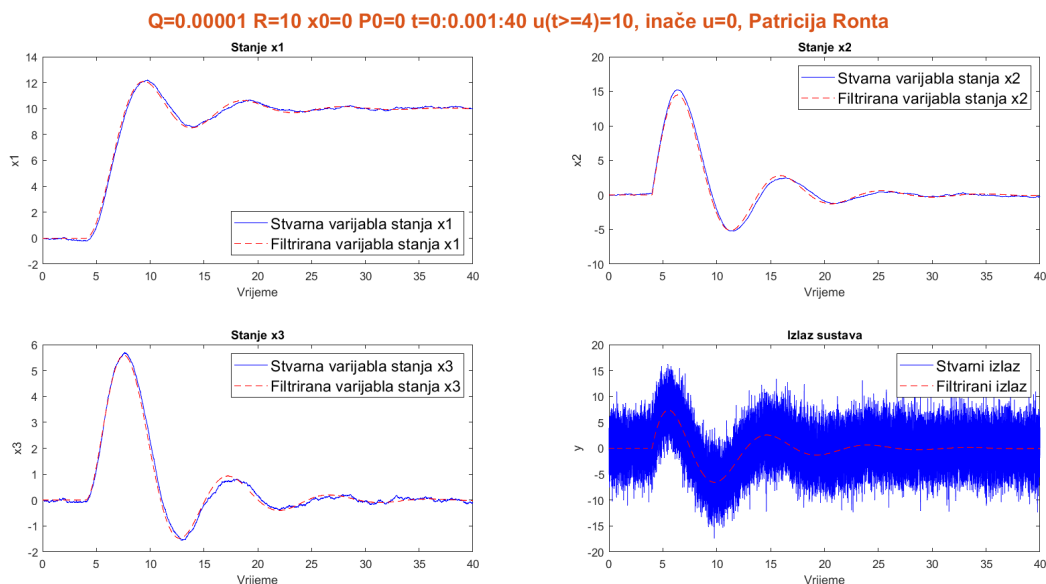
## Ispitivanje Kalman filtra za ulazni step signal

U ovoj će se konfiguraciji, kao i za linearan ulazni signal, zadržati vrijednosti parametara  $Q$ ,  $R$ ,  $x_0$  i  $P_0$ . Ulazni će signal biti postavljen na način da do četvrte sekunde ima vrijednost 0, a od četvrte sekunde dostiže skok na vrijednost 10. Vremenski prikaz opisanog ulaznog signala, stanja sustava i izlaza dan je slikom 4.33



Slika 4.33: Prikaz varijabli  $u(t)$ ,  $\mathbf{x}(t)$ ,  $y(t)$

Prilikom opisane promjene, Kalman filter radi kao što je prikazano slikom 4.34.



Slika 4.34: Rad Kalman filtera kada je  $u(t \geq 4) = 10$ , inače  $u = 0$

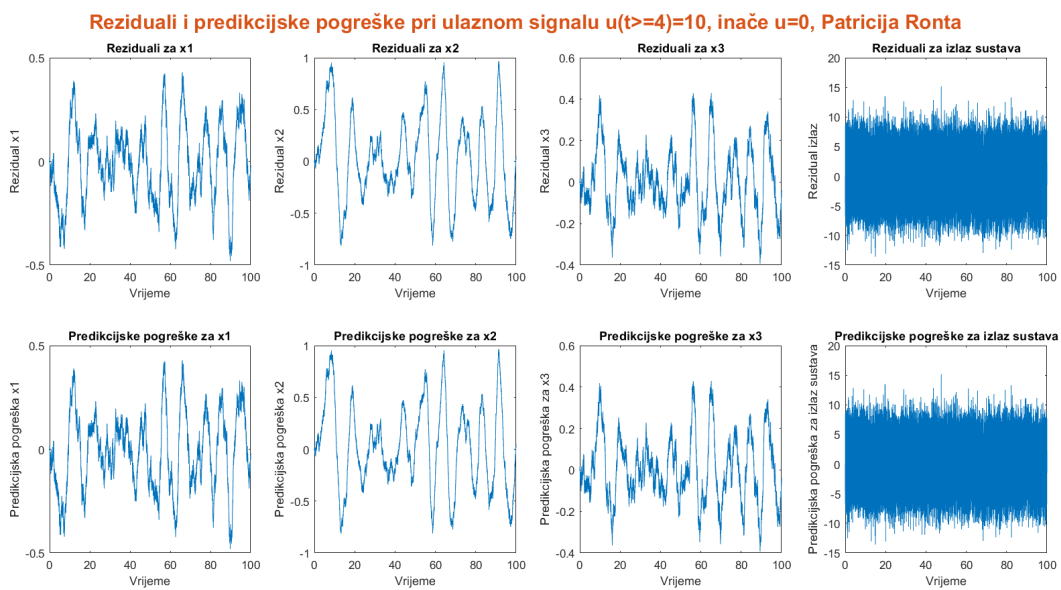
Uočava se da prilikom skoka signala, signal neće doseći eksplicitno postavljenu vrijednost 10. Također, vrijednost koja bi se trebala zadržati od četvrte sekunde, u ovom se slučaju smanjuje s vremenom. Bez obzira što su filtrirane vrijednosti bliske stvarnima, ako je ulazni signal step,

ne očekuju se valni oblici čije se vrijednosti smanjuju s vremenom. Navedeno može ukazivati na pojavu kada izlazni signal Kalman filtra privremeno prekorači (*eng. overshoot*) željene ili očekivane vrijednosti pri regiranju na promjene u ulaznom signalu. Moguće je da se ovako prekoračenje, prije nego što se stabilizira, pojavljuje zbog brze reakcije Kalman filtra na ulazni step signal. Da bi se izbjeglo ovako ponašanje, potrebno je podesiti početne parametre dok se ne dobije žejeni, odnosno očekivan rad filtra, stoga postavljeni parametri u ovome slučaju nisu pogodni. Izračunate se vrijednosti RMSE za ovu konfiguraciju nalaze u tablici 4.8

**Tablica 4.8:** Iznosi RMSE pri ulaznom step signalu

$u(t \geq 4) = 10, \text{ inače } 0$
$x_1 = 0.2243$
$x_2 = 0.5499$
$x_3 = 0.1343$
$y = 3.2147$

Manje vrijednosti RMSE mogu upućivati na precizan i stabilan rad Kalman filtra, međutim pogledaju li se reziduali i predikcijske pogreške može se uočiti da one osciliraju oko malih vrijednosti, stoga Kalman filter izvršava precizne procjene stanja, ali neželjeno ponašanje filtra, istaknuto na slici 4.34, ukazuje da ostali početni parametri nisu dovoljno dobro inicijalizirani za obradu ovakve promjene u ulaznom signalu.

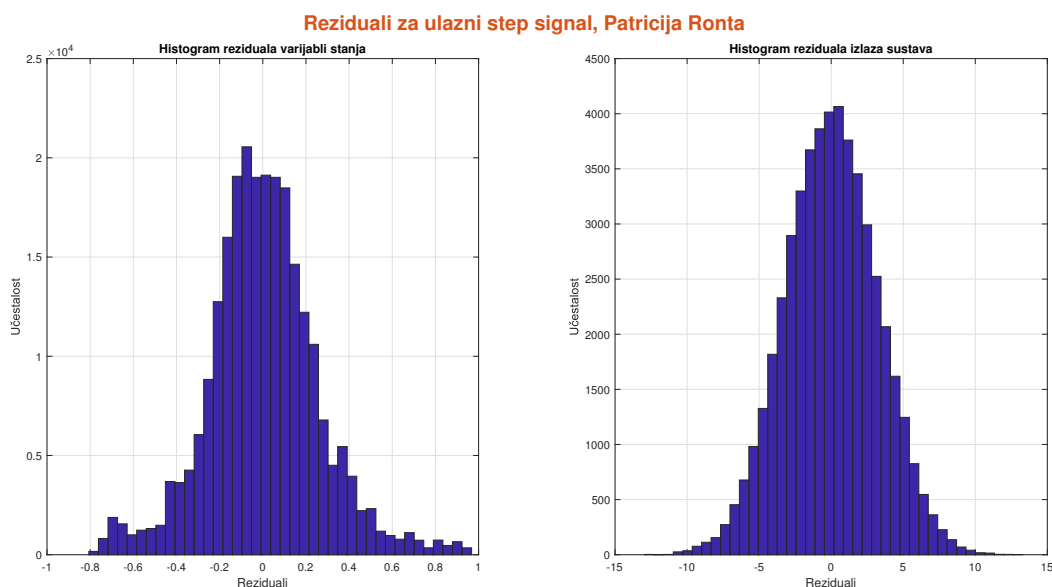


**Slika 4.35:** Reziduali i predikcijske pogreške za ulazni step signal

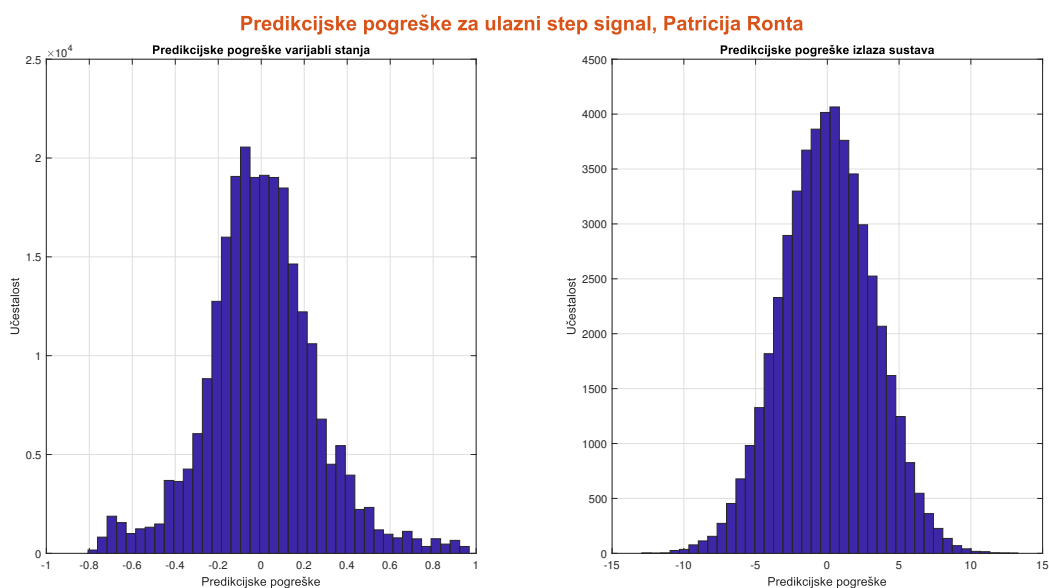
Prema slici 4.34, sustav se stabilizira oko četrdesete sekunde. Budući da bi se pri ulaznom step signalu, sustav trebao stabilizirati u četvrtoj sekundi na vrijednosti 10, u ovom se slučaju to dogodilo nešto kasnije jer je filtru trebalo neko vrijeme da se prilagodi promjeni ulaznog signala i naglom skoku u vrijednosti. Ovakva se pojava ponašanja može javiti zbog nedovoljno dobre inicijalizacije početnih uvjeta. Matrica je  $\mathbf{Q}$  postavljena na nisku vrijednost s kojom se pretpostavlja da je proces vrlo stabilan i da stvarni sustav ima male promjene u svojim varijablama stanja, što može rezultirati sporijom konvergencijom prema željenim vrijednostima.

Među ostalim, početna su se procjena stanja i početna nesigurnost postavile na vrijednost 0 te s time filter počinje s visokim stupnjem nesigurnosti i pretpostavkom da su varijable stanja 0, što također usporava konvergenciju. Uočljivo je i da se varijable stanja  $x_2$  i  $x_3$  te izlaz sustava  $y$  stabiliziraju na vrijednosti 0, a ne na 10 kako je očekivano. Ako su varijable stanja  $x_2$  i  $x_3$  te izlaz sustava  $y$  manje osjetljivi na promjene u ulaznom signalu ili mjerenjima u odnosu na varijablu  $x_1$ , filter će trebati više vremena da se prilagodi i stabilizira na željene vrijednosti.

Prikažu li se histogrami za rezidualne i predikcijske pogreške u varijablama stanja i izlazu sustava u stacionarnome stanju, dobiju se sljedeći rezultati.



**Slika 4.36:** *Reziduali u stacionarnome stanju za ulazni step signal*



**Slika 4.37:** *Predikcijske pogreške u stacionarnome stanju za ulazni step signal*

U stacionarnome stanju očekuje se da bi Kalman filter trebao pravilno procijeniti stanje sustava

i minimizirati pogreške. U tom se stanju očekuje da filter konvergira prema točnim procjenama stanja te da precizno procjenjuje stanja. Prema prikazima 4.36 i 4.37 primjetno je da najveću učestalost imaju reziduali i predikcijske pogreške koje su blizu vrijednosti 0, što potvrđuje da filter konvergira prema točnim i preciznim procjenama stanja. Također, reziduali i predikcijske pogreške odgovaraju normalnoj distribuciji iz čega se može zaključiti da filter uspješno modelira šum u mjerenjima i da nema sistematskih pogrešaka.

Na temelju navedenih zaključaka, bitno je naglasiti da se Kalman filter prilagodio ovakvoj okolini, ali da bi se ostvario njegov potpuno očekivani način rada, potrebno je ostvariti bolju međusobnu usklađenost početnih parametara koji znatno utječu na njegov optimalan način rada.

## 5. PRIMJENA KALMAN FILTRA NA ISTOSMJERNI (DC) STROJ

U ovom će poglavlju središnja točka fokusa biti matematički model istosmjernog (DC) stroja, temeljito razrađen kako bi se omogućilo razumijevanje njegove složene dinamike i ponašanja. Nakon izvoda njegova matematičkog modela, tako opisani istosmjerni stroj implementirat će se u MATLAB kodu i MATLAB Simulinku te će se razraditi algoritam primjene Kalman filtra kako bi vršio procjenu njegova stanja. Dobiveni će se rezultati prikazati i analizirati.

### 5.1. Princip rada istosmjernog stroja

Istosmjerni je stroj, poznat i kao istosmjerni motor ili generator, osnovna vrsta električnog stroja koja koristi istosmjernu struju za transformiranje električne energije u mehaničku (u slučaju motora) ili mehaničke energiju u električnu (u slučaju generatora) [27]. Prema navedenome, svaki se električni motor koji operira na osnovi istosmjerne struje ili za svoj rad koristi istosmjernu struju, svrstava u istosmjerni stroj.

Osnovni se princip istosmjernog stroja temelji na međudjelovanju električne struje i magnetskog polja, omogućujući pretvaranje energije između električnog i mehaničkog oblika. Ovaj princip leži u fundamentalnim zakonima elektromagnetizma i djeluje kroz nekoliko ključnih komponenti stroja.

Stroj ima dva osnovna dijela: stator i rotor. Stator je nepokretni dio koji sadrži statorski namotaj s fiksnim magnetskim polovima, dok je rotor pokretni dio s rotoskim namotajem i rotirajućim magnetskim polovima.

Ključna interakcija koja pokreće stroj temelji se na Lorentzovoj sili [28]. Kada električna struja protječe kroz namotaj smješten u magnetskom polju, stvara se sila poznata kao Lorentzova sila. Ova sila djeluje okomito na smjer struje i magnetskog polja. Kroz ovu silu, struja u namotaju doživljava mehaničku silu koja pokušava rotirati namotaj.

Da bi se održao kontinuirani smjer rotacije ili generacije struje, koristi se komutator. Komutator je uređaj koji preokreće smjer struje u rotorskom namotaju dok se rotor okreće. Kada se smjer struje promijeni, Lorentzova sila mijenja smjer i nastavlja poticati rotaciju namotaja. Ovaj postupak omogućava održavanje konstantne rotacije ili generacije istosmjerne struje.

Broj magnetskih polova na statoru i rotoru utječu na brzinu i moment stroja, Veći broj polova obično rezultira sporijom rotacijom, ali većim momentom, dok manji broj polova uzrokuje rotaciju s manjim momentom [28], što je vidljivo iz jednadžbe (5-56) i (5-58)

$$\omega = \frac{2\pi N}{60p} \quad (5-56)$$

$$k_T = \frac{pz}{2\pi a} \quad (5-57)$$

$$T = k_T \Phi I \quad (5-58)$$

gdje je  $\omega$  brzina vrtnje,  $p$  broj pari polova,  $N$  broj okretaja u minuti,  $k_T$  koeficijent momenta,  $z$  ukupan broj vodiča,  $a$  broj paralelnih grana,  $T$  moment i  $\Phi$  magnetski tok pola.

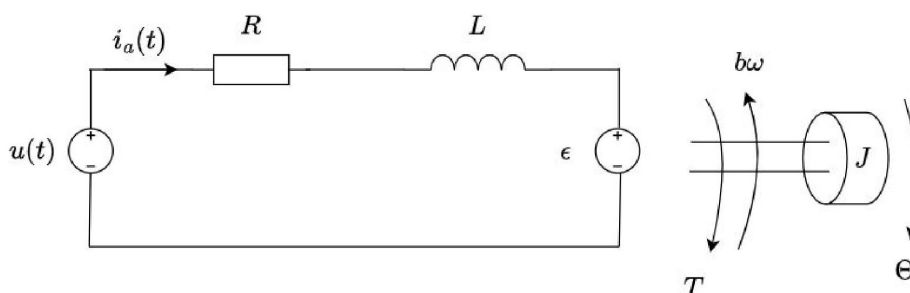
Na temelju ovog načela, osnovni princip istosmjernih strojeva proizlazi iz iskorištavanja Lorentzove sile koja se generira kada električna struja prolazi kroz magnetsko polje. Putem procesa

komutacije osigurava se neprekidan smjer rotacije ili struje, što omogućava konverziju energije između električnog i mehaničkog oblika.

## 5.2. Matematički model istosmjernog stroja

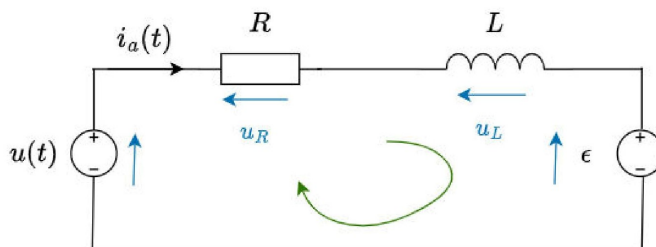
Za analizu ponašanja istosmjernog stroja u različitim radnim uvjetima, koristimo matematičke modele. Osnovni se model istosmjernog stroja sastoji od električnog dijela i mehaničkog dijela [29]. Električni se dio modela usredotočuje na električne komponente i procese u stroju te uključuje komponente kao što su otpornik  $R$  i induktivitet  $L$ , pri čemu otpornik predstavlja ukupni električni otpor namota, vodiča i drugih električnih komponenata unutar stroja, a induktivitet predstavlja inherentnu induktivnost komponenata stroja, kao što su namoti. Mehanički se dio modela fokusira na mehaničke komponente i procese unutar istosmjernog stroja koji se odnose na rotaciju. U tome se dijelu modela nalazi kutna pozicija rotora  $\Theta$ , brzina rotacije  $\omega$ , inercijski moment  $J$  koji iskazuje koliko je rotor stroja otporan na promjene u brzini rotacije te mehanički moment  $T$ . Električni su i mehanički dijelovi istosmjernog stroja međusobno povezani jer brzina rotacije utječe na generiranje električnog napona, a električni napon i struja utječu na generiranje momenta.

Da bi se izrazio matematički model istosmjernog stroja, potrebno je za početak napraviti strujni krug koji ga predstavlja.



**Slika 5.38:** Jednostavni strujni krug istosmjernog (DC) stroja

Za raspisavanje jednadžbi električnog dijela primijenit ćemo Kirchoffov zakon napona, prateći zadani referentni smjer petlje i referentne smjerove napona komponenata kao što je prikazano na slici 5.39.



**Slika 5.39:** Referentni smjerovi u električnome dijelu strujnoga kruga DC stroja

Sada se raspisuje električna jednadžba koja glasi

$$u - u_R - u_L - \epsilon = 0 \quad (5-59)$$

Zapiše li se napon na otporniku pomoću Ohmova zakona i napon induktiviteta preko njegove konstitutivne relacije, jednačba(5-59) poprima oblik

$$u - Ri_a - L \frac{di_a}{dt} - \epsilon = 0 \quad (5-60)$$

Osim električne jednačbe, potrebno je pomoću mehaničkoga dijela istosmjernog stroja raspisati mehaničku jednačbu [29].

$$J \frac{dw}{dt} = T_{el} - T_{ter} - b\omega \quad (5-61)$$

U danoj jednačbi  $\frac{dw}{dt}$  predstavlja ubrzanje rotora, odnosno promjenu brzine rotacije rotirajućeg dijela stroja s vremenom, dok izraz  $J \frac{dw}{dt}$  predstavlja rezultatni moment koji djeluje na rotirajući dio stroja u odgovoru na promjene brzine rotacije,  $b\omega$  je trenje,  $T_{el}$  elektromagnetski moment i  $T_{ter}$  moment tereta, koji će u ovom slučaju biti jednak nuli.

Izrazimo li elektromotornu silu  $\epsilon$  i elektromagnetski moment  $T_{el}$  kao

$$\epsilon = k_e \omega \quad (5-62)$$

$$T_{el} = k_T i_a \quad (5-63)$$

pri čemu je  $k_e$  konstanta koja predstavlja koliko elektromotorne sile generira motor pri određenoj brzini rotacije, a  $k_T$  konstanta momenta koja kvantificira odnos između električne struje koja teče kroz stroj i momenta koji stroj generira. U pojednostavljenim modelima istosmjernog stroja, kao što je to u ovom slučaju, pretpostavlja se da su ove dvije konstante jednake, označene kao  $k$ , čime se simplificira matematičko opisivanje ponašanja stroja.

Primjenjujući navedeno, dolazi se do dviju dinamičkih jednačbi

$$L \frac{di_a}{dt} + Ri_a + k\omega = u \quad (5-64)$$

$$J \frac{dw}{dt} = ki_a - b\omega \quad (5-65)$$

Varijable su stanja istosmjernog stroja struja armature  $i_a$  i brzina rotacije  $\omega$ , koje će se izraziti pomoću jednačbi (5-64) i (5-65) na način

$$\frac{di_a}{dt} = -\frac{R}{L}i_a - \frac{k}{L}\omega - \frac{1}{L}u \quad (5-66)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k}{J}i_a - \frac{b}{J}\omega \quad (5-67)$$

Nakon definiranja jednačbi stanja, dani će se sustav prikazati u prostoru stanja oblika

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (5-68)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \quad (5-69)$$

što u slučaju ovog modela odgovara sljedećem zapisu

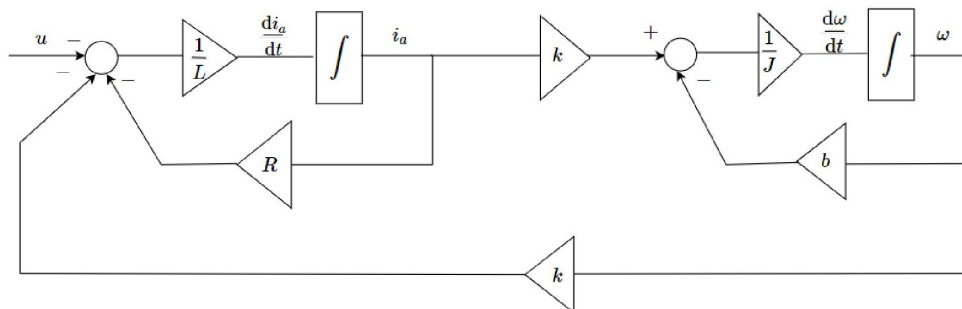
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{k}{L} \\ \frac{k}{J} & -\frac{b}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (5-70)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} + [0] \quad (5-71)$$

pri čemu je vektor  $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$  jednak

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \end{bmatrix} \quad (5-72)$$

Korištenjem matematičkog modela istosmjernog stroja, njegov je blokovski prikaz sljedeći



Slika 5.40: Blokovski dijagram matematičkog modela DC stroja

### 5.3. Analiza procjene stanja istosmjernog stroja Kalman filtrom

Matematički se model istosmjernog stroja, prikazan jednadžbama (5-70) i (5-71), implementira u MATLAB skripti kao na prikazu 5

Primjer koda 5: Matematički model DC stroja

```

1 %parametri
2 J=2; %kgm^2
3 R=0.25; %ohm
4 L=0.005; %H
5 Ia=15; %A
6 Ce=2.0; %Vs
7 wo=(1000*pi)/30; %rad/s
8 b=0; %Nms
9 %matrice
10 A=[-R/L -Ce/L; Ce/J -b/J];
11 B=[1/L;0];
12 C=[1 0;0 1];
13 D=0;

```

Nakon postavljanja matematičkog modela, potrebno je inicijalizirati početne uvjete. Za početak, inicijalni su uvjeti postavljeni kako je prikazano kodom 6. Budući da su za model DC stroja definirane dvije varijable stanja i dva izlaza sustava, matrice su  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  dijagonalne matrice veličine  $2 \times 2$ , s dijagonalnim elementima  $Q$  i  $R$ , redom.



### Primjer koda 6: Zadavanje početnih uvjeta

```

1 Tstep=0.001;
2 t0=0;
3 tn=10;
4 t=t0:Tstep:tn;
5 q=0.0001;
6 r=1;
7 Q=eye(2)*q;
8 R_noise=eye(2)*r;
9 x0=0;
10 P0=0;
11 rng(10,'twister');
12 w = sqrt(q).*randn(length(t),1);
13 v = sqrt(r).*randn(length(t),1);

```

Ulazni je signal postavljen na način da je do četvrte sekunde linearan, odnosno  $u = 230t$ , a od četvrte sekunde zadržava konstantnu vrijednost 230. Ovakav se ulazni signal postavio iz razloga što takav skok vrijednosti u ulaznom signalu može pomoći u identifikaciji karakteristika dinamičkog sustava te koliko filter precizno procjenjuje stanje sustava u prisutnosti promjena u ulaznom signalu. Na postavljeni matematički model istosmjernog stroja, implementirat će se Kalman filter pomoću jednadžbi predikcija i korekcija. Nakon njegove implementacije, ključno je ispitivati i mijenjati početne parametre kako bi se postavila okolina u kojoj filter radi optimalno. Te će se promjene odvijati u četiri konfiguracije na način da će se prvo mijenjati matrica kovarijance mjernog šuma  $\mathbf{R}$ , zatim matrica kovarijance procesnog šuma  $\mathbf{Q}$ . Također, promatrat će se način rada filtera pri jednakim vrijednostima matrice  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  te pri promjenama početne procjene stanja  $\mathbf{x}_0$  i početne nesigurnosti  $\mathbf{P}_0$ .

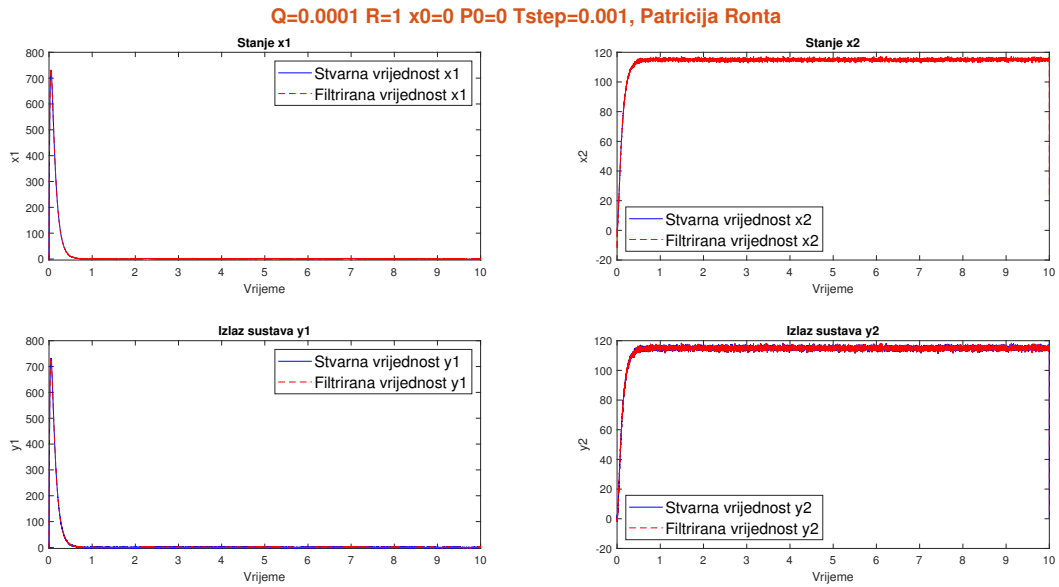
Matrica kovarijance mjernog šuma mijenjat će se tako da će početno biti postavljena na vrijednost 1, zatim na vrijednosti 5, 10, 0.5 i 0.002. Ostali će parametri biti postavljeni kao što je dano kodom 6. Tokom svih promjena, računat će se vrijednosti RMSE i prikazati reziduali i predikcijske pogreške koje će pružiti mogućnost dublje analize načina rada filtra jer one predstavljaju razliku između stvarnih i procijenjenih vrijednosti u svakom trenutku.

Vrijednosti su RMSE prilikom promjena vrijednosti matrice  $\mathbf{R}$  prikazni u narednoj tablici

**Tablica 5.9:** Iznosi RMSE pri različitim vrijednostima matrice  $\mathbf{R}$

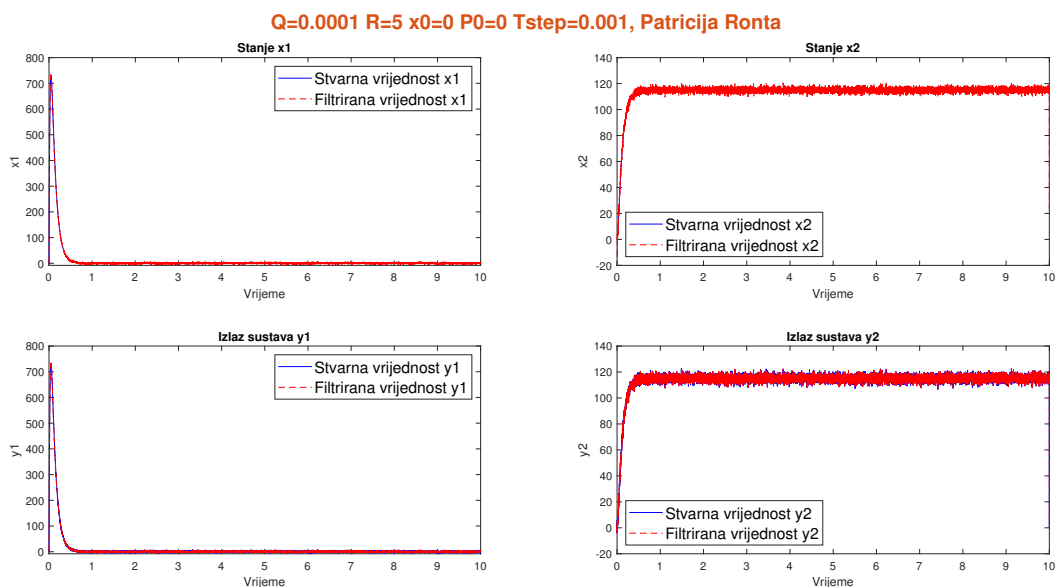
Iznosi RMSE za sve varijable stanja i za izlaz sustava				
$R = 1$	$R = 5$	$R = 10$	$R = 0.5$	$R = 0.002$
$x_1 = 0.9887$	$x_1 = 2.1897$	$x_1 = 3.0947$	$x_1 = 0.6934$	$x_1 = 0.0451$
$x_2 = 0.7439$	$x_2 = 1.6438$	$x_2 = 2.3140$	$x_2 = 0.5193$	$x_2 = 0.0361$
$y_1 = 0.0692$	$y_1 = 0.0950$	$y_1 = 0.1192$	$y_1 = 0.0186$	$y_1 = 0.0038$
$y_2 = 1.2244$	$y_2 = 2.6877$	$y_2 = 3.7877$	$y_2 = 0.8733$	$y_2 = 0.2170$

Prva konfiguracije dat će način rada Kalman filtra koji je prikazan na slici 5.41



**Slika 5.41:** Rad Kalman filtera kada je  $R = 1$

U ovome se slučaju, filtrirane i stvarne vrijednosti gotovo u potpunosti slijede na što upućuju i male vrijednosti RMSE. Zbog postavke matrice  $\mathbf{R}$  na relativno visoku vrijednost u odnosu na matricu  $\mathbf{Q}$ , filter će rezultirati šumnijim izlazom u filtriranim vrijednostima tog izlaza jer reagira jače na svako odstupanje između mjerenja i procijenjenih stanja te će više vjerovati mjerenjima, čak i ako su ta mjerenja šumna ili nepouzdana. Ipak nešto manje šumna filtrirana vrijednost varijable stanja  $x_2$ , koja predstavlja brzinu vrtnje, može ukazivati na posljedicu šuma u varijabli stanja  $x_1$ , odnosno u struji armature koji se prenosi na brzinu vrtnje zbog dinamike sustava. Ako se matrica  $\mathbf{R}$  poveća na vrijednost 5, tada Kalman filter radi prema slici 5.42.

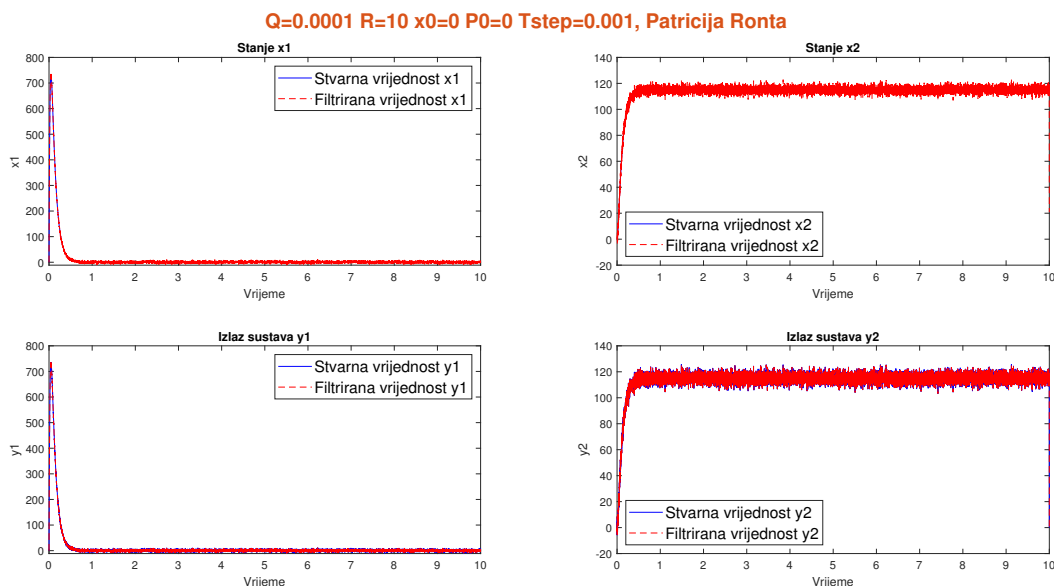


**Slika 5.42:** Rad Kalman filtera kada je  $R = 5$

Povećanjem se vrijednosti matrice  $\mathbf{R}$  dao još veći naglasak na mjerenja te se time povećala osjetljivost filtra na mjerenja. Filter se u ovome slučaju manje oslanja na model dinamike sustava,

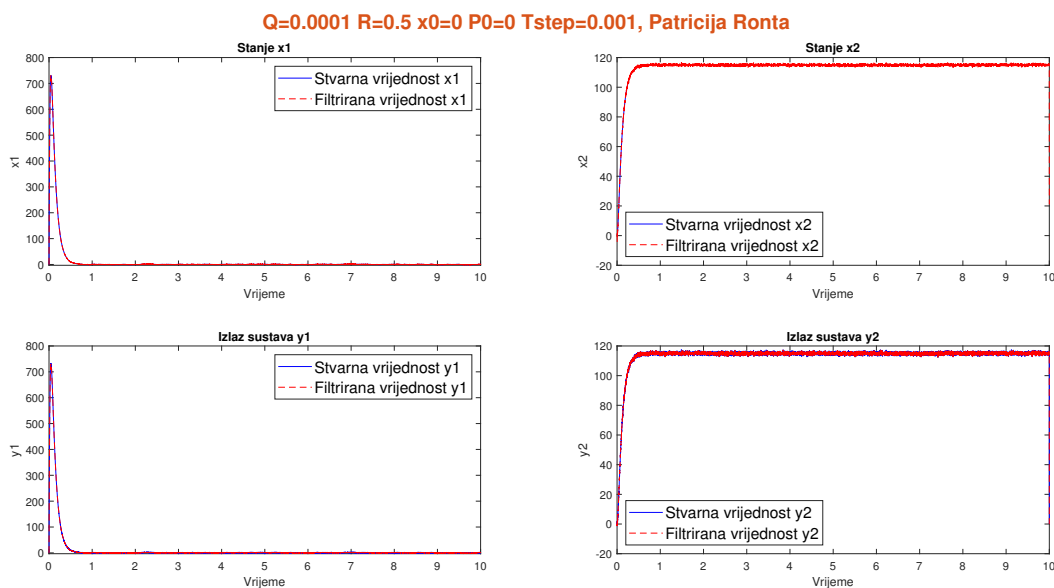
a više vjeruje mjerenjima, što rezultira šumnijim filtriranim vrijednostima u svim varijablama stanja i svim izlazima sustava.

Na temelju se prethodne dvije konfiguracije može očekivati da će Kalman filter dodatnim povećanjem matrice  $\mathbf{R}$  na visoku vrijednost 10 raditi na način da će još više vjerovati mjerenjima i da je još osjetljiviji na šum u njima, što rezultira širenjem šuma u svim filtriranim vrijednostima. Navedeno se može uočiti na slici 5.43 koja odgovara opisanom načinu rada filtra pri najvišoj vrijednosti matrice  $\mathbf{R}$ .



Slika 5.43: Rad Kalman filtera kada je  $R = 10$

Ako se matrica  $\mathbf{R}$  sada smanji na 0.5, tada Kalman filter radi na sljedeći način

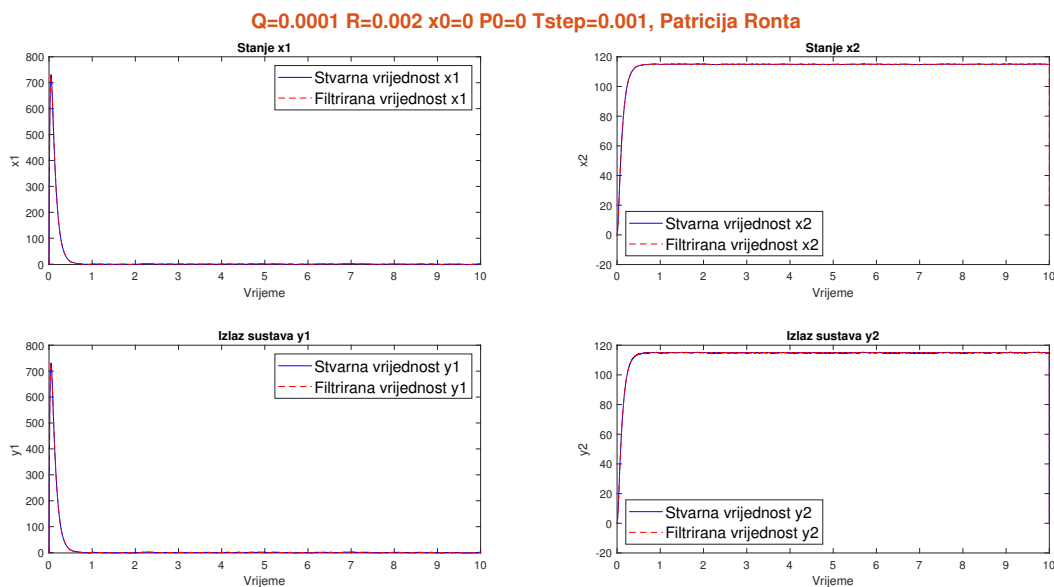


Slika 5.44: Rad Kalman filtera kada je  $R = 0.5$

U ovom se slučaju, prilikom smanjenja vrijednosti matrice  $\mathbf{R}$ , filter više oslanja na model di-

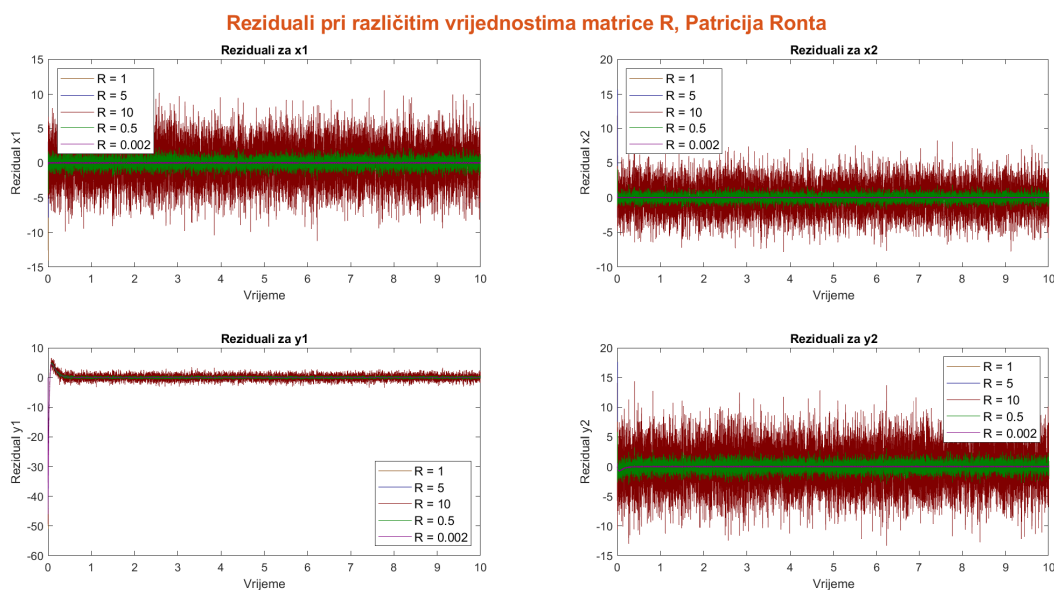
namike sustava te daje manji naglasak na mjerenja te su zbog toga filtrirane vrijednosti manje šumne za razliku od prethodnih konfiguracija.

Postavljanjem vrijednosti matrice  $\mathbf{R}$  na još manju vrijednost, Kalman filter radi na način kako je prikazano slikom 5.45.



**Slika 5.45:** Rad Kalman filtera kada je  $R = 0.002$

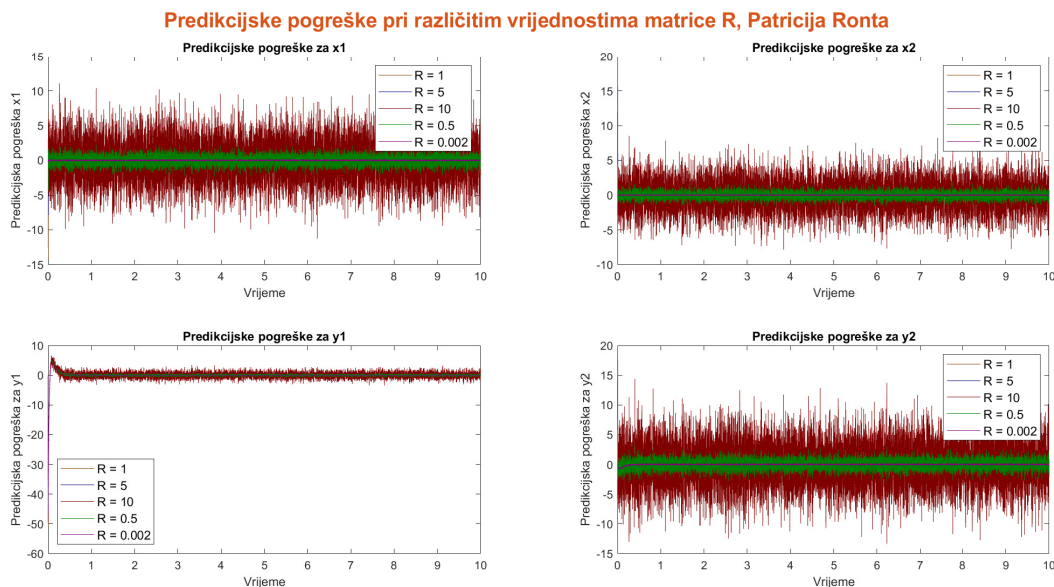
Kalman filter u ovakvoj okolini gotovo potpuno vjeruje modelu dinamike sustava i manje reagira na šum u mjerenjima. Primjećuje se da se stvarne i filtrirane vrijednosti gotovo u potpunosti prate što znači da je filter precizno procijenio stanja sustava te su ovako postavljeni uvjeti osigurali njegov optimalan način rada.



**Slika 5.46:** Reziduali za različite vrijednosti matrice  $\mathbf{R}$

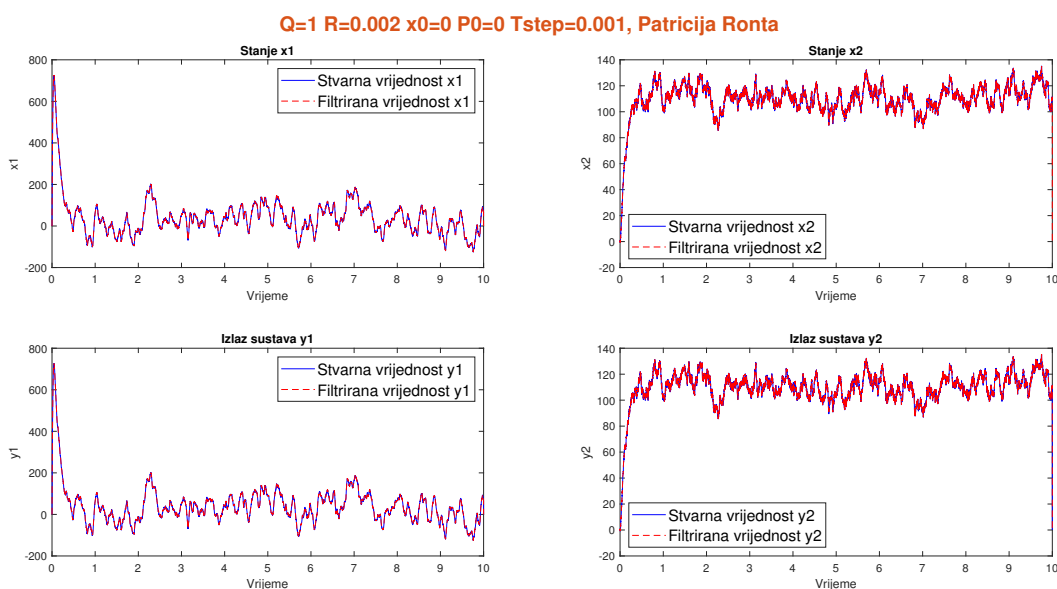
Ako se pogleda prikaz reziduala, može se potvrditi da su reziduali i predikcijske pogreške naj-

manje kada je  $R = 0.002$ , stoga na toj vrijednosti matrice, Kalman filter daje najpreciznije procjene, što je i vidljivo na slici 5.45. Na najvišoj je vrijednosti matrice  $\mathbf{R}$  prisutan najveći šum, tako da to može ukazivati da je takva vrijednost matrice previše velika u odnosu na stvarni šum u podacima, što na kraju rezultira šumnijim filtriranim vrijednostima kao na slici 5.43. Sve se navedeno također može potvrditi iz prikaza predikcijskih pogrešaka sa slike 5.47.



Slika 5.47: Predikcijske pogreške za različite vrijednosti matrice  $\mathbf{R}$

U sljedećoj se konfiguraciji mijenja matrica kovarijance procesnog šuma  $\mathbf{Q}$ . Najprije će se njena vrijednost povesti na vrijednost 1 te je u takvim uvjetima rad Kalman filtra prikazan slikom 5.48

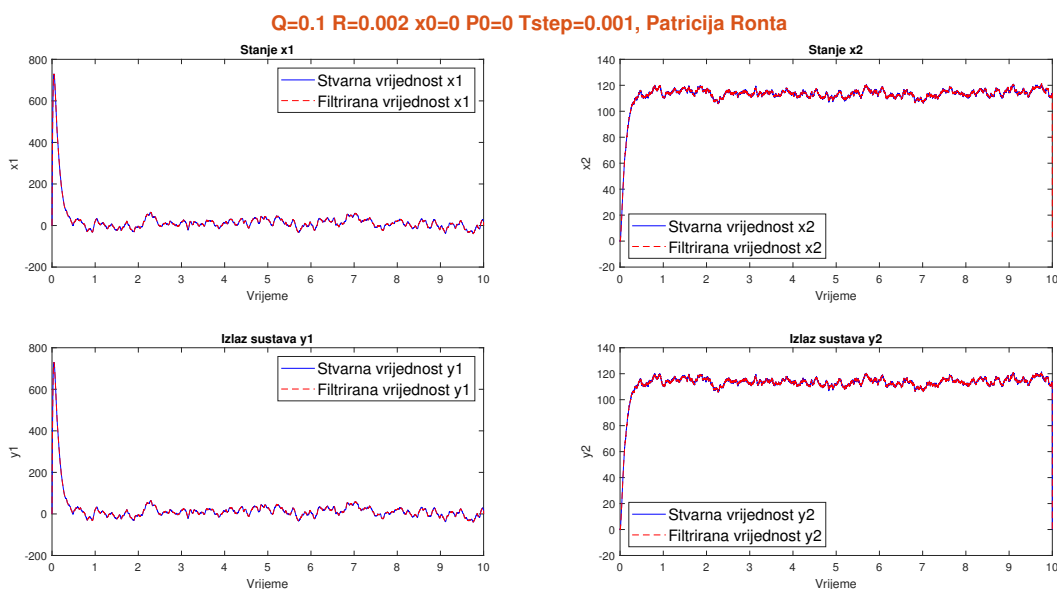


Slika 5.48: Rad Kalman filtra kada je  $Q = 1$

U ovome slučaju, krivulje više nisu glatke, što sugerira da povećanjem matrice  $\mathbf{Q}$  filter postaje manje osjetljiv na šum u mjerenjima te je ovakva promjena matrice omogućila filtru da

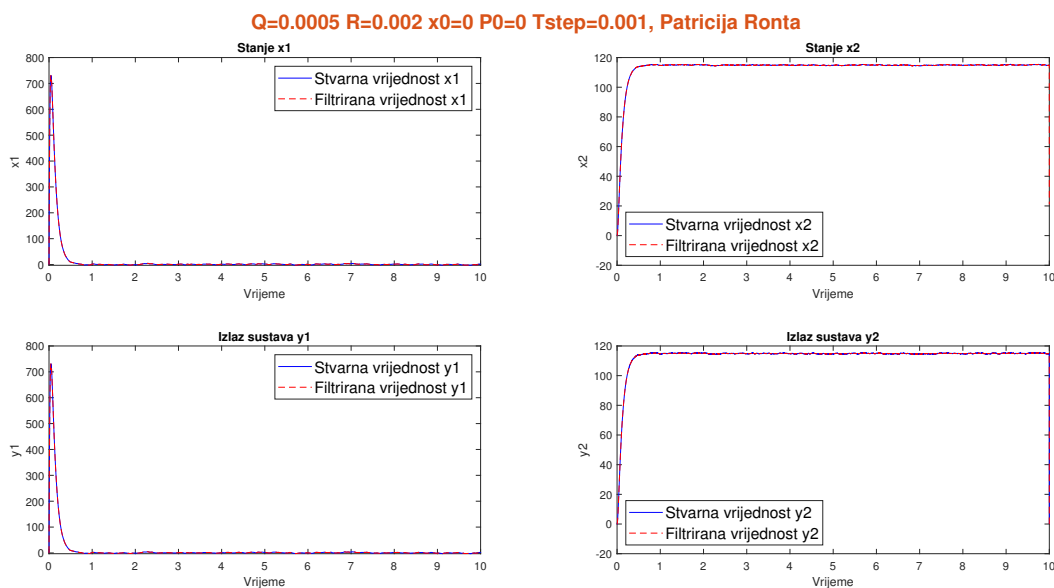
brže reagira na promjene u podacima. Iako filter brzo konvergira prema stvarnim vrijednostima, prikazane oscilacije mogu ukazivati na višu postavku matrice  $\mathbf{Q}$  nego što je to stvarno potrebno.

Ako se matrica  $\mathbf{Q}$  smanji na vrijednost 0.1, tada se smanjila varijanca šuma u procjenama stanja te filter više vjeruje tim procjenama. Zbog toga su krivulje u ovome slučaju glađe što se može primijetiti sa slike 5.49.



**Slika 5.49:** Rad Kalman filtera kada je  $Q = 0.1$

Budući da krivulje nisu u potpunosti glatke, potrebno je nastaviti podešavati vrijednosti matrice  $\mathbf{Q}$ . U sljedećem slučaju, vrijednost se matrice  $\mathbf{Q}$  smanji na vrijednosti 0.0005 te se dobije naredni prikaz načina rada Kalman filtra.

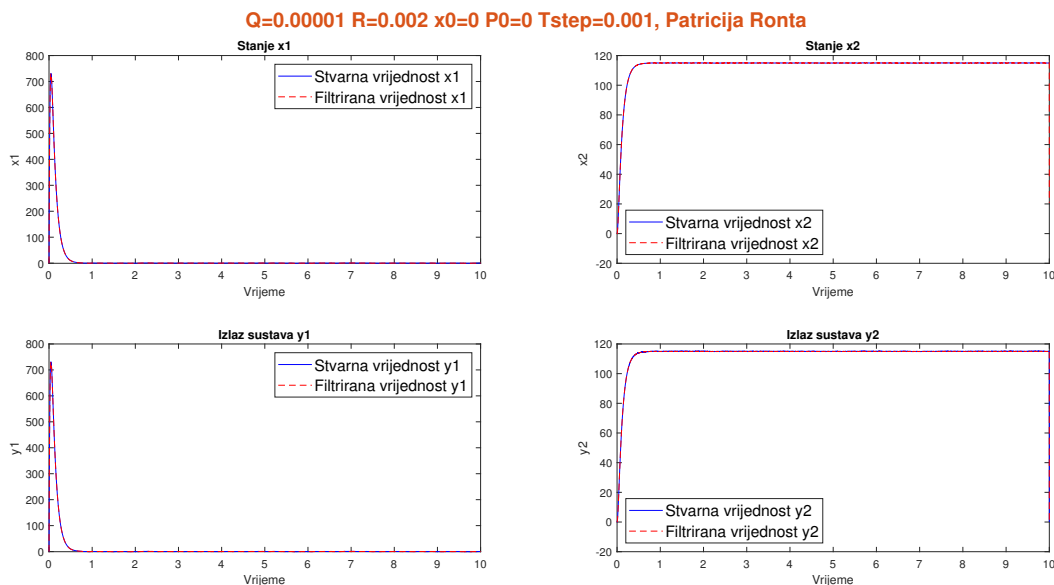


**Slika 5.50:** Rad Kalman filtera kada je  $Q = 0.0005$

U ovakvim je uvjetima filter postao manje osjetljiv na promjene u procjenama stanja, što je

rezultiralo glatkim krivuljama te je pružilo veću stabilnost u njegovim rezultatima procesa filtriranja, potvrđeno gotovo potpunim praćenjem stvarnih i filtriranih vrijednosti.

Smanji li se dodatno vrijednost matrice  $\mathbf{Q}$ , Kalman filter radi kao što je prikazano slikom 5.51.



**Slika 5.51:** Rad Kalman filtera kada je  $Q = 0.00001$

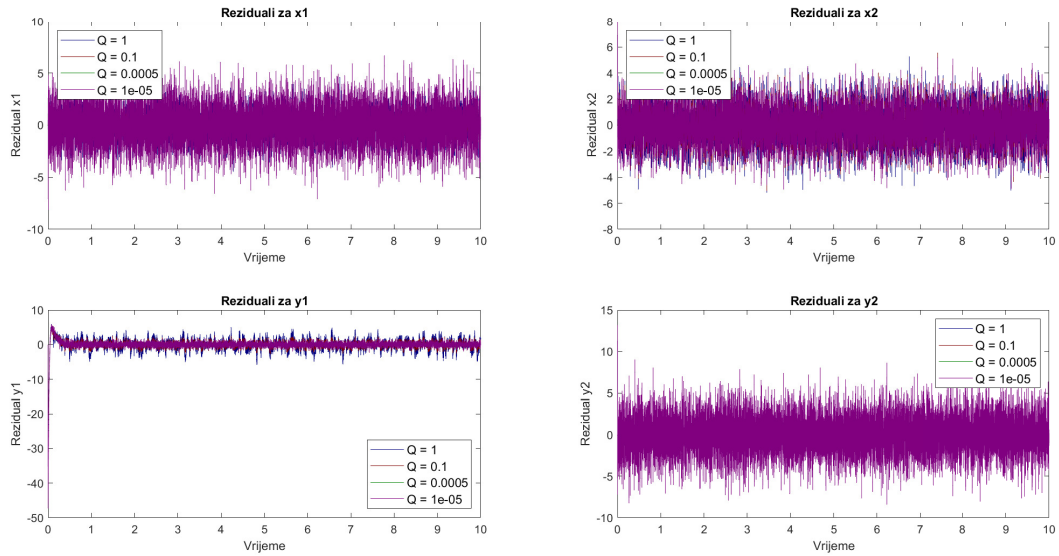
U ovakvim su uvjetima krivulje u cijelosti glatke te filter radi na najprecizniji način u usporedbi sa svim prethodnim konfiguracijama. Postavljanjem vrijednosti matrice  $\mathbf{Q}$  na najmanju vrijednost znači da filter minimalno tolerira šum u procjenama stanja te im minimalno vjeruje, a manja vrijednost matrice  $\mathbf{R}$  sugerira da filter vjeruje mjerenjima, ali ne previše. Postavljena početna procjena i početna nesigurnost na vrijednost 0 omogućuje filtru da ne unosi dodatnu nesigurnost u procjenama stanja. Ovakva je ravnoteža između parametara osigurala okolinu za optimalan način rada Kalman filtra. Navedeno se može očekivati i prema najmanjim vrijednostima RMSE prikazanim u tablici 5.10, koja također prikazuje druge RMSE vrijednosti za svaku varijaciju matrice  $\mathbf{Q}$ .

**Tablica 5.10:** Iznosi RMSE pri različitim vrijednostima matrice  $\mathbf{Q}$

Iznosi RMSE za sve varijable stanja i za izlaz sustava			
$Q = 1$	$Q = 0.1$	$Q = 0.0005$	$Q = 0.00001$
$x_1 = 1.0075$	$x_1 = 0.3196$	$x_1 = 0.04937$	$x_1 = 0.0439$
$x_2 = 1.0085$	$x_2 = 0.3229$	$x_2 = 0.0443$	$x_2 = 0.0331$
$y_1 = 0.0019$	$y_1 = 0.0022$	$y_1 = 0.0036$	$y_1 = 0.0039$
$y_2 = 0.0045$	$y_2 = 0.0370$	$y_2 = 0.2182$	$y_2 = 0.2147$

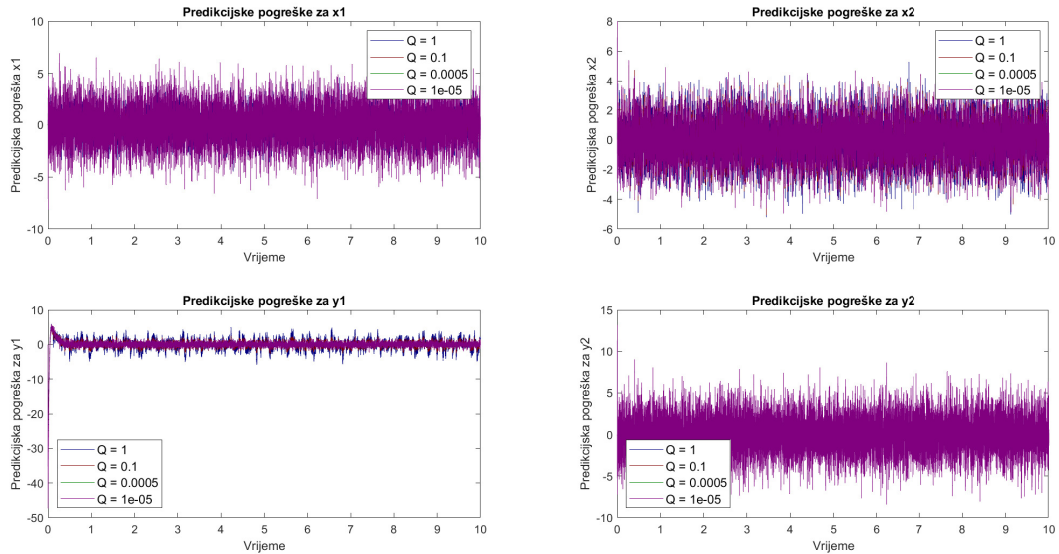
Prema prikazu reziduala i predikcijskih pogrešaka na slikama 5.52 i 5.53 može se uočiti da su reziduali i predikcijske pogreške šumne, međutim Kalman filter pokušava smanjiti utjecaj tog šuma, ali ne može ga u potpunosti ukloniti. Prema prikazu na slici 5.51 zaključuje se kako je filter uspješno i u cijelosti minimizirao utjecaj takvog šuma te dao najpreciznije procjene stanja.

Reziduali pri različitim vrijednostima matrice  $Q$ , Patricija Ronta



Slika 5.52: Reziduali za različite vrijednosti matrice  $Q$

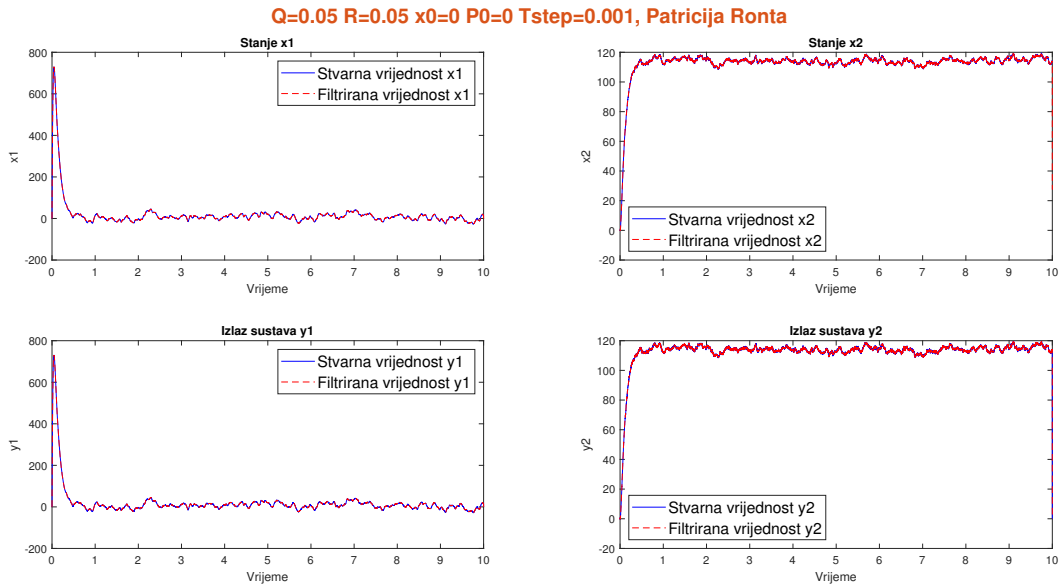
Predikcijske pogreške pri različitim vrijednostima matrice  $Q$ , Patricija Ronta



Slika 5.53: Predikcijske pogreške za različite vrijednosti matrice  $Q$

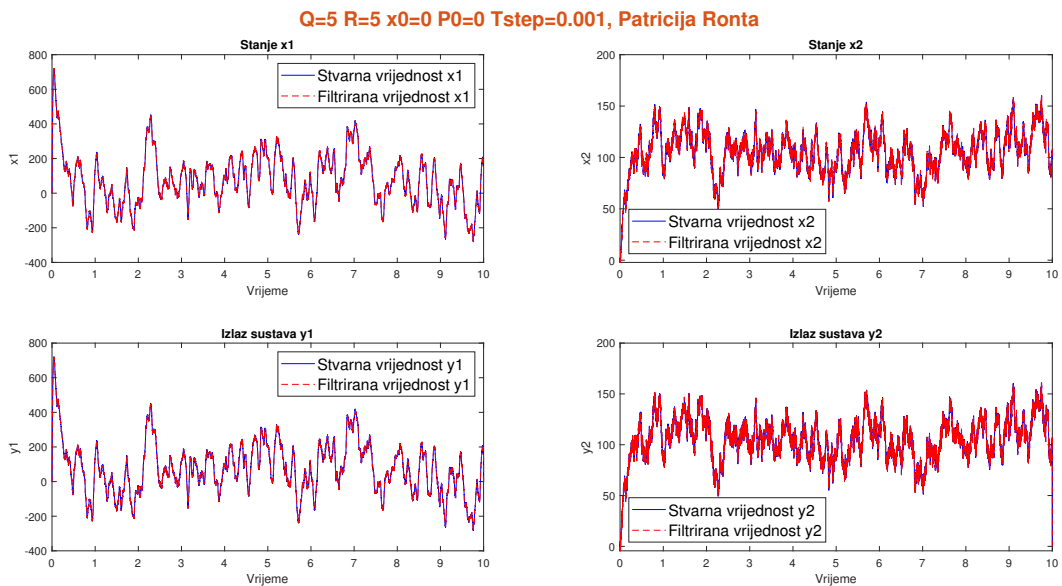
U sljedećoj će se konfiguraciji matrice  $Q$  i  $R$  postaviti na istu, manju vrijednost te na istu, veću vrijednost. Ako se postave na vrijednost 0.05, tada Kalman filter radi po prikazu na slici 5.54. Prilikom izjednačavanja vrijednosti matrice  $Q$  i  $R$ , filter jednako tretira šum u mjerenjima i šum u dinamici sustava prilikom procjene stanja i ažuriranja procjena. Budući da su krivulje varijabli stanja i izlaza sustava oštrije, to upućuje na veću osjetljivost filtra na šum u mjerenjima.





**Slika 5.54:** Rad Kalman filtera kada je  $Q = R = 0.05$

Postavljanjem vrijednosti matrice  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  na veću vrijednost, tada je prikaz načina rada Kalman filtera dan slikom 5.55



**Slika 5.55:** Rad Kalman filtera kada je  $Q = R = 5$

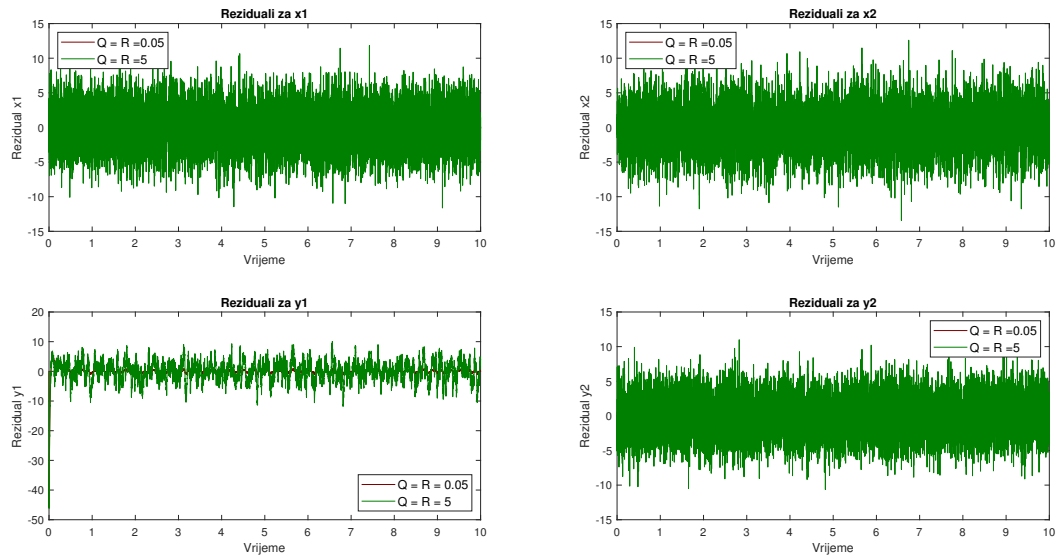
U ovome slučaju krivulje više nisu uopće glatke jer kada su matrice  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  postavljene na jednake visoke vrijednosti, filter će jednako tretirati šumove u procjeni stanja i šumove u mjerenjima, što rezultira da brže reagira na svaku promjenu i pokušava ih pratiti što je preciznije moguće. Budući da filter brže reagira na promjene u mjerenjima, rezultat su oštrije promjene u procjenama stanja kako bi se što preciznije pratila mjerenja.

Pogledaju li se izračunate vrijednosti RMSE u tablici 5.11, uočava se da se pri većoj vrijednosti matrice  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ , povećavaju vrijednosti RMSE, što daje manju preciznost rada Kalman filtra.

**Tablica 5.11:** *Iznos RMSE pri jednakim vrijednostima matrica Q i R*

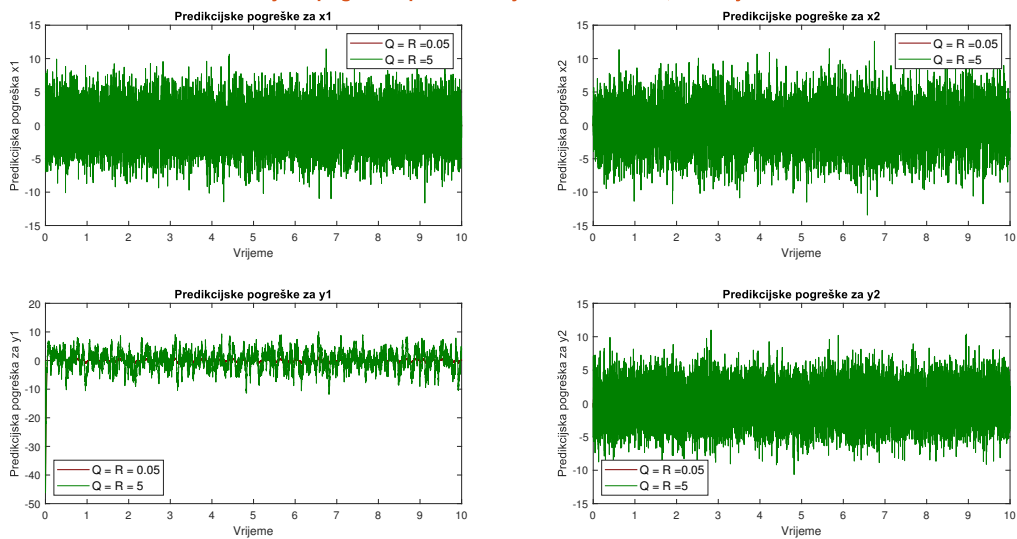
Iznosi RMSE za sve varijable stanja i za izlaz sustava	
$Q = R = 0.05$	$Q = R = 5$
$x_1 = 0.3119$	$x_1 = 3.1193$
$x_2 = 0.3282$	$x_2 = 3.2823$
$y_1 = 0.0030$	$y_1 = 0.0164$
$y_2 = 0.4008$	$y_2 = 3.1153$

**Reziduali pri istim vrijednostima Q i R, Patricija Ronta**



**Slika 5.56:** *Reziduali za iste vrijednosti matrica Q i R*

**Predikcijske pogreške pri istim vrijednostima Q i R, Patricija Ronta**



**Slika 5.57:** *Predikcijske pogreške za iste vrijednosti matrica Q i R*

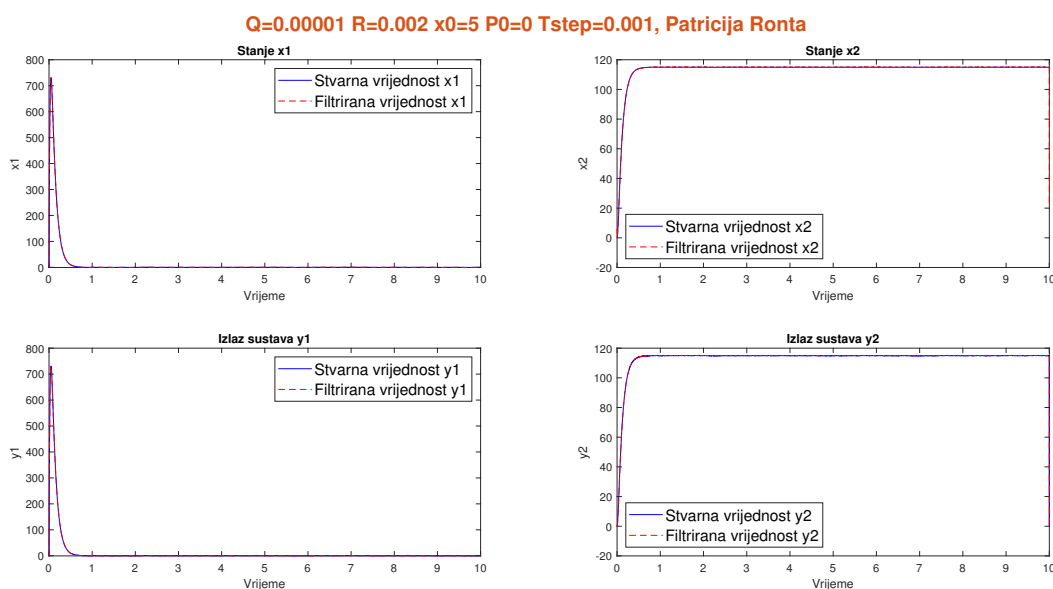
U rezidualima i predikcijskim pogreškama, prikazani na slikama 5.56 i 5.57, prisutan je šum. Budući da je način rada filtra prikazan oscilirajućim krivuljima, tada takvo ponašanje može biti uzrokovano filtrovim vrlo brzim prilagođavanjem promjenama u mjerenjima i stanju sustava, a velikom osjetljivošću filtra na takve promjene rezultira ostrim oscilacijama. Sa slika 5.54 i 5.55 važno je uočiti da se filtrirane i stvarne vrijednosti prate, stoga šum koji je vidljiv na rezidualima i predikcijskim pogreškama minimiziran je od strane filtra. Ovakav način rada pokazuje da filter ima precizne procjene, međutim narušenom ravnotežom među parametrima, nije se dobio očekivani prikaz načina rada.

U posljednjoj se konfiguraciji mijenjaju početna procjena stanja  $\mathbf{x}_0$  i početna nesigurnost  $\mathbf{P}_0$ . Izračunate su vrijednosti RMSE za svaku njihovu promjenu prikazane u danoj tablici 5.12

**Tablica 5.12:** Iznosi RMSE pri različitim vrijednostima  $\mathbf{x}_0$  i  $\mathbf{P}_0$

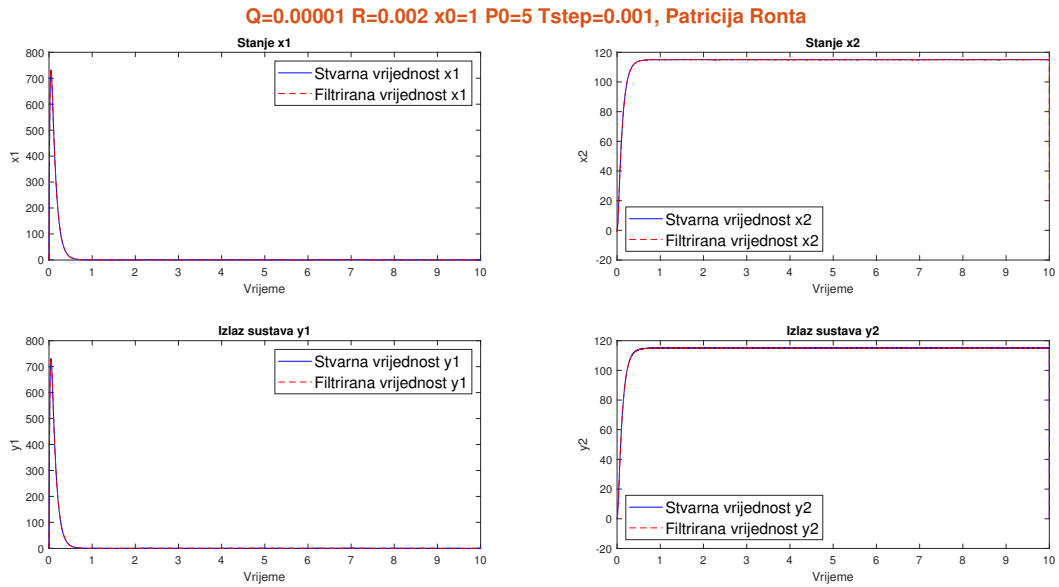
Iznosi RMSE za sve varijable stanja i za izlaz sustava		
$\mathbf{x}_0 = 5, \mathbf{P}_0 = 0$	$\mathbf{x}_0 = 1, \mathbf{P}_0 = 5$	$\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}_0 = 6$
$x_1 = 0.0568$	$x_1 = 0.0447$	$x_1 = 0.0553$
$x_2 = 0.1022$	$x_2 = 0.0377$	$x_2 = 0.0702$
$y_1 = 0.0287$	$y_1 = 0.0038$	$y_1 = 0.0038$
$y_2 = 0.2302$	$y_2 = 0.2152$	$y_2 = 0.2152$

Prilikom povećanja početne procjene stanja  $\mathbf{x}_0$  na vrijednost 5, moguće je očekivati brže konvergiranje filtra stvarnom stanju sustava jer početna procjena sada može biti bliža stvarnom stanju sustava. Ako se pogleda način rada filtra prilikom ove promjene, može se uočiti da se stvarne i filtrirane vrijednosti gotovo u potpunosti prate te da su krivulje varijabli stanja i izlaza sustava glatke i prikazane s minimalnim utjecajem šuma.



**Slika 5.58:** Rad Kalman filtera za  $\mathbf{x}_0 = 5$  i  $\mathbf{P}_0 = 0$

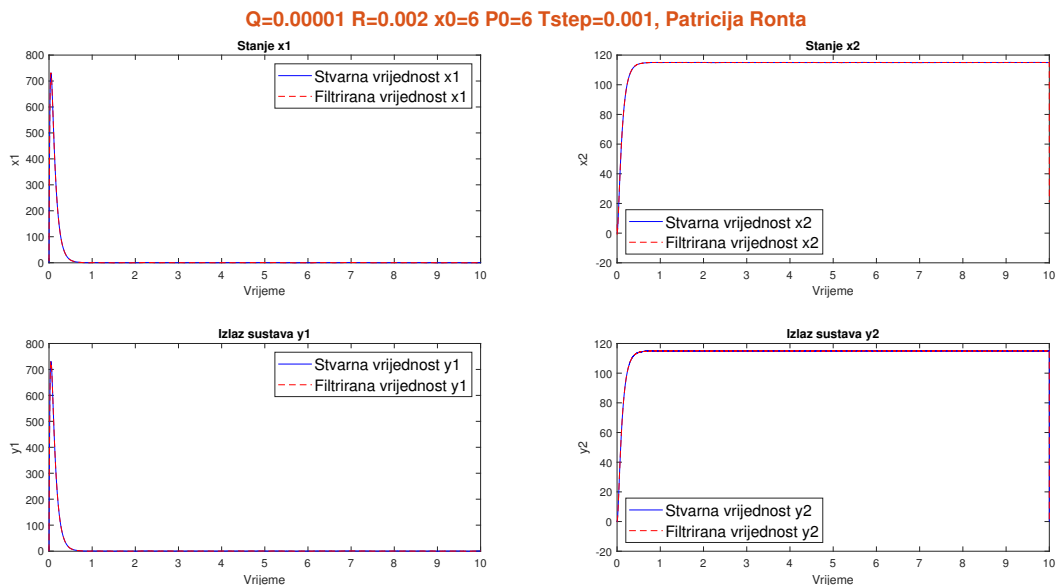
Ako se izvrši sljedeća promjena početne procjene i početne nesigurnosti, Kalman filter radi na način koji odgovara prikazu na slici 5.59



**Slika 5.59:** Rad Kalman filtera za  $\mathbf{x}_0 = 1$  i  $\mathbf{P}_0 = 5$

Povećanjem vrijednosti  $\mathbf{P}_0$  dodala se veća nesigurnost u procjenu stanja. Ta početna nesigurnost omogućuje filtru da se prilagodi promjenama i mjerenjima u procesu što rezultira stabilnijim i manje oscilirajućim promjenama. Podudarnost filtriranih i stvarnih vrijednosti upućuje da filter radi stabilno i da nudi precizne i točne procjene stanja.

Na slici 5.60 prikazan je način rada Kalman filtera u okruženju kada su vrijednosti početne procjene stanja i početna nesigurnost izjednačene.

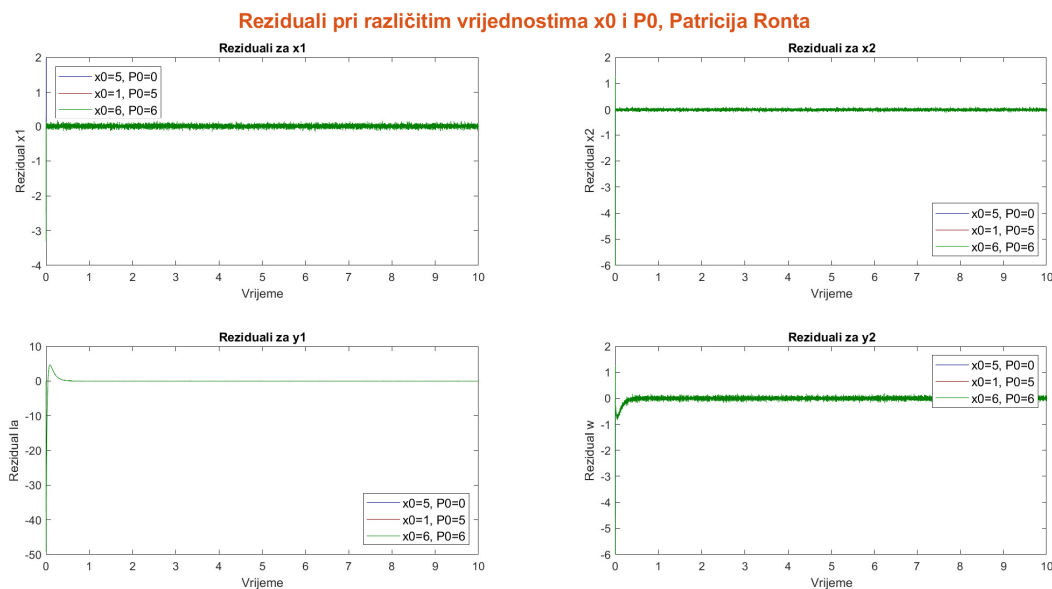


**Slika 5.60:** Rad Kalman filtera za  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{P}_0 = 6$

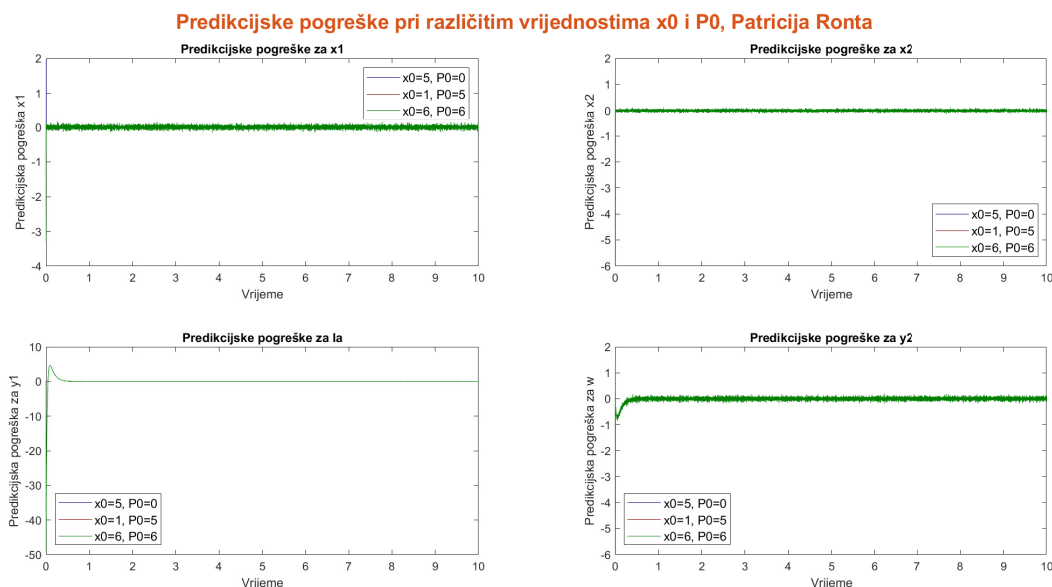
Početna nesigurnost  $\mathbf{P}_0$  u procjeni djeluje kao faktor regularizacije filtera. Ako je početna nesigurnost veća, filter će biti manje osjetljiv na šum i mjerenja te će težiti prema svojoj početnoj procjeni. U ovome slučaju, jednakost početne procjene i početne nesigurnosti znači da filter

može biti manje osjetljiv na promjene u mjerenjima i stvarnome stanju. Nadalje, uspostavlja se ravnoteža između ta dva parametra, budući da filter započinje s više neutralnom, a manje konfuznom procjenom, što na kraju dovodi do stabilnog načina rada i precizne procjene, a opisano se može i utvrditi sa slike 5.60.

Reziduali i predikcijske pogreške, za prethodne tri konfiguracije, prikazani su na slikama 5.61 i 5.62,



**Slika 5.61:** *Reziduali za različite vrijednosti  $x_0$  i  $P_0$*

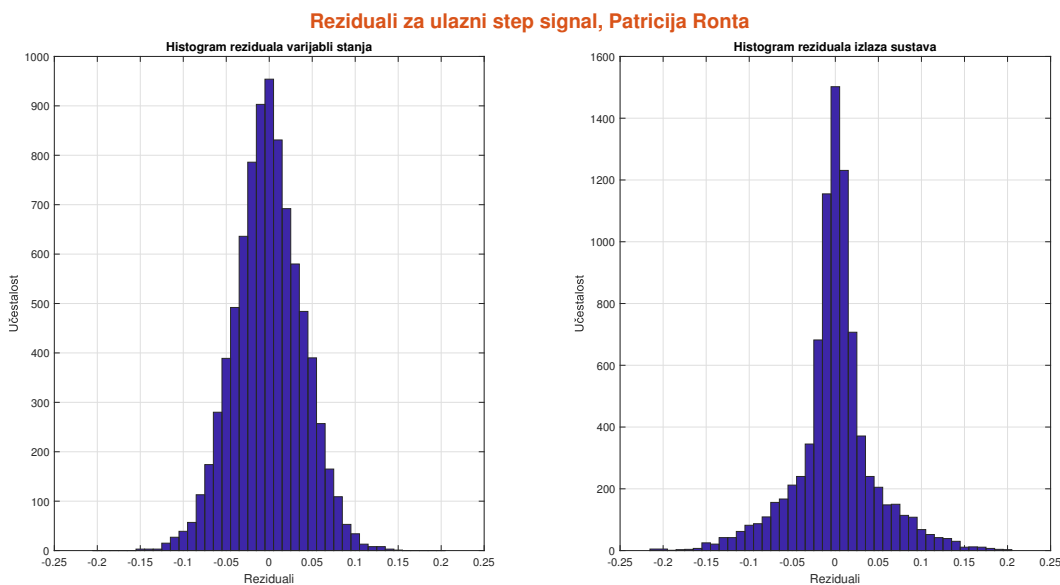


**Slika 5.62:** *Predikcijske pogreške za različite vrijednosti  $x_0$  i  $P_0$*

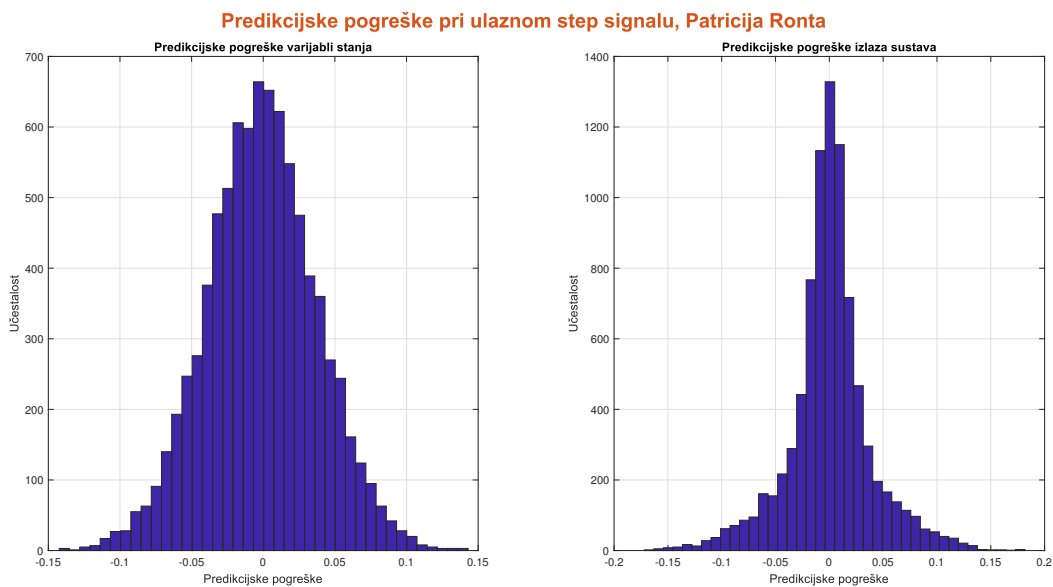
Prema ovim prikazima, može se uočiti da reziduali i predkcijske pogrške drže vrijednosti vrlo blizu nuli. Prema tome, može se zaključiti da Kalman filter daje precizne procjene i da radi

točno i stabilno. Najveći je šum u rezidualima i predikcijskim pogreškama kada su početna nesigurnost i početna procjena stanja postavljene na najviše, jednake vrijednosti. Međutim, taj je šum filter uspješno minimizirao što potvrđuje slika 5.60.

Ako se promotre reziduali i predikcijske pogreške za stacionarno stanje, tada se iz histogramskog prikaza 5.63 i 5.64 može očitati da je najveći broj uzoraka reziduala i predikcijskih pogrešaka na vrijednosti nuli, što dodatno potvrđuje ispravan i stabilan način rada Kalman filtra. Raspršenost reziduala i predikcijskih pogrešaka po normalnoj distribuciji potkrijepljuje uspješno modeliran šum u sustavu.



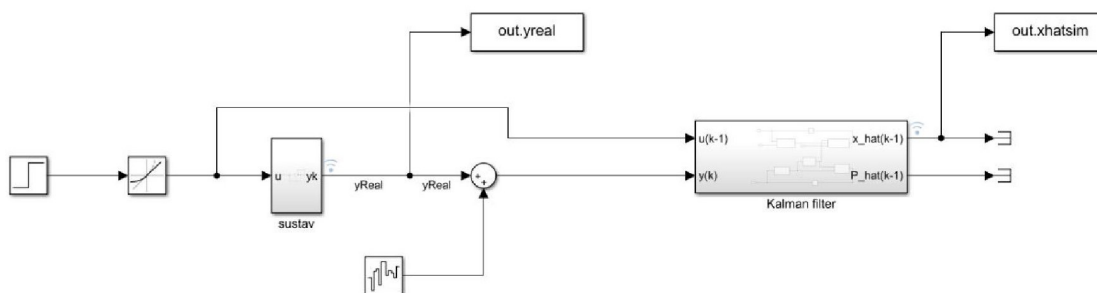
**Slika 5.63:** *Reziduali u stacionarnome stanju*



**Slika 5.64:** *Predikcijske pogreške u stacionarnome stanju*

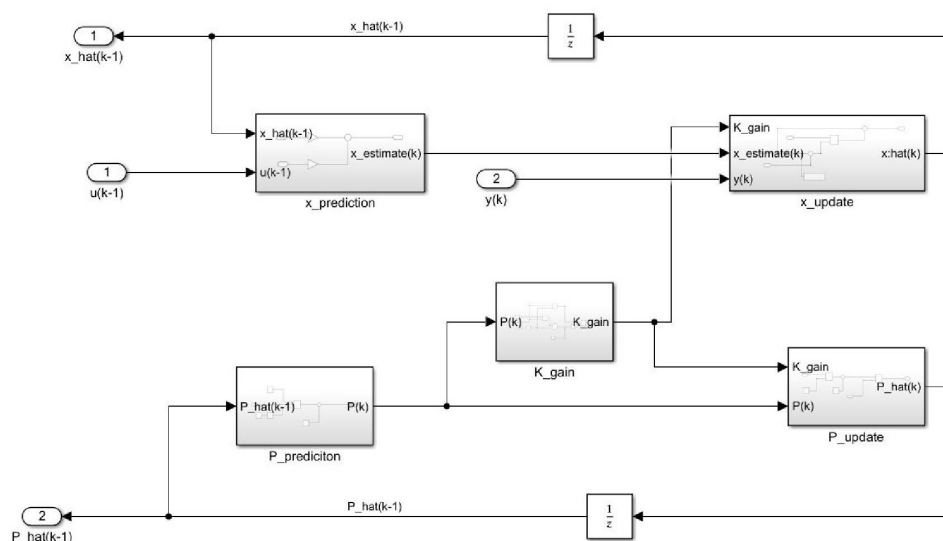
## 5.4. Analiza simulacije Kalman filtra na istosmjerni stroj

Da bi se izvršila simulacija procjene stanja istosmjernog stroja Kalman filtrom, implementirat će se Kalman filter na model istosmjernog stroja u MATLAB Simulink okruženju. Navedena implementacija prikazana je slikom 5.65.



Slika 5.65: Implementacija Kalman filtra na model DC stroja

Kalman filter napravljen je kao skup podsustava od kojih se svaki podsustav temelji na pojedinačnoj jednadžbi predikcije ili jednadžbi korekcije. Cjelokupni je prikaz takve realizacije Kalman filtra prikazan na slici 5.66.



Slika 5.66: Integracija Kalman filtra

Za razliku od generiranja šuma u MATLAB skripti na način kao što je prikazano kodom 6, u Simulinku se šum generira pomoću bloka *Band-Limited White Noise*. Blok *Band-Limited White Noise* specijalizirani je blok u Simulinku koji generira šum određenog spektralnog oblika (band-limited). Spektralni je oblik u vezi sa spektralnom gustoćom snage (*eng. Power Spectral Density - PSD*) šuma. PSD je mjera kako se energija šuma distribuira u frekvencijskoj domeni, odnosno PSD opisuje koliko se šuma nalazi u određenim frekvencijskim komponentama [30]. Stoga se spektralni oblik šuma odnosi na raspodjelu energije šuma prema frekvencijama. Drugim riječima, to je grafički prikaz kako se PSD mijenja s frekvencijom.

Osim što omogućuje precizno definiranje spektralnog oblika šuma, blok *Band-Limited White Noise* također pruža kontrolu nad ukupnom snagom šuma kroz parametar *Noise Power*. Ovaj parametar određuje ukupnu snagu šuma koji će biti generiran u simulaciji. Time se utječe na snagu šuma u svim frekvencijskim komponentama, stoga se odražava i u PSD-u šuma. Povećanjem vrijednosti parametra *Noise Power*, povećava se ukupna snaga šuma i, posljedično, snaga šuma u svim frekvencijskim komponentama. Budući da u ovom slučaju postoje dva kanala, stanje sustava  $\mathbf{x}$  i mjerenja sustava  $\mathbf{y}$ , spomenuti će se parametar postavljati na vrijednost matrica  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  kako bi se precizno kontrolirala snaga šuma za svaki kanal neovisno.

Parametar *Seed* igra ulogu u inicijalizaciji generatora pseudoslučajnih brojeva (RNG) koji se koristi za generiranje šuma, što znači da su brojevi zapravo deterministički generirani na temelju početnog stanja poznatog kao *Seed*. Iako se *Seed* ne koristi izravno za kontrolu spektralnih karakteristika šuma, mijenjanjem vrijednosti *Seed*-a može rezultirati različitim uzorcima šuma u simulaciji. To znači da, iako ne kontrolira izravno PSD šuma, *Seed* parametar može utjecati na frekvencijske komponente generiranog šuma i njihovu raspodjelu. Njegove različite vrijednosti mogu rezultirati kreiranjem različitih scenarija šuma u simulaciji.

U tablici 5.13 prikazane su sve konfiguracije za koje će se analizirati simulacija primjene Kalman filtra na istosmjerni stroj, a grafički će se prikazati određene konfiguracije slučajeve.

**Tablica 5.13:** *Inicijalizacija početnih parametara*

Popis svih postavki za koje će se izvršiti simulacija				
konfiguracija	$Q$	$R$	$\mathbf{x}_0$	$\mathbf{P}_0$
1	0.0001	1	0	0
2	0.0001	5	0	0
3	0.0001	10	0	0
4	0.0001	0.5	0	0
5	0.0001	0.002	0	0
6	1	0.002	0	0
7	0.1	0.002	0	0
8	0.0005	0.002	0	0
9	0.00001	0.002	0	0
10	0.05	0.05	0	0
11	5	5	0	0
12	0.00001	0.002	5	0
13	0.00001	0.002	0	1
14	0.00001	0.002	6	6

Važno je napomenuti da su parametri, koji su navedeni u skladu s tablicom 5.13, samo početne postavke za Simulink model te on ima svoj sustav parametara koji se koristi tijekom simulacije. U Simulink će se modelu snimati signali *xreal*, *yreal*, *xhatsim* i *yhatsim*, što redom predstavlja stvarno stanje sustava, stvarna mjerenja sustava, procijenjeno stanje sustava i procijenjena mjerenja. Pored toga, prikazat će se reziduali za određeni skup promijenjenih parametara. U prethodnom se potpoglavlju moglo uočiti da su reziduali i predikcijske pogreške vrlo bliske, što ukazuje da Kalman filter radi pravilno i da nema značajnih neslaganja između procjene i stvarnih mjerenja. Sukladno tome, zbog vrlo bliske veze između reziduala i predikcijskih pogrešaka, u ovome će se potpoglavlju izostaviti prikaz predikcijskih pogrešaka jer će gotovo u potpunosti odgovarati prikazima reziduala.

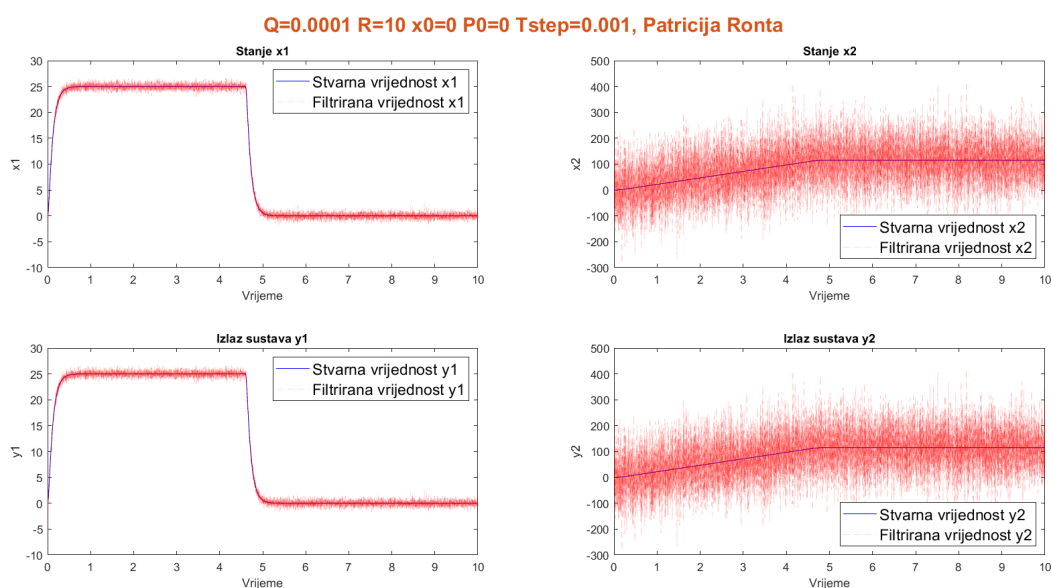
Prema 1. konfiguraciji, rad Kalman filtra je takav da je šum prisutan u svim filtriranim varijablama stanja i izlazima sustava, međutim najmanji je kod varijable stanja  $x_1$  i izlaza sustava  $y_1$ .



To znači da je snaga šuma za varijablu  $x_1$  i izlaz sustava  $y_1$ , koja je kontrolirana parametrom  $Q$  i  $R$ , postavljena prikladno. Snaga šuma za varijablu  $x_2$  također je kontrolirana parametrom  $Q$ , međutim varijable stanja  $x_1$  i  $x_2$  predstavljaju različite komponente sustava s različitim dinamičkim svojstvima, stoga to može rezultirati različitim razinama šuma. Analogno vrijedi i za izlaze sustava  $y_1$  i  $y_2$ .

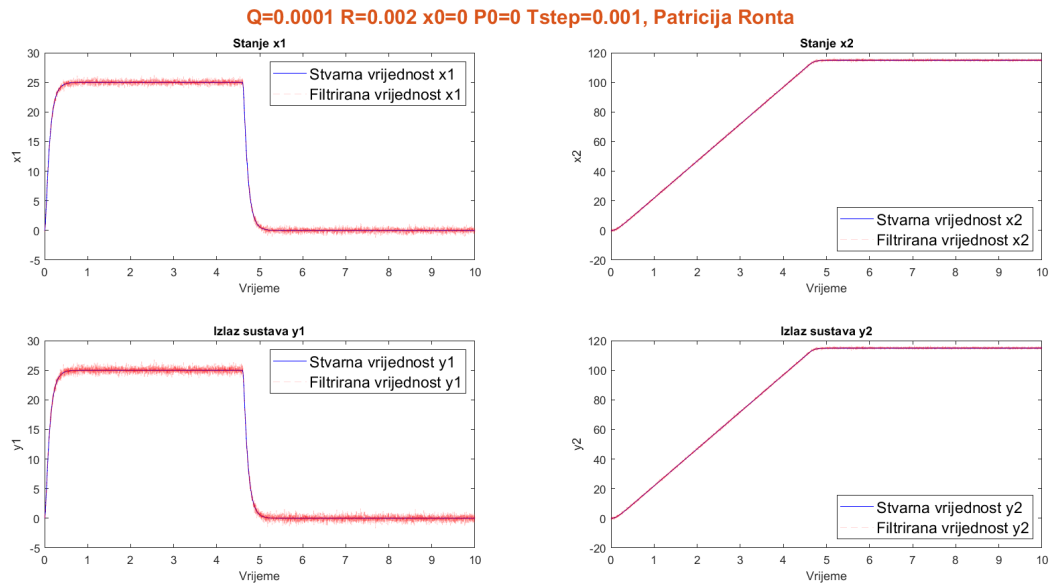
Ako se poveća vrijednost matrice  $\mathbf{R}$ , tada takvo okruženje rezultira većim utjecajem mjerne šuma na Kalmanov filter i većim šumom u izlaznim varijablama, nego što je to bio slučaj u prethodnoj konfiguraciji. Zbog već spomenutog razloga o različitim razinama šuma, u ovome su slučaju filtrirane vrijednosti varijable stanja  $x_2$  i  $y_2$  podložne još većem šumu.

Dodatnim povećanjem vrijednosti matrice  $\mathbf{R}$ , a prema prethodne dvije konfiguracije, može se očekivati da će šum u svim varijablama, a posebno u varijabli stanja  $x_2$  i izlazu sustava  $y_2$ , biti još veći. Navedeno se očekivanje može potvrditi slikom 5.67.

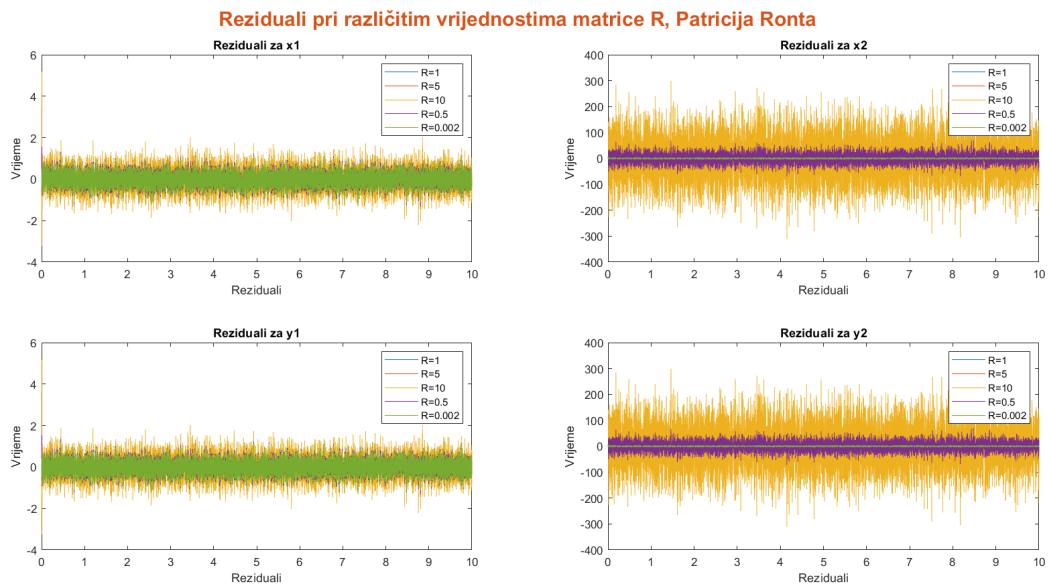


**Slika 5.67:** Rad Kalman filtera za 3. konfiguraciju

U sljedeće će se dvije konfiguracije smanjiti vrijednost matrice  $\mathbf{R}$ . Ako se matrica  $\mathbf{R}$  smanji na vrijednost 0.5, tada se smanjio i šum u filtriranim vrijednostima varijabli stanja  $x_2$  i izlazu sustava  $y_2$ . Ovakvo ponašanje sugerira pogodniju postavku matrice  $\mathbf{R}$  pa samim time i pogodniju postavku parametra *Noise Power*. Smanji li se matrica  $\mathbf{R}$  na još manju vrijednost, tada je rad filtra vidljiv na slici 5.68. Iz njenog prikaza zaključuje se da je u ovoj konfiguraciji šum u svim filtriranim varijablama stanja i izlazima sustava najmanji, što sugerira da Simulink model dobro reflektira stvarno ponašanje sustava i da su parametri  $Q$  i  $R$ , koji određuju snagu šuma i utjecaj mjerenja u Kalman filteru, dobro podešeni. Ovakvo ponašanje rezultira najpreciznijim procjenama filtra u usporedbi s ostalim konfiguracijama. Prikazom reziduala na slici 5.69, zaključuje se da promjene vrijednosti matrice  $\mathbf{R}$  uglavnom utječu na rezidualne varijable stanja  $x_2$  i izlaza sustava  $y_2$ , te ima mali utjecaj na varijablu stanja  $x_1$  i izlaz sustava  $y_1$ . To znači da takve promjene imaju veći utjecaj na mjerenu brzinu vrtnje  $y_2$ , nego na mjerenu struju armature  $y_1$ , a posljedično tome onda imaju veći utjecaj i na dinamiku brzine vrtnje  $x_2$ . Može se primijetiti da su reziduali za varijablu stanja  $x_2$  i izlaz sustava  $y_2$  najmanje šumni kada je vrijednost matrice  $\mathbf{R}$  najmanja, a najviše su šumni kada je vrijednost te matrice postavljena na najvišu vrijednost, što odgovara slikama 5.68 i 5.67

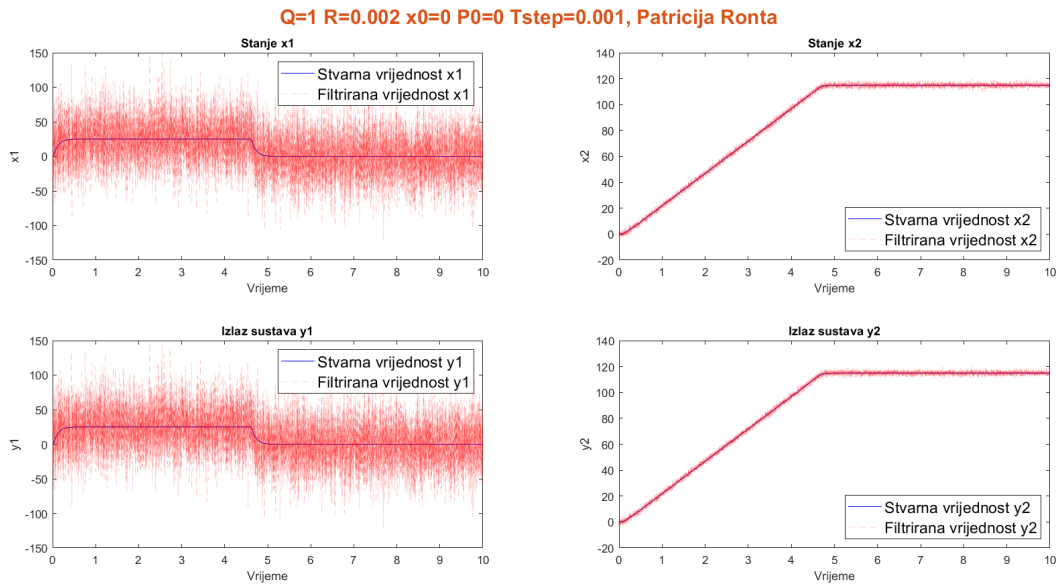


**Slika 5.68:** Rad Kalman filtera za 5. konfiguraciju



**Slika 5.69:** Prikaz reziduala za različite vrijednosti matrice R

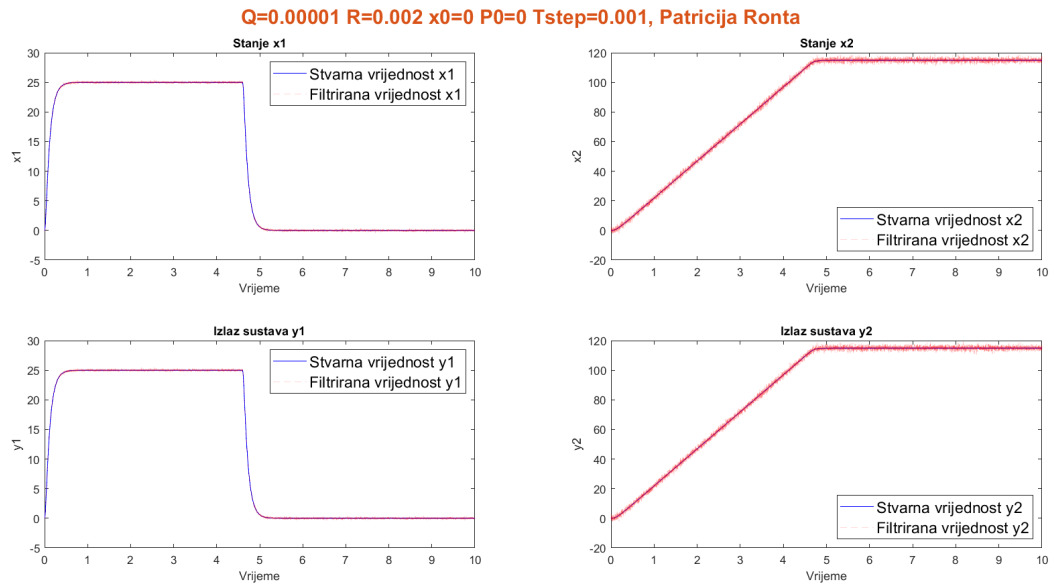
U naredne četiri konfiguracije, mijenja se vrijednost matrice  $\mathbf{Q}$ . Najprije će se matrica  $\mathbf{Q}$  postaviti na relativno visoku vrijednost, odnosno postaviti će se da je  $Q = 1$ . U takvom okruženju, Kalman filter nudi način rada prikazan na slici 5.70. Za razliku od svih prethodnih slučajeva, sada su najviše šumne filtrirane vrijednosti varijable stanja  $x_1$  i izlaza sustava  $y_1$ . Povećanjem matrice  $\mathbf{Q}$ , koja kontrolira šum u dinamici varijabli stanja, više utječe na dinamiku struje armature  $x_1$ , nego na brzinu vrtnje  $x_2$ . To znači da će promjene u varijabli stanja  $x_1$  imati veći utjecaj na mjerenu struju armature  $y_1$ , nego na mjerenu brzinu vrtnje  $y_2$ .



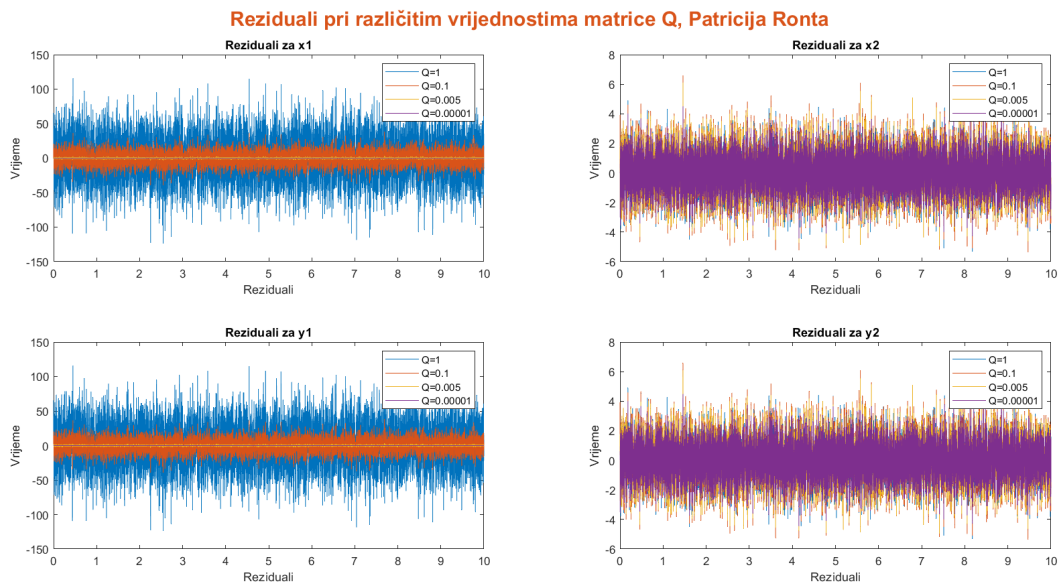
**Slika 5.70:** Rad Kalman filtera za 6. konfiguraciju

U sljedećoj se konfiguraciji vrijednost matrice  $\mathbf{Q}$  smanjuje na vrijednost 0.1. U ovom će slučaju smanjenje vrijednosti matrice  $\mathbf{Q}$  rezultirati smanjenjem šuma u filtriranim vrijednostima varijabli stanja  $x_1$ . Budući da varijabla  $x_1$  utječe na izlaz  $y_1$ , tada će i šum u izlazu sustava  $y_1$  biti smanjen. Varijabla stanja  $x_2$  i izlaz sustava  $y_2$  manje su osjetljiva na promjene u matrici  $\mathbf{Q}$ , stoga prilikom ove promjene, šum u njihovim filtriranim vrijednostima ostaje isti kao i u prethodnoj konfiguraciji.

Smanji li se dodatno vrijednost matrice  $\mathbf{Q}$ , može se očekivati da će se dodatnim smanjenjem vrijednosti matrice  $\mathbf{Q}$  smanjiti šum u filtriranim vrijednostima varijable stanja  $x_1$  i izlaza sustava  $y_1$ . Postavljanjem vrijednosti matrice  $\mathbf{Q}$  na do sada najnižu vrijednost, rezultat će pojavom minimalnog šuma u filtriranim vrijednostima varijabli stanja  $x_1$  i  $y_1$ . Takav način rada ukazuje na poboljšanje procjene stanja Kalman filtra. Osim toga, smanjila se i snaga šuma u dinamici varijable stanja  $x_1$ , što se odražava također i na snagu šuma u izlazu  $y_1$ . Navedeno je rezultat dodavanja manjeg šuma na spomenute varijable, što za posljedicu ima manju varijaciju u mjerenjima i procjenama, a može se potvrditi sa slike 5.71. Dodatno se tvrdnja potvrđuje prikazom reziduala na slici 5.72 gdje se može uočiti da su reziduali za spomenute varijable najmanje šumni za najmanju vrijednost matrice  $\mathbf{Q}$ , a najviše šumni za najveću vrijednost matrice  $\mathbf{Q}$ , stoga filter vrši najbolje procjene tih varijabli za  $Q = 0.00001$ . Također, šum se u rezidualima za varijable  $x_2$  i  $y_2$  ne mijenja značajno, što potvrđuje tvrdnju da su te varijable manje osjetljive na promjene vrijednosti matrice  $\mathbf{Q}$ .



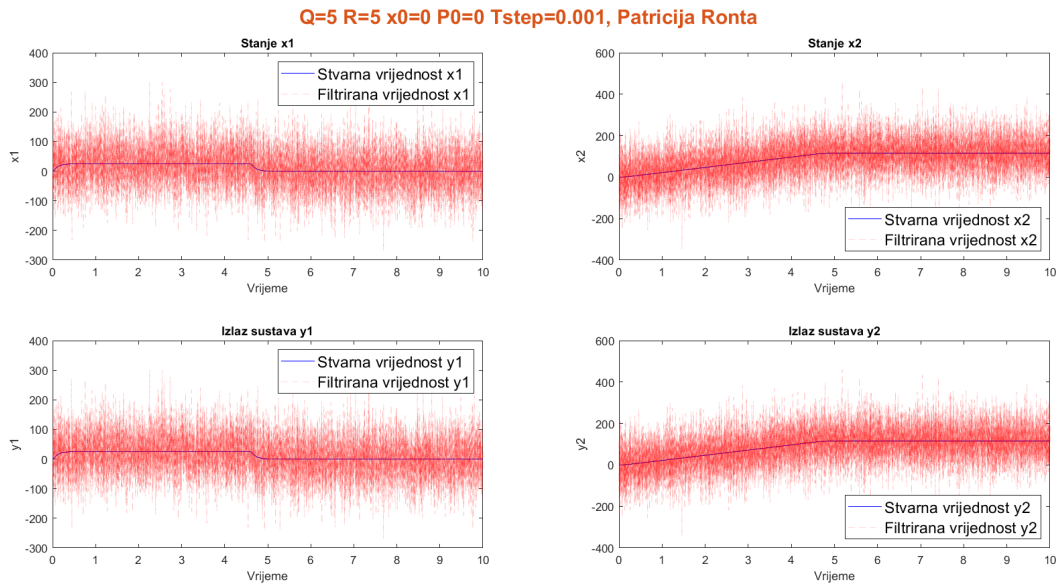
**Slika 5.71:** Rad Kalman filtera za 9. konfiguraciju



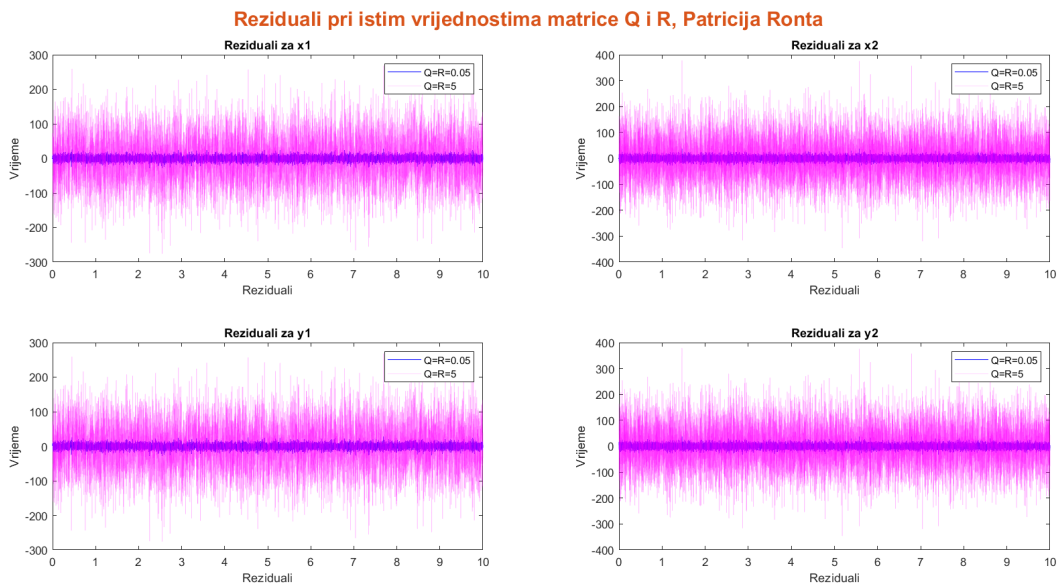
**Slika 5.72:** Rad Kalman filtera za 9. konfiguraciju

Ako se vrijednost matrice  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  izjednače na prvotno manju vrijednost, tada je u tom slučaju postavljena ista razina snage šuma za dinamiku varijabli stanja i za mjerenja. Kalman filter sada više vjeruje mjerenjima i manje uzima u obzir varijacije u dinamici sustava. Također, za razliku od prethodne konfiguracije, snaga je šuma u ovom slučaju povećana, a to rezultira povećanjem šuma u filtriranim vrijednostima svih varijabli stanja i svih izlaza sustava.

Analogno prethodnom objašnjenju, ako se matrice  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$  postave na vrijednost 5, takvo će okruženje prikazati izrazito šumne rezultate i filter neće vjerno odražavati stvarno ponašanje sustava, što je vidljivo na slici 5.73. Ako se prikažu reziduali za oba slučaja, tada se zaključuje da je doprinos šuma za sve varijable stanja i izlaza sustava najveći za  $Q = R = 5$ , a najmanji za  $Q = R = 0.05$ , čime se potkrepljuju prethodno opisane analize načina rada Kalman filtra.



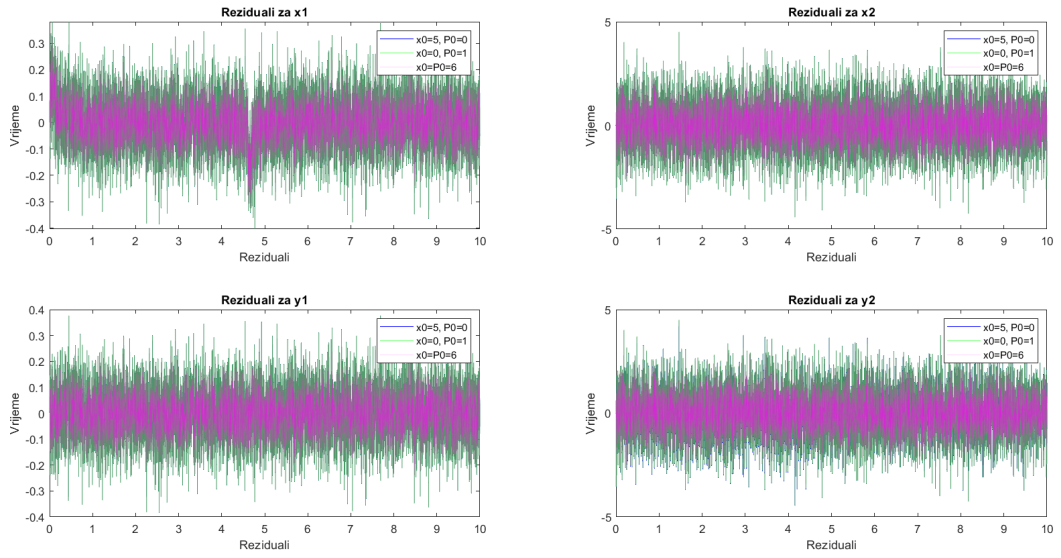
**Slika 5.73:** Rad Kalman filtera za 11. konfiguraciju



**Slika 5.74:** Reziduali za iste vrijednosti matrica Q i R

U zadnje se tri konfiguracije mijenja početna procjena stanja  $\mathbf{x}_0$  i početna nesigurnost  $\mathbf{P}_0$ . Prema prikazima načina rada Kalman filtera kada su se mijenjali isti parametri (slike 5.58-5.60), može se uočiti da je Kalman filter konfiguriran tako da je manje osjetljiv na promjene u početnim uvjetima  $\mathbf{x}_0$  i  $\mathbf{P}_0$ . Sukladno tome, očekuje se da će i Kalman filter u Simulink modelu također biti manje osjetljiv na promjene navedenih parametara, a puno više na promjene u matricama  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ . Pregledom se slike 5.75 potvrđuju navedena očekivanja, odnosno potvrđuje se da promjena početne procjene stanja  $\mathbf{x}_0$  i početne nesigurnosti  $\mathbf{P}_0$  imaju manji utjecaj na rad Kalman filtera u usporedbi s promjenama vrijednosti matrica  $\mathbf{Q}$  i  $\mathbf{R}$ .

Reziduali pri različitim vrijednostima  $x_0$  i  $P_0$ , Patricija Ronta



Slika 5.75: Reziduali za različite vrijednosti  $x_0$  i  $P_0$

## 6. ZAKLJUČAK

Dinamički su sustavi podložni šumovima i nesavršenostima, što otežava željenu procjenu njegovih stanja. Da bi se uspio filtrirati i minimizirati neizbježan šum, potrebno je primijeniti neke od algoritama za procjenu stanja i praćenje sustava, a jedan je od njih i Kalman filter. Prije same implementacije Kalman filtra, potrebno je razumjeti dinamiku sustava koji se prati i razviti matematički model tog sustava. Model će opisati kako se sustav ponaša tijekom vremena, uključujući kako se stanje sustava mijenja i kako ono utječe na mjerenja.

Izvedena su dva matematička modela: jedan za električnu mrežu trećeg reda, a drugi za istosmjerni (DC) stroj. Postavljanjem modela, odlučilo se koja se stanja sustava žele procijeniti pomoću Kalmanova filtra te se na tako definirane sustave implementirao Kalman filter pomoću svojih jednadžbi predikcija i korekcija. Upravo one omogućuju filtru da u stvarnom vremenu ažurira procjene stanja sustava na temelju modela dinamike sustava i novih mjerenja.

Da bi Kalman filter pružio precizne procjene stanja, od velike je važnosti početna inicijalizacija njegovih parametara. U taj skup parametara spadaju: matrica kovarijance procesnog šuma  $\mathbf{Q}$ , matrica kovarijance mjernog šuma  $\mathbf{R}$ , početna procjena stanja  $x\mathbf{x}_0$  te početna nesigurnost  $\mathbf{P}_0$ . Matrica  $\mathbf{Q}$  opisuje koliko se očekuje da će stanje sustava varirati tijekom vremena, dok matrica  $\mathbf{R}$  predstavlja mjeru koliko su mjerenja podložna šumu i nesavršenostima. Početna nesigurnost  $\mathbf{P}_0$  opisuje kolika je nesigurnost u svakoj početnoj procjeni stanja  $\mathbf{x}_0$ . Svaki od ovih parametara nosi određenu važnost i težinu za optimalan rad Kalman filtra.

Primjenom Kalman filtra na električnu mrežu i istosmjerni stroj, izvršilo se testiranje njegova načina rada prilikom svakog promijenjenog početnog parametara. Prema rezultatima, ustanovilo se da početni uvjeti utječu na brzinu konvergencije filtra prema stvarnim vrijednostima te na stabilnost u njegovom radu. Svaki je model specifičan, stoga se za svaki pojedinačan model mora pronaći skup početnih parametara koji će pružiti najbolju međusobnu uravnoteženost te rezultirati optimalnom okolinom u kojoj će Kalman filter imati najpreciznije procjene. Računanjem RMSE, reziduala i predikcijskih pogrešaka, određivalo se koliko su procjene stanja bliske stvarnim vrijednostima i koliko dobro filter minimizira šum u mjerenjima, što je pružilo dodatnu pouzdanost i potvrdu o načinu rada Kalman filtra za svako novo okruženje.

Analizom i pregledom svih rezultata testiranja načina rada Kalman filtra, može se doći do konstatacije da nema eksplicitne pravilnosti u inicijalizaciji skupa početnih parametara, nego je potrebno sve parametre prilagoditi jedinstvenoj dinamici određena modela. Da bi se parametri uspješno inicijalizirali na vrijednosti koje će biti pogodne za precizne procjene te ispravan i stabilan način rada, potrebno je detaljno obraditi dinamiku i model sustava te razumjeti funkciju i svrhu svakog od početnih parametara. Kombinacijom ovih opisanih koraka i vještina, može se uspostaviti takva okolina koja će omogućiti filtru optimalan i stabilan način rada.

## LITERATURA

- [1] S. Haykin. *Adaptive Filter Theory*. Prentice Hall, 2001.
- [2] Mohinder S. Grewal and Angus P. Andrews. *Kalman filtering : theory and practice using MATLAB*. Wiley, 2001.
- [3] R.E.Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. 1960.
- [4] S. Yimman R. Boontawan S. Praesomboon, S. Athaphaisal and K. Dejhan. Sensorless speed control of dc servo motor using kalman filter. *2009 7th International Conference on Information, Communications and Signal Processing (ICICS)*, 2009.
- [5] Zhong Zheng, Yan Zhang, and Jian Zhang. Application of kalman filter in dc motor speed control system. *Applied Mechanics and Materials*, 150:129–132, 01 2012.
- [6] Kamakshi Rautela, Abhijit Singh Bhakuni, and Sandeep Sunori. Continuous time state space model of dc motor using kalman filter. *International Journal On Emerging Technologies, India: Department Of ECE*, 2017.
- [7] Ahmad Hussain Al-Bayati and Zakwan Skaf. A comparative study of linear observers applied to a dc servo motor. pages 785–790, 2010.
- [8] Amin Sedighfar and M. R. Moniri. Battery state of charge and state of health estimation for vrla batteries using kalman filter and neural networks. pages 41–46, 2018.
- [9] Andreas Martin Kettner and Mario Paolone. Sequential discrete kalman filter for real-time state estimation in power distribution systems: Theory and implementation. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 66(9):2358–2370, 2017.
- [10] D. Fuentes, J. Yung, J. D. Hazle, J. S. Weinberg, and R. J. Stafford. Kalman filtered mr temperature imaging for laser induced thermal therapies. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 31(4):984–994, 2012.
- [11] Mohinder S. Grewal and Angus P. Andrews. Applications of kalman filtering in aerospace 1960 to the present, 2010.
- [12] Jian Yin Lu and Xinjie Li. Robot indoor location modeling and simulation based on kalman filtering. *Eurasip Journal on Wireless Communications and Networking*, 2019, 12 2019.
- [13] Ziya Gökalp ERSAN, Metin ZONTUL, and İlkey YELMEN. Map matching with kalman filter and location estimation. *Cumhuriyet Science Journal*, 41:43–48, 3 2020.
- [14] Jay L. Devore. *Probability and Statistics for Engineering and the Sciences*. Brooks/Cole, 8th edition, January 2011. ISBN-13: 978-0-538-73352-6.
- [15] Douglas C. Montgomery and George C. Runger. *Applied statistics and probability for engineers*. Wiley, 2003.
- [16] Mirta Benšić and Nenad Šuvak. Uvod u vjerojatnost i statistiku. 2014.
- [17] H. Pishro-Nik. *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*. Kappa Research, LLC, 2014.



- [18] Hrvoje Babić. *Signali i sustavi*. 1996.
- [19] Gilbert Strang. *Linear algebra and its applications*. Thomson, Brooks/Cole, Belmont, CA, 2006.
- [20] J.L. Crassidis and J.L. Junkins. *Optimal Estimation of Dynamic Systems*. Chapman & Hall/CRC Applied Mathematics & Nonlinear Science. CRC Press, 2004.
- [21] R.G Brown and P.Y.C. Hwang. *Introduction to random signals and applied kalman filtering with matlab exercises*, 4th edition. 2012.
- [22] A.H. Jazwinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Dover Books on Electrical Engineering Series. Dover Publications, 2007.
- [23] Robert H. Shumway and David S. Stoffer. *Time Series Analysis and Its Applications*. Springer, 2000.
- [24] Greg Welch and Gary Bishop. *An introduction to the kalman filter*, 2001.
- [25] I. Flegar. *Teorija mreža - Bilješke s predavanja*. ETF, Osijek, 2001.
- [26] N. Perić. *Automatsko upravljanje - predavanja*. FER, Zagreb, 1998.
- [27] A. Hughes and B. Drury. *Electric Motors and Drives: Fundamentals, Types and Applications*. Elsevier Science, 2013.
- [28] R. Wolf. *Osnove električnih strojeva*. Školska knjiga, Zagreb, 1989.
- [29] Jesús Liceaga, Irma Siller-Alcalá, J. Ponce, and Roberto Alcantara Ramirez. *Series dc motor modeling and identification*. 05 2017.
- [30] Roy Howard. *Principles of Random Signal Analysis and Low Noise Design: The Power Spectral Density and Its Applications*. 03 2003.

## SAŽETAK

U ovom je radu pružena detaljna teorijska analiza potrebna za razumijevanje načina rada Kalman filtra. Detaljno je objašnjen algoritam filtra potkrijepljen jednadžbama predikcije i korekcije. Prije implementacije Kalman filtra, pomoću Kirchoffovih zakona napona i struje te diferencijalnih jednadžbi, izveo se matematički model električne mreže trećeg reda i istosmjernog (DC) stroja u prostoru stanja. Na tako definirane modele, primijenio se Kalman filter pomoću MATLAB koda i MATLAB Simulink okruženja. Za svaki se model postavilo nekoliko proizvoljno zadanih početnih parametara te se testirao i ispitivao načina rada Kalman filtra u svakom novom okruženju. Osim prikaza i analize načina rada filtra, računale su se vrijednosti RMSE, reziduali i predikcijske pogreške za svaku novu promjenu kako bi se pružila dublja i detaljnija analiza dinamike sustava i procjene stanja Kalman filtrom.

Ključne riječi: DC stroj, Kalman filter, matematički model, predikcijske pogreške, rezidual

## ABSTRACT

### **Application of Kalman filter for state estimation of a DC machine**

This paper provides a detailed theoretical analysis necessary for understanding the operation of the Kalman filter. The algorithm of the filter is thoroughly explained, supported by prediction and correction equations. Before implementing the Kalman filter, a mathematical model of a third-order electrical network and a Direct Current (DC) machine in state-space was derived using Kirchhoff's voltage and current laws and differential equations. The Kalman filter was then applied to these defined models using MATLAB code and MATLAB Simulink environment. For each model, several arbitrarily chosen initial parameters were set, and the operation of the Kalman filter was tested and examined in each new environment. In addition to demonstrating and analyzing the filter's operation, RMSE values, residuals, and prediction errors were calculated for each new change to provide a deeper and more detailed analysis of system dynamics and state estimation by the Kalman filter.

Keywords: DC machine, Kalman filter, mathematical model, prediction error, residuals

## ŽIVOTOPIS

Patricija Ronta rođena je 14. rujna 2001. godine u Osijeku. Nakon završenog osnovnoškolskog obrazovanja u osnovnoj školi Hrvatski sokol Pogajci Podravski i osnovnoj glazbenoj školi August Harambašić Donji Miholjac, upisuje Isusovačku klasičnu gimnaziju s pravom javnosti u Osijeku. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja, sudjeluje na dva Erasmus projekta: *Euroscola program, Strasbourg* i *Jesuit European Educational Project (JEEP), Milano*. Pored toga, sudjelovala je na školskim i županijskim natjecanjima iz predmeta Hrvatski jezik, a 2019. godine osvaja četvrto mjesto na državnom natjecanju iz Vjeronauka - Vjeronaučna olimpijada. Maturirala je 2020. godine kao najbolja maturantica te zaslužila izravan upis na Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek, smjer preddiplomski sveučilišni studij Elektrotehnika i Informacijska tehnologija. Na prvoj godini studija, zapošljava se studentski kao predavač u LevelUp Instrukcije d.o.o. gdje je držala instrukcije za srednju školu i instrukcije za studente iz kolegija Matematika I, Matematika II i Linearna algebra. Sredinom treće godine studija, dobiva priliku unapređivati svoje vještine i znanje u tvrtki Aruna d.o.o., a iste joj je godine prema Odluci Fakultetskog vijeća dodijeljeno priznanje za izvrsnost u studiranju. Osim fakultetskih obaveza, u slobodno vrijeme pleše balet u Hrvatskom narodnom kazalištu Osijek.