

# Sinkroniziranje kaotičnih sustava

---

**Rajs, Kristijan**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2024**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Fakultet elektrotehnike, računarstva i informacijskih tehnologija Osijek**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:200:649256>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-10-31**

*Repository / Repozitorij:*

[Faculty of Electrical Engineering, Computer Science and Information Technology Osijek](#)



**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA I  
INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA OSIJEK**

**Sveučilišni preddiplomski studij elektrotehnike**

**SINKRONIZACIJA KAOTIČNIH SUSTAVA**

**Završni rad**

**Kristijan Rajs**

**Mentor: Kruno Miličević**

**Osijek, 2023.**

**FERIT**FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA  
I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA OSIJEK**Obrazac Z1P: Obrazac za ocjenu završnog rada na sveučilišnom prijediplomskom studiju****Ocjena završnog rada na sveučilišnom prijediplomskom studiju**

<b>Ime i prezime pristupnika:</b>	Kristijan Rajs
<b>Studij, smjer:</b>	Sveučilišni prijediplomski studij Elektrotehnika i informacijska tehnologija
<b>Mat. br. pristupnika, god.</b>	4723, 22.07.2019.
<b>JMBAG:</b>	0165083406
<b>Mentor:</b>	prof. dr. sc. Kruno Miličević
<b>Sumentor:</b>	prof. dr. sc. Davor Vinko
<b>Sumentor iz tvrtke:</b>	
<b>Naslov završnog rada:</b>	Sinkroniziranje kaotičnih sustava
<b>Znanstvena grana završnog rada:</b>	Elektrostrojarstvo (zn. polje elektrotehnika)
<b>Zadatak završnog rada:</b>	Napraviti pregled kaotičnih sustava i uvjeta pod kojim se mogu sinkronizirati. Prikazati mogućnosti primjene sinkronizacije, te odabrati jednu primjenu i detaljnije je analizirati.
<b>Datum prijedloga ocjene završnog rada od strane mentora:</b>	12.09.2023.
<b>Prijedlog ocjene završnog rada od strane mentora:</b>	Dobar (3)
<b>Datum potvrde ocjene završnog rada od strane Odbora:</b>	24.09.2023.
<b>Ocjena završnog rada nakon obrane:</b>	Dobar (3)
<b>Datum potvrde mentora o predaji konačne verzije završnog rada čime je pristupnik završio sveučilišni prijediplomski studij:</b>	03.10.2024.

**FERIT**FAKULTET ELEKTROTEHNIKE, RAČUNARSTVA  
I INFORMACIJSKIH TEHNOLOGIJA OSIJEK**IZJAVA O IZVORNOSTI RADA**

Osijek, 03.10.2024.

Ime i prezime Pristupnika:	Kristijan Rajs
Studij:	Sveučilišni prijediplomski studij Elektrotehnika i informacijska tehnologija
Mat. br. Pristupnika, godina upisa:	4723, 22.07.2019.
Turnitin podudaranje [%]:	5

Ovom izjavom izjavljujem da je rad pod nazivom: **Sinkroniziranje kaotičnih sustava**

izrađen pod vodstvom mentora prof. dr. sc. Kruno Miličević

i sumentora prof. dr. sc. Davor Vinko

moj vlastiti rad i prema mom najboljem znanju ne sadrži prethodno objavljene ili neobjavljene pisane materijale drugih osoba, osim onih koji su izričito priznati navođenjem literature i drugih izvora informacija.

Izjavljujem da je intelektualni sadržaj navedenog rada proizvod mog vlastitog rada, osim u onom dijelu za koji mi je bila potrebna pomoć mentora, sumentora i drugih osoba, a što je izričito navedeno u radu.

Potpis pristupnika:

## Sadržaj

1. UVOD.....	3
1.1. ZADATAK ZAVRŠNOG RADA .....	4
2. SINKRONIZACIJA KAOTIČNIH SUSTAVA.....	4
2.1. EVOLUCIJA KONCEPTA SINKRONIZACIJE.....	4
2.2. IZAZOVI U SINKRONIZACIJI KAOTIČNIH SUSTAVA .....	5
2.3. DIZAJN I PRIMJENA SLOŽENIH SUSTAVA ZA SINKRONIZACIJU .....	9
2.4. SINKRONIZACIJA U MREŽAMA OSCILATORA.....	10
3. SINKRONIZACIJA DISKRETNOG CHUA KAOTIČNOG SUSTAVA.....	11
3.1. DISKRETNI CHUA KAOTIČNI SUSTAV .....	11
3.2. KAKO SINKRONIZIRATI DVA DISKRETNNA CHUA KAOTIČNA SUSTAVA.....	14
3.3. SIMULACIJA.....	15
3.4. REZULTATI SIMULACIJE.....	16
3.5. ZAKLJUČAK IZ PROVEDENE SIMULACIJE .....	29
4. ZAKLJUČAK .....	29
5. LITERATURA.....	30
6. SAŽETAK.....	32
7. PRILOG .....	32

## SADRŽAJ SLIKA

Slika 2.2.1 Početno stanje sustava .....	6
Slika 2.2.2 Sustav nakon 5 sekundi .....	7
Slika 2.2.3 Sustav nakon 20 sekundi .....	7
Slika 2.2.4 Sinkronizacija dva sustava .....	8
Slika 2.3.1 Pirmjer primjene kaosa.....	9
Slika 3.1.1 Nelinearna funkcija Chuine diode .....	12
Slika 3.1.2 Tipične putanje za jednadžbe Chua-ovog kruga.....	12
Slika 3.3.1 Shematski prikaz <i>master/slave</i> sustava .....	15

# 1. UVOD

Sinkronizacija kaotičnih sustava oduvijek privlači pažnju istraživača iz različitih znanstvenih disciplina. Zbog složene dinamike i osjetljivosti na početne uvjete, kaotični sustavi su prvobitno izgledali kao da se protive mogućnosti sinkronizacije. Međutim, otkriće koje je promijenilo tu percepciju otkrilo je iznenađujuću konvergenciju trajektorija prema sinkronizaciji. Podrijetlo sinkronizacije u kaotičnim sustavima može se pratiti do pionirskih istraživanja nelinearne dinamike u 19. i 20. stoljeću. Matematičari poput Henrija Poincaréa i fizičara poput Edwarda Lorenza postavili su temelje za razumijevanje složene dinamike nelinearnih sustava. Ti pionirski radovi naglasili su osjetljivost kaotičnih sustava na početne uvjete te mogućnost dramatično različitih ishoda s malim promjenama [1]. Ključni preokret u razumijevanju sinkronizacije dogodio se 1990. godine s objavljivanjem rada Louisa M. Pecore i Thomasa L. Carrolla [2]. Taj rad pridonio je razumijevanju sinkronizacije kaotičnih sustava i uveo koncept "sinkronizacije kaosa", gdje se kaotični sustavi ponašaju korelirano, unatoč njihovoj osjetljivosti na početne uvjete. Ovaj rad potaknuo je još mnoga istraživanja i kasnije studije o sinkronizaciji kaotičnih sustava. Kroz daljnji razvoj ideja i napredak eksperimentalnih tehnika, dobiveni su novi uvidi i dublje razumijevanje sinkronizacije kaotičnih sustava. Sinkronizacija se također proširila s nekoliko kaotičnih sustava na mreže povezanih oscilatora. To je dovelo do istraživanja sinkronizacije u umreženim skupinama oscilatora, što je otvorilo put za istraživanje kolektivne dinamike u složenim mrežama [2]. Napredak u razumijevanju sinkronizacije u kaotičnim sustavima nije samo teorijski. Sinkronizacija ima praktične primjene u područjima poput sigurne komunikacije, kriptografije i obrade signala [3, 4]. Istraživači su iskoristili svojstva sinkroniziranih kaotičnih sustava za razvoj sigurnih shema otpornih na prislušivanje te za primjenu u obradi signala, kao što je smanjenje šuma i sigurno prijenos podataka [5]. Kroz povijest, raslo je razumijevanje sinkronizacije kaotičnih sustava, a ključni doprinosi otvorili su nova područja istraživanja i primjene.

Ovaj rad podijeljen je na četiri poglavlja. U uvodu se upoznaje tema te povijesni kontekst sinkronizacije kaotičnih sustava. U drugom dijelu upoznaje se evolucija razvoja sinkronizacije kaotičnih sustava te koji su izazovi pri sinkroniziranju kaotičnih sustava. Također, upoznaje se kako dizajnirati kaotične sustave te njihova primjena. U trećem poglavlju na primjeru Chua diode opisuje se primjena kaosa uz simulaciju te je na kraju rada dan zaključak.

## 1.1. ZADATAK ZAVRŠNOG RADA

Napraviti pregled kaotičnih sustava i uvjeta pod kojim se mogu sinkronizirati. Prikazati mogućnosti primjene sinkronizacije, te odabrati jednu primjenu i detaljnije je analizirati.

## 2. SINKRONIZACIJA KAOTIČNIH SUSTAVA

### 2.1. EVOLUCIJA KONCEPTA SINKRONIZACIJE

Početno su istraživači pristupali sinkronizaciji iz intuitivnije perspektive, pokušavajući razumjeti kako bi dva kaotična sustava mogla pokazivati slično ponašanje. Međutim, kako se polje razvijalo, pojavila se geometrijska perspektiva koja pruža dublje razumijevanje temeljnih mehanizama i matematičkih načela koja upravljaju sinkronizacijom u kaotičnim sustavima [2]. U ranim fazama proučavanja sinkronizacije u kaotičnim sustavima, istraživači su se uglavnom usredotočili na pronalaženje primjera sinkroniziranih kaotičnih sustava i razumijevanje uvjeta pod kojima se sinkronizacija može dogoditi. Istraživali su sustave s usporedivim Lyapunovim eksponentima kako bi identificirali slučajeve u kojima je sinkronizacija moguća. Međutim, ovaj intuitivni pristup imao je ograničenja jer nije pružao sveobuhvatan okvir za razumijevanje temeljne dinamike sinkronizacije.

Kako su istraživanja napredovala, geometrijska perspektiva sinkronizacije dobila je na važnosti. Ova perspektiva uključuje uporabu sinkronizacijskih mnogostrukosti (eng. *manifold*) za opisivanje dinamike sinkronizacije u kaotičnim sustavima [2, 6]. Sinkronizacijske mnogostrukosti su nižedimenzionalni podprostori unutar visokodimenzionalnog faznog prostora kaotičnih sustava koji su najvažniji kako bi se postigla sinkronizacija [6]. Proučavanjem svojstava tih mnogostrukosti istraživači mogu dobiti uvide u mehanizme koji omogućuju sinkronizaciju u kaotičnim sustavima [2].

Osim toga, pojam generalizirane sinkronizacije pojavio se kao značajan razvoj u području. Generalizirana sinkronizacija odnosi se na situaciju u kojoj se ne samo stanja kaotičnih sustava sinkroniziraju, već i njihove derivacije ili funkcije stanja pokazuju korelaciju [2]. Ovaj širi oblik sinkronizacije otvorio je nove mogućnosti za razumijevanje složenih obrazaca sinkronizacije i njihovu primjenu [4]. Generalizirana sinkronizacija našla je primjene u sigurnosnim komunikacijskim mrežama, gdje se informacije kodiraju u sinkroniziranoj dinamici kaotičnih sustava, te u upravljanju kaotičkim sustavima za različite inženjerske primjene [7]. U posljednjim

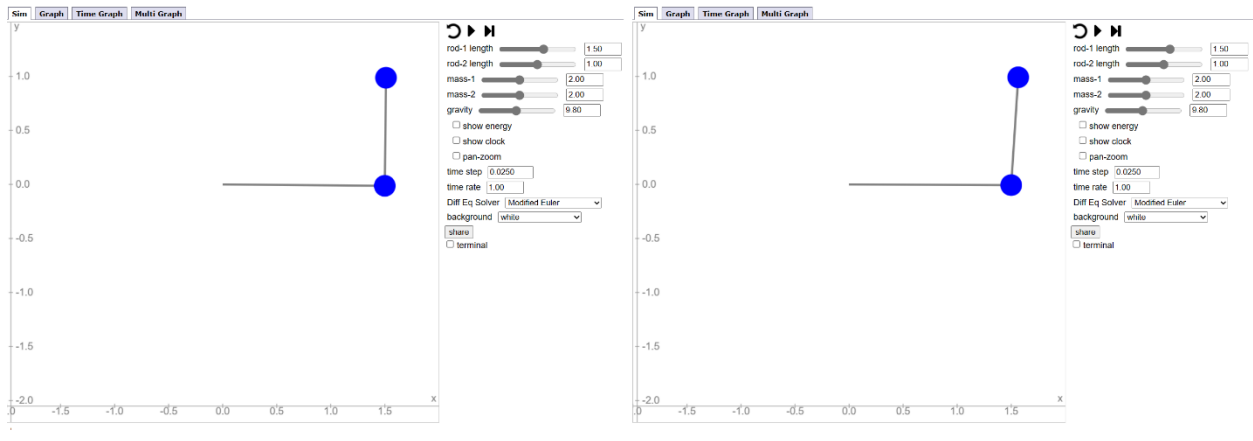
godinama fokus se preusmjerio na sinkronizaciju u mrežama kaotičnih sustava. Razumijevanje sinkronizacije u složenim mrežama ključno je za primjene poput sigurnosnih komunikacijskih mreža, elektroenergetskih mreža i neuronskih mreža [4]. Proučavanje sinkronizacije u mrežama uključuje istraživanje na koji način sinkronizacija nastaje i razvija se u vrlo velikim sustavima.

## 2.2. IZAZOVI U SINKRONIZACIJI KAOTIČNIH SUSTAVA

Sinkronizacija u kaotičnim sustavima predstavlja posebne izazove zbog njihove intrinzične dinamike. Kaotični sustavi karakteriziraju pozitivni Lyapunovljevi eksponenti, koji ukazuju na njihovu osjetljivost na početne uvjete i eksponencijalno odstupanje trajektorija. Ova inherentna nepredvidljivost čini postizanje sinkronizacije u kaotičnim sustavima naizgled nemogućim [2].

Međutim, unatoč tim izazovima, istraživači su otkrili da kaotični sustavi mogu pokazivati konvergenciju prema sinkronizaciji. Jedan od glavnih izazova u sinkronizaciji kaotičnih sustava je prisutnost pozitivnih Lyapunovljevih eksponenata. Ti eksponenti kvantificiraju stopu odstupanja bliskih trajektorija, što implicira da čak i male razlike u početnim uvjetima mogu rezultirati drastično različitim ponašanjem tijekom vremena. Ova osjetljivost na početne uvjete predstavlja značajnu prepreku za sinkronizaciju, budući da čak i najmanja razlika može spriječiti usklađivanje sustava. Osim toga, kaotični sustavi nemaju periodičnost, što je karakteristika često iskorištena u sinkronizaciji linearnih sustava [2]. U kaotičnim sustavima nema točno ponavljajućih uzoraka, što otežava postizanje sinkronizacije. Dokaz kako u kaotičnim sustavima nema ponavljajućih uzoraka prikazan je na samostalno izrađenoj simulaciji izrađenoj na web-stranici [8]. Na (slici 2.2.1) se nalaze dva identična njihala. Mala razlika u početnom položaju njihala doprinjet će tome da će se njihala s vremenom sve manje kretati sinkronizirano iako su identičnih dimenzija. U početku njihove putanje su slične (slika 2.2.2), ali s vremenom njihove putanje će se sve više razlikovati (slika 2.2.3).



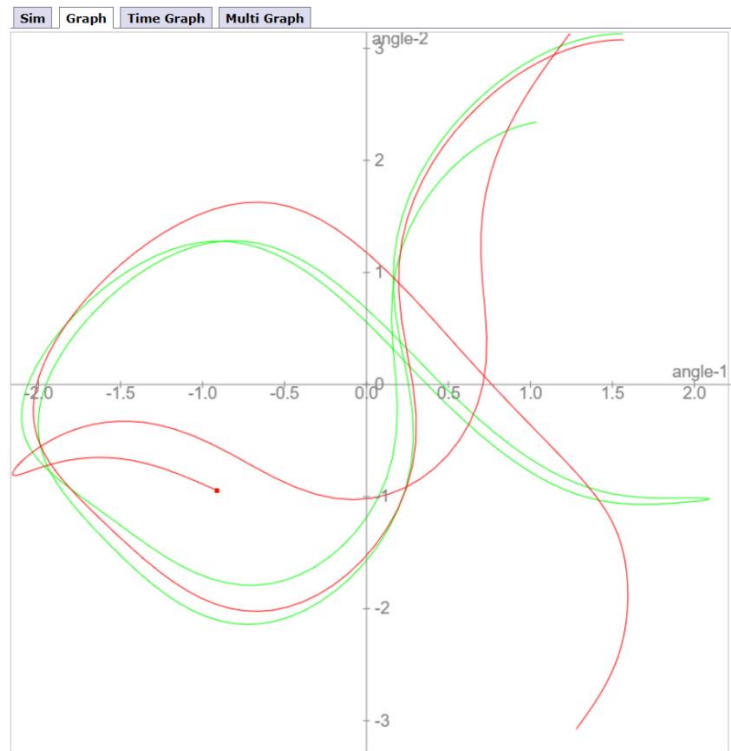


**Slika 2.2.1** Početno stanje sustava

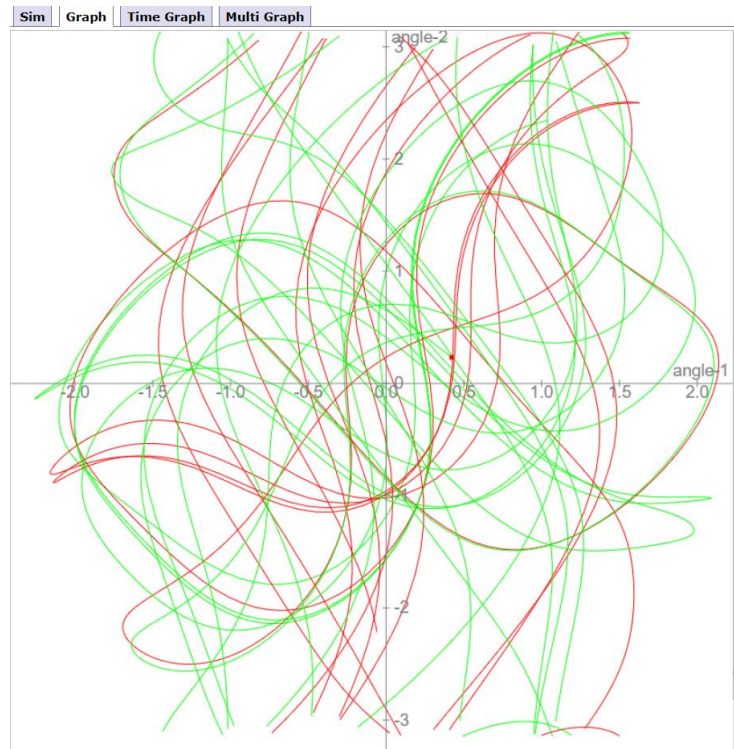
izrađeno na: [8]

	NJIHALO 1 (ZELENO)	NJIHALO 2 (CRVENO)
ROD-1 LENGTH	1.50	1.50
ROD-2 LENGTH	1,00	1,00
MASS-1	2,00	2,00
MASS-2	2,00	2,00
GRAVITY	9,80	9,80
TIME STEP	0,0250	0,0250
TIME RATE	1,00	1,00
DIFF. EQ. SOLVER	MODIFIED EULER	MODIFIED EULER
BACKGROUND	WHITE	WHITE

Parametri korišteni na (slici 2.2.1)

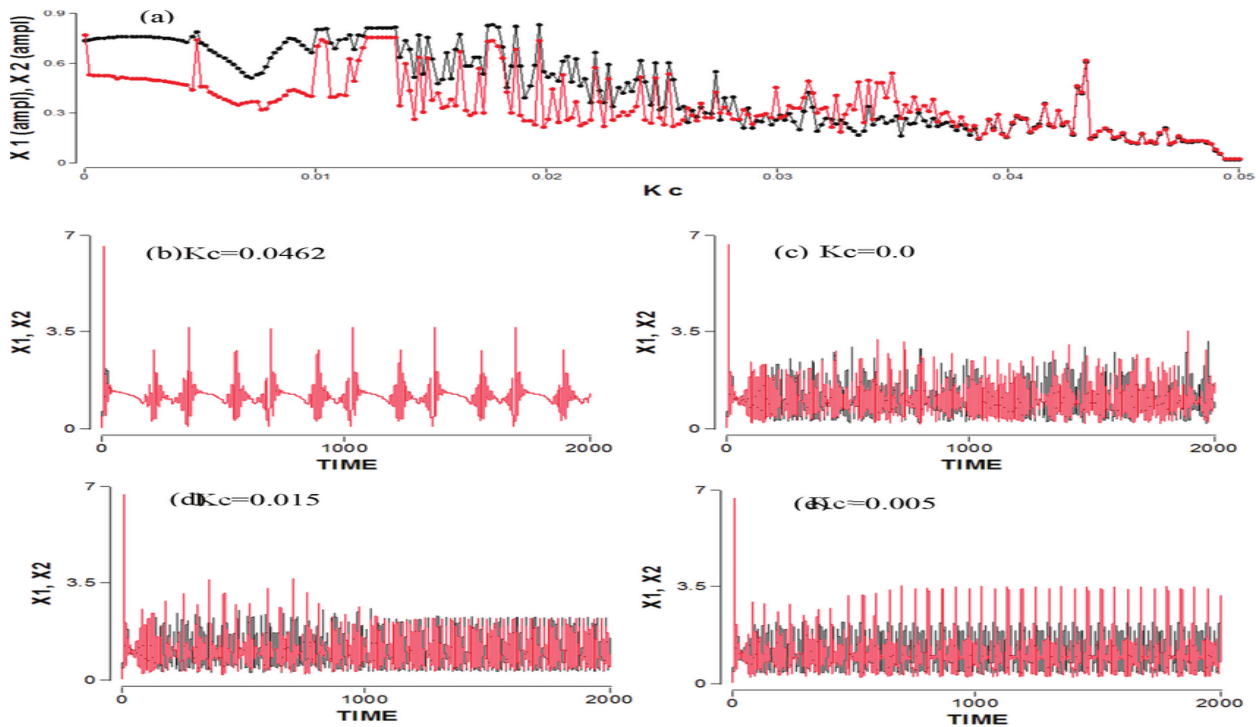


**Slika 2.2.2** Sustav nakon 5 sekundi uz početne uvjete prikazane na (slici 2.2.1)  
izrađeno na: [8]



**Slika 2.2.3** Sustav nakon 20 sekundi uz početne uvjete prikazane na (slici 2.2.1)  
izrađeno na: [8]

Kako bi se prevladali ovi izazovi, istraživači su razvili inovativne pristupe sinkronizaciji u kaotičnim sustavima. Jedan pristup uključuje iskorištavanje koncepta "sinkronizacije kaosa" koji su uveli Pecora i Carroll [2]. Kaos sinkronizacija odnosi se na fenomen u kojem dva ili više kaotičnih sustava pokazuju povezano ponašanje, unatoč njihovoj osjetljivosti na početne uvjete. Ovaj koncept dokazuje da su kaotični sustavi inherentno nepredvidljivi i pokazuje da je sinkronizacija moguća u prisutnosti kaosa.

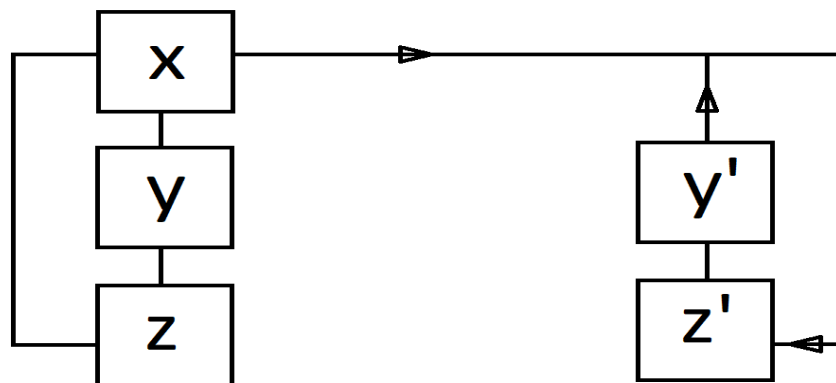


**Slika 2.2.4** Sinkronizacija dva sustava  
preuzeto 15.6.2023. [synchronisation of chaotic systems – Google pretraživanje](#)

## 2.3. DIZAJN I PRIMJENA SLOŽENIH SUSTAVA ZA SINKRONIZACIJU

Iskorištavanjem principa sinkronizacije, istraživači su uspješno dizajnirali i manipulirali sustavima sastavljenim od kaotičnih komponenti. Ovo područje istraživanja istražuje namjernu sinkronizaciju kaotičnih sustava u svrhu određenih ciljeva. Jedna primjena dizajna složenih sustava za sinkronizaciju je u sigurnoj komunikaciji i kriptografiji slika. Kaotični sustavi posjeduju poželjne karakteristike poput osjetljivosti na početne uvjete, pseudoslučajnosti i nepredvidljivosti, zbog čega su pogodni za kriptografske sheme [5]. Istraživači su razvili kriptografske algoritme temeljene na kaotičnoj sinkronizaciji, gdje se dva kaotična sustava, jedan na pošiljateljevoj strani i drugi na primateljevoj strani, sinkroniziraju kako bi omogućili sigurnu komunikaciju. Dijeljenjem parametara sinkronizacije i prijenosom šifriranih poruka putem sinkroniziranih kaotičnih signala, izuzetno je teško neovlaštenim korisnicima dešifrirati informacije [2, 5].

Blokovi i oznake predstavljaju dinamičke varijable sustava, dok veze predstavljaju povezanost između blokova. Dijagram predajnika predstavlja tri povezane diferencijalne jednačbe. Predajnik i prijemnik su identični, jedina razlika je u tome što prijemnik nema varijablu  $x$ , tj.  $x'$  kako je prikazano na (slici 2.3.1.) Zbog toga željena poruka sadržana je unutar varijabli  $y$  i  $z$ , a  $x$  služi kako bi stvarao smetnje pri prenošenju informacije iz predajnika do prijemnika. Prijemnik nema varijablu  $x'$  jer se želi izbjeći primanje smetnji, tj. cilj je primiti samo željeni dio poruke bez smetnji. Ova ideja je rezultirala istraživanjem kaotične sinkronizacije [2].



Slika 2.3.1 Primjer primjene kaosa  
izrađeno po uzoru na: [2]

Osim toga, principi sinkronizacije koriste se u primjenama obrade signala. Kaotični signali mogu se koristiti za zadatke poput sigurnog prijenosa podataka, smanjenja šuma i šifriranja podataka te nalaze primjene na području teorije upravljanja i prepoznavanja uzoraka [5].

Na primjer, kaotične tehnike modulacije koriste svojstva sinkroniziranih kaotičnih sustava kako bi ugradile informacije unutar kaotičnih signala, omogućujući siguran prienos preko kanala. Kaotično maskiranje, druga tehnika, koristi nasumičnost i osjetljivost kaotičnih sustava kako bi prikrila izvorni signal, čineći ga otpornijim na prisluškivanje ili ometanje signala [5].

Osim toga, dizajn složenih sustava temeljen na principima sinkronizacije otvorio je put za razvoj složenijih i prilagodljivih kaotičnih sustava. Dizajniranjem povezanih kaotičnih sustava s određenim mehanizmima spoja, istraživači su postigli različito poželjno ponašanje, poput generiranja određenih uzoraka, kontrole bifurkacija i suzbijanja neželjenih dinamika.

## **2.4. SINKRONIZACIJA U MREŽAMA OSCILATORA**

Proučavanje sinkronizacije u kaotičnim sustavima proširilo se s nekoliko međusobno povezanih sustava na mreže povezanih oscilatora. Ovo istraživanje usredotočuje se na razumijevanje kako sinkronizacija nastaje u složenim mrežama, gdje svaki čvor predstavlja pojedinačni dinamički sustav. Kolektivna dinamika ovih povezanih sustava rezultira fenomenima sinkronizacije s primjenama u različitim znanstvenim područjima. Mreže oscilatora pružaju okvir za proučavanje sinkronizacije u složenim sustavima poput bioloških mreža, neuronskih mreža, društvenih mreža i elektroenergetskih mreža. Ponašanje pojedinačnih oscilatora utječe na jačinu spoja i topologiju mreže, što dovodi do bogatog spektra kolektivne dinamike [2]. Razumijevanje i kontrola sinkronizacije u takvim mrežama ima važne implikacije za područja poput neuroznanosti, epidemiologije i distribuiranog računanja. Jedan od temeljnih modela koji se koristi za proučavanje sinkronizacije u mrežama oscilatora je Kuramotov model. Predložen od strane Yoshikija Kuramota u 1970-ima, ovaj model opisuje dinamiku fazno povezanih oscilatora [9]. U Kuramotovom modelu, faza svakog oscilatora razvija se na temelju njegove intrinzične frekvencije i utjecaja drugih oscilatora putem spoja. Ovisno o topologiji mreže, oscilatori mogu sinkronizirati svoje faze, što dovodi do koherentnog kolektivnog ponašanja. Istraživanje sinkronizacije u mrežama oscilatora otkrilo je nekoliko zanimljivih fenomena. Na primjer, postojanje kritične jačine spoja, poznate kao prag sinkronizacije, određuje hoće li se sinkronizacija dogoditi ili ne [10]. Ispod tog praga, oscilatori ostaju nesinkronizirani, dok se iznad njega pojavljuje sinkronizacija. Točna priroda prijelaza sinkronizacije i uloga topologije mreže u olakšavanju ili sprječavanju sinkronizacije bili su predmet intenzivnog proučavanja. Izvan Kuramotovog modela,

istraživači su istraživali složenije topologije mreža, poput *small-world systems* [11], kako bi istražili utjecaj strukture mreže na sinkronizaciju. Također su proučavali učinke vremenskih kašnjenja, heterogenosti među oscilatorima i adaptivnih mehanizama spoja na pojavu i stabilnost sinkronizacije u mrežnim sustavima [12]. Proučavanje sinkronizacije u mrežama oscilatora ima praktične primjene. Primjerice, u elektroenergetskim mrežama, razumijevanje dinamike sinkronizacije kaosa ključno je za održavanje stabilnog i učinkovitog rada. Električni energetske sustavi su u osnovi nelinearni dinamički sustavi. Proučavanje kaosa i njegove kontrole u takvim sustavima može biti od velike važnosti s obzirom na izbjegavanje neželjenih pojava poput prekida napajanja [4, 7].

### 3. SINKRONIZACIJA DISKRETNOG CHUA KAOTIČNOG SUSTAVA

#### 3.1. DISKRETNI CHUA KAOTIČNI SUSTAV

Chua krug je jednostavan elektronički krug koji omogućava da se gotovo sva dinamička ponašanja mogu primjeniti u elektroničkom laboratoriju te promatrati na osciloskopu, a ne samo u računalnim simulacijama. Dizajnirali su ga Leon O. Chua, profesor elektrotehnike i računalni znanstvenik na Sveučilištu u Kaliforniji u Berkeleyju, i japanski znanstvenik T. Matsumoto. Radi se o RLC krugu s četiri linearna elementa: dva kondenzatora, jednim otpornikom i jednom zavojnicom te nelinearnom diodom, koji se može modelirati sustavom od tri diferencijalne jednačbe [13].

Chua kaotični krug je opisan sljedećim diferencijalnim jednačbama:

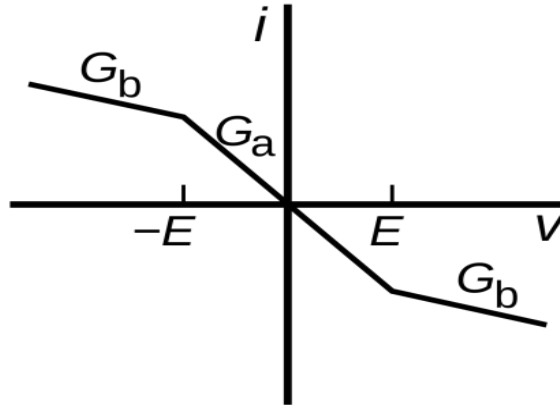
$$\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot [y - x - f(x)] \quad (3.1.1)$$

$$RC_2 \frac{dy}{dt} = x - y + Rz \quad (3.1.2)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\beta y \quad (3.1.3)$$

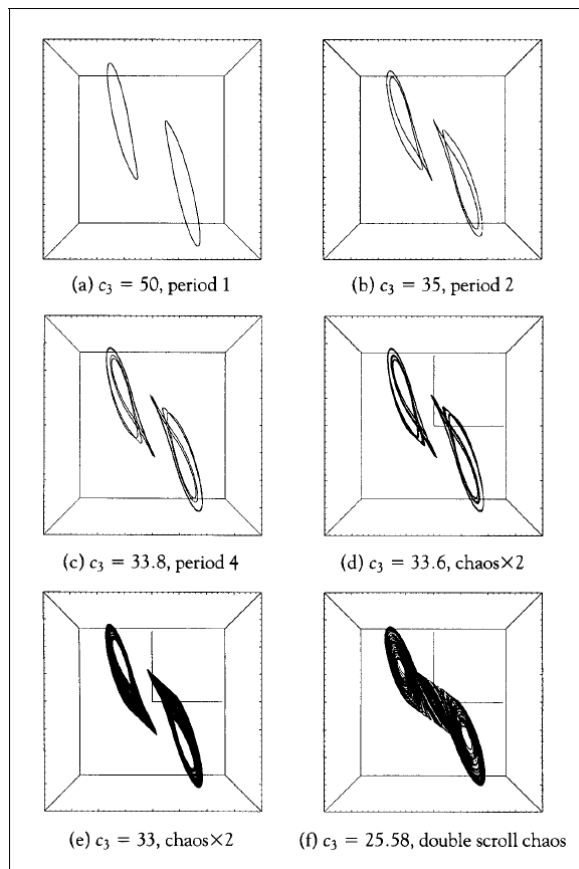
$$\text{gdje je } f(x) = m_1 x + \frac{m_0 - m_1}{2} (|x + 1| - |x - 1|) \quad (3.1.4)$$

Funkcija  $f(x)$ , čija tri linearna segmenta predstavljaju tri različita dijela naponsko-strujnih režima diode, nacrtana je na (slici 3.1.1). Ova djelomično linearna funkcija je jedina nelinearnost u krugu i u jednačbama simulacije. Uvijek će se koristiti parametri nagiba koji zadovoljavaju:  $m_0 \geq 1 \geq m_1$  [13].



Slika 3.1.1 Nelinearna funkcija Chuine diode

Tipične putanje za jednadžbe Chuinog kruga prikazane su na (slici 3.1.2). Svi parametri osim jednog su fiksirani, a  $c_3$  se mijenja [13].



Slika 3.1.2 Tipične putanje za jednadžbe Chua-ovog kruga[11]

Diskretni Chua kaotični sustav je varijacija Chua kaotičnog sustava koja se koristi za opisivanje dinamike nelinearnih oscilatora. U diskretnom Chua kaotičnom sustavu, te jednadžbe su aproksimirane koristeći diskretne korake umjesto kontinuiranih vremenskih varijabli. Ovo se često radi kako bi se jednostavnije proučavala dinamika sustava koristeći računalne simulacije.

Diskretni Chua kaotični sustav ima različite primjene u području računarstva, komunikacija, kriptografije, umjetne inteligencije i drugim poljima [14]. Može se koristiti kao generator pseudo-slučajnih brojeva, u kriptografiji za osiguravanje sigurnosti podataka, i u drugim aplikacijama koje zahtijevaju generiranje složenih i neizvjesnih signala [14].

Na osnovu Chuaovog seta jednadžbi izveden je diskretni kaotični sustav prilagođen za izvršavanje u petlji (rekurzivno).

$$X_{n+1} = X_n + A \cdot (Y_n - X_n - D \cdot f(X_n)) \quad (3.1.5)$$

$$f(X_n) = m_1 \cdot X_n + 0.5 \cdot (m_0 - m_1) \cdot (|X_n + 1| - |X_n - 1|) \quad (3.1.6)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + B \cdot (X_n - Y_n + Z_n) \quad (3.1.7)$$

$$Z_{n+1} = Z_n - C \cdot Y_n \quad (3.1.8)$$

Kaotični odziv sustava može se ostvariti za različite kombinacije parametara A, B, C, D, m<sub>0</sub> i m<sub>1</sub>. Jedna od tih kombinacija je navedena u nastavku:

$$A = 0,65 \quad m_0 = -2$$

$$B = 0,5 \quad m_1 = -0,5$$

$$C = 1$$

$$D = 1$$

Promjenom ovih parametara može se dobiti različite oblike i obrasce oscilacija u krugu.

Da bi se objasnio diskretni sustav koji se izvodi iz ovih jednadžbi, koristit će se sljedeći rekurzivni izrazi: (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7) i (3.1.8)

Ovdje, X(n), Y(n) i Z(n) predstavljaju stanja sustava u diskretnom vremenu, dok su A, B, C i D parametri koji utječu na ponašanje sustava. Parametri m<sub>0</sub> i m<sub>1</sub> koriste se u izračunu funkcije f(X(n)).

Primjenom ovih jednadžbi s odgovarajućim početnim uvjetima i parametrima, sustav će generirati kaotične oscilacije. Ove oscilacije karakteriziraju visoka osjetljivost na početne uvjete i stvaraju se nepredvidivim i složenim putanjama u faznom prostoru.



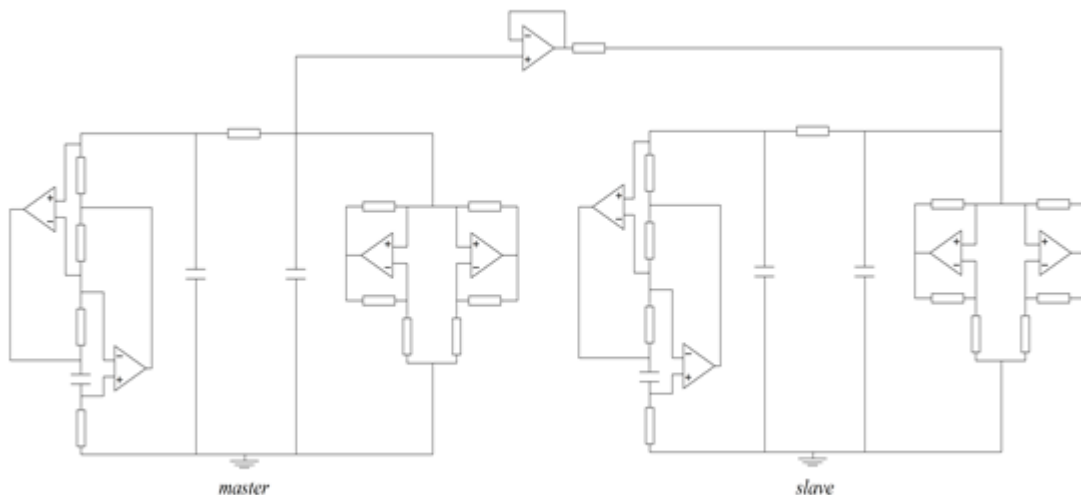
Cilj simulacije je stvoriti sinkronizaciju dva identična kaotična sustava uz različite početne uvjete te pronaći intervale za svaku od varijabli u kojima će sustav biti u kaosu jer je sinkronizacija kaotičnih sustava moguća samo kada su sustavi kaotični.

### **3.2. KAKO SINKRONIZIRATI DVA DISKRETNA CHUA KAOTIČNA SUSTAVA**

Kako bi se sinkroniziralo dva identična Chuina kaotična sustava s različitim početnim uvjetima, može se primijeniti postupak poznat kao "metoda povratne sprege" ili "metoda *master-slave*" [15]. Ova metoda omogućuje da se dvije kopije sustava međusobno usklade i prate istu dinamiku, stvarajući tako sinkronizirane oscilacije. Opći postupak glasi:

1. Odabere se jedan od sustava kao *master* i drugi kao *slave*.
2. Inicijalizira se oba sustava s različitim početnim uvjetima, odnosno različitim vrijednostima stanja  $x$ ,  $y$  i  $z$ .
3. Izračuna se izlaz *master* sustava (na primjer,  $x$ -vrijednost) i prenese se na *slave* sustav.
4. Izračuna se pogrešku sinkronizacije između izlaza *master* i *slave* sustava.
5. Prenese se tu pogrešku natrag u *slave* sustav kako bi se prilagodilo parametre *slave* sustava.
6. Ponavlja se korake 3-5 za svaki korak vremena kako bi se održala sinkronizacija.

Postupak se sastoji od razmjene informacija između *master* i *slave* sustava te prilagodbe parametara *slave* sustava kako bi se minimizirala pogreška sinkronizacije. Ova međusobna interakcija omogućuje postizanje stabilne sinkronizacije između dva sustava. Važno je napomenuti da postupak sinkronizacije može biti osjetljiv na parametre i inicijalne uvjete. Stoga je potrebno pažljivo podešavanje parametara i prilagodba postupka prema potrebama sustava.



**Slika 3.3.1** Shematski prikaz *master/slave* sustava

Izrađeno po uzoru na: [15]

### 3.3. SIMULACIJA

Tijekom simulacije sustava cilj je sinkronizirati i objasniti uvjete za sinkronizaciju Chuinog kaotičnog sustava navedenog u poglavlju „Diskretni Chua kaotični sustav.“ Kako bi se postigla sinkronizacija koristi se rekurzivni pristup, gdje se varijable stanja ažuriraju korak po korak. Početne vrijednosti varijabli stanja su  $x = 0.1$ ,  $y = 0$  i  $z = 0$ .

U svakom koraku simulacije, koriste se izračunate vrijednosti varijabli stanja kako bi se izračunale nove vrijednosti prema zadanim jednadžbama. Koraci simulacije se ponavljaju određeni broj puta (u ovom slučaju 5000 koraka) kako bi se dobili rezultati za te korake.

Rezultat simulacije su vrijednosti varijabli stanja ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) za svaki korak. Te vrijednosti mogu se koristiti za analizu ponašanja sustava, kao što su grafički prikazi ili daljnje matematičke analize.

U simulaciji sinkronizacija se odvija po varijabli  $y$ . Sinkronizacija po varijabli  $y$  odnosi se na usklađivanje vrijednosti  $y$  između dva ili više sustava. U slučaju Chuinog oscilatora,  $y$  je jedna od tri glavne varijable koje opisuju dinamiku sustava. Sinkronizacija  $y$  varijable omogućava da se vrijednosti  $y$  oscilatora ili sklopova usklade kako bi se postigla slična oscilacija ili periodično ponašanje. Sinkronizacija po varijabli  $y$  je zanimljiva jer  $y$  varijabla opisuje glavno oscilacijsko ponašanje Chuinog oscilatora. Kada se postigne sinkronizacija po  $y$  varijabli, to znači da su oscilatori ili sklopovi postigli slične amplitude i frekvencije oscilacija. Proučavanje sinkronizacije

po y varijabli može pružiti uvid u povezanost i interakciju između različitih oscilatora ili sklopova u sustavu.

Program simulacije nalazi se u Prilogu 1.

### 3.4. REZULTATI SIMULACIJE

Zadane vrijednosti su:  $A = 0.65$ ,  $B = 0.5$ ,  $C = 1$ ,  $D = 1$ ,  $m_1 = -0.5$ ,  $m_0 = -2$ . U svakom pokretanju simulacije cilj je bio pronaći interval u kojem se pojedina vrijednost može kretati, a da sustav ostane u kaosu.

1. Jedna od početnih vrijednosti je varijabilna ostale su fiksne

A	(0.510, 0.745)
B	0.5
C	1
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 1

A	0.65
B	(0.302, 0.920)
C	1
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 2

A	0.65
B	0.5
C	(0.763, 1.666)
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 3

A	0.65
B	0.5
C	1
D	(0.503, 1.450)
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 4

A	0.65
B	0.5
C	1
D	1
$m_1$	(-0.731, 0.8)
$m_0$	-2

tablica 5

A	0.65
B	0.5
C	1
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	(-1E+15, -1.1)

tablica 6

U tablici 1 sve vrijednosti osim A su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost A može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 2 sve vrijednosti osim B su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost B može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 3 sve vrijednosti osim C su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost C može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 4 sve vrijednosti osim D su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost D može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 5 sve vrijednosti osim  $m_1$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_1$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 6 sve vrijednosti osim  $m_0$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_0$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

2. Dobiveni su intervali za svaku od vrijednosti. U idućim koracima jedna vrijednost će biti fiksirana na svoju maksimalnu, odnosno minimalnu vrijednost, a ostale vrijednosti biti će fiksirane na zadano te će se kao u prošloj simulaciji za pojedinu vrijednost tražiti interval u kojem će sustav biti u kaosu.

A je fiksiran na najveći član intervala u kojem sustav neće ispasti iz kaosa:  $A = 0.745$

A	0.745
B	(0.499, 1.450)
C	1
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 7

A	0.745
B	0.5
C	(1, 1.55)
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 8

A	0.745
B	0.5
C	1
D	(0.6, 1.65)
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 9

A	0.745
B	0.5
C	1
D	1
$m_1$	(-0.82, -0.49)
$m_0$	-2

tablica 10

A	0.745
B	0.5
C	1
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	(-2, -1.1)

tablica 11

U tablici 7 sve vrijednosti osim B su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost B može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 8 sve vrijednosti osim C su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost C može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 9 sve vrijednosti osim D su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost D može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 10 sve vrijednosti osim  $m_1$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_1$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 11 sve vrijednosti osim  $m_0$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_0$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

A je fiksiran na najmanji član intervala u kojem sustav neće ispasti iz kaosa:  $A = 0.510$

A	0.510
B	(0.12, 0.5)
C	1
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 12

A	0.510
B	0.5
C	(0.52, 1.52)
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 13

A	0.510
B	0.5
C	1
D	0.501, 1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 14

A	0.510
B	0.5
C	1
D	1
$m_1$	(-0.5, 3.13)
$m_0$	-2

tablica 15

A	0.510
B	0.5
C	1
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	$(-\infty, -1.1)$

tablica 16

U tablici 12 sve vrijednosti osim B su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost B može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 13 sve vrijednosti osim C su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost C može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 14 sve vrijednosti osim D su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost D može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 15 sve vrijednosti osim  $m_1$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_1$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 16 sve vrijednosti osim  $m_0$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_0$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

B je fiksiran na najveći član intervala u kojem sustav neće ispasti iz kaosa:  $B = 0.920$

A	(0.65, 0.86)
B	0.920
C	1
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 17

A	0.65
B	0.920
C	(0.67, 1)
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 18

A	0.65
B	0.920
C	1
D	(0.51, 1)
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 19

A	0.65
B	0.920
C	1
D	1
$m_1$	(-0.5, -1.68)
$m_0$	-2

tablica 20

A	0.65
B	0.920
C	1
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	$(-\infty, -1.1)$

tablica 21

U tablici 17 sve vrijednosti osim A su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost A može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 18 sve vrijednosti osim C su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost C može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 19 sve vrijednosti osim D su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost D može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 20 sve vrijednosti osim  $m_1$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_1$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 21 sve vrijednosti osim  $m_0$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_0$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

B je fiksiran na najmanji član intervala u kojem sustav neće ispasti iz kaosa:  $B = 0.302$

A	(0.39, 0.66)
B	0.302
C	1
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 22

A	0.65
B	0.302
C	(1, 1.41)
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 23

A	0.65
B	0.302
C	1
D	(1, 1.64)
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 24

A	0.65
B	0.302
C	1
D	1
$m_1$	(-0.83, -0.5)
$m_0$	-2

tablica 25

A	0.65
B	0.302
C	1
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	(-2, -1.1)

tablica 26

U tablici 22 sve vrijednosti osim A su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost A može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 23 sve vrijednosti osim C su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost C može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 24 sve vrijednosti osim D su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost D može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 25 sve vrijednosti osim  $m_1$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_1$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 26 sve vrijednosti osim  $m_0$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_0$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

C je fiksiran na najveći član intervala u kojem sustav neće ispasti iz kaosa:  $C = 1.666$

A	(0.65, 0.80)
B	0.5
C	1.666
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 27

A	0.65
B	(0.5, 0.58)
C	1.666
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 28

A	0.65
B	0.5
C	1.666
D	(1, 1.14)
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 29

A	0.65
B	0.5
C	1.666
D	1
$m_1$	(-0.55, -0.5)
$m_0$	-2

tablica 30

A	0.65
B	0.5
C	1.666
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	(-2, -1.1)

tablica 31

U tablici 27 sve vrijednosti osim A su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost A može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 28 sve vrijednosti osim B su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost B može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 29 sve vrijednosti osim D su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost D može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 30 sve vrijednosti osim  $m_1$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_1$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 31 sve vrijednosti osim  $m_0$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_0$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.



C je fiksiran na najmanji član intervala u kojem sustav neće ispasti iz kaosa:  $C = 0.763$

A	(0.51, 0.65)
B	0.5
C	0.763
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 32

A	0.65
B	(0.5, 2.1)
C	0.763
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 33

A	0.65
B	0.5
C	0.763
D	(0.51, 1.71)
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 34

A	0.65
B	0.5
C	0.763
D	1
$m_1$	(-0.83, -0.5)
$m_0$	-2

tablica 35

A	0.65
B	0.5
C	0.763
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	(-2, -1.1)

tablica 36

U tablici 32 sve vrijednosti osim A su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost A može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 33 sve vrijednosti osim B su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost B može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 34 sve vrijednosti osim D su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost D može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 35 sve vrijednosti osim  $m_1$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_1$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 36 sve vrijednosti osim  $m_0$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_0$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

D je fiksiran na najveći član intervala u kojem sustav neće ispasti iz kaosa:  $D = 1.45$

A	(0.65, 0.8)
B	0.5
C	1
D	1.450
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 37

A	0.65
B	(0.20, 0.5)
C	1
D	1.450
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 38

A	0.65
B	0.5
C	(0.73, 1)
D	1.450
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 39

A	0.65
B	0.5
C	1
D	1.450
$m_1$	(-0.5, -0.16)
$m_0$	-2

tablica 40

A	0.65
B	0.5
C	1
D	1.450
$m_1$	-0.5
$m_0$	$(\infty, -1.1)$

tablica 41

U tablici 37 sve vrijednosti osim A su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost A može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 38 sve vrijednosti osim B su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost B može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 39 sve vrijednosti osim C su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost C može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 40 sve vrijednosti osim  $m_1$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_1$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 41 sve vrijednosti osim  $m_0$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_0$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

D je fiksiran na najmanji član intervala u kojem sustav neće ispasti iz kaosa:  $D = 0.503$

A	(0.46, 0.78)
B	0.5
C	1
D	0.503
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 42

A	0.65
B	(0.1, 2.4)
C	1
D	0.503
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 43

A	0.65
B	0.5
C	(0.8, 1.5)
D	0.503
$m_1$	-0.5
$m_0$	-2

tablica 44

A	0.65
B	0.5
C	1
D	0.503
$m_1$	(-1.4, 13)
$m_0$	-2

tablica 45

A	0.65
B	0.5
C	1
D	0.503
$m_1$	-0.5
$m_0$	(-6, -2)

tablica 46

U tablici 42 sve vrijednosti osim A su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost A može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 43 sve vrijednosti osim B su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost B može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 44 sve vrijednosti osim C su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost C može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 45 sve vrijednosti osim  $m_1$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_1$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 46 sve vrijednosti osim  $m_0$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_0$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

$m_1$  je fiksiran na najveći član intervala u kojem sustav neće ispasti iz kaosa:  $m_1 = 0.804$

A	(0.24, 0.65)
B	0.5
C	1
D	1
$m_1$	0.804
$m_0$	-2

tablica 47

A	0.65
B	(0.5, 2.3)
C	1
D	1
$m_1$	0.804
$m_0$	-2

tablica 48

A	0.65
B	0.5
C	(0.6, 1)
D	1
$m_1$	0.804
$m_0$	-2

tablica 49

A	0.65
B	0.5
C	1
D	(0.6, 1)
$m_1$	0.804
$m_0$	-2

tablica 50

A	0.65
B	0.5
C	1
D	1
$m_1$	0.804
$m_0$	(-2, -1.1)

tablica 51

U tablici 47 sve vrijednosti osim A su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost A može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 48 sve vrijednosti osim B su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost B može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 49 sve vrijednosti osim C su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost C može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 50 sve vrijednosti osim D su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost D može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 51 sve vrijednosti osim  $m_0$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_0$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

$m_1$  je fiksiran na najmanji član intervala u kojem sustav neće ispasti iz kaosa:  $m_1 = -0.73$

A	(0.65, 0.82)
B	0.5
C	1
D	1
$m_1$	-0.73
$m_0$	-2

tablica 52

A	0.65
B	(0.18, 0.5)
C	1
D	1
$m_1$	-0.73
$m_0$	-2

tablica 53

A	0.65
B	0.5
C	(0.71, 1)
D	1
$m_1$	-0.73
$m_0$	-2

tablica 54

A	0.65
B	0.5
C	1
D	(0.51, 1)
$m_1$	-0.73
$m_0$	-2

tablica 55

A	0.65
B	0.5
C	1
D	1
$m_1$	-0.73
$m_0$	$(-\infty, -1.1)$

tablica 56

U tablici 52 sve vrijednosti osim A su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost A može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 53 sve vrijednosti osim B su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost B može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 54 sve vrijednosti osim C su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost C može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 55 sve vrijednosti osim D su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost D može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 56 sve vrijednosti osim  $m_0$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_0$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

$m_0$  je fiksiran na najveći član intervala u kojem sustav neće ispasti iz kaosa:  $m_0 = -1.1$

A	(0.50, 0.80)
B	0.5
C	1
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-1.1

tablica 57

A	0.65
B	(0.1, 0.9)
C	1
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-1.1

tablica 58

A	0.65
B	0.5
C	(0.74, 1.67)
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-1.1

tablica 59

A	0.65
B	0.5
C	1
D	(0.92, 1.46)
$m_1$	-0.5
$m_0$	-1.1

tablica 60

A	0.65
B	0.5
C	1
D	1
$m_1$	(-0.73, 5.75)
$m_0$	-1.1

tablica 61

U tablici 57 sve vrijednosti osim A su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost A može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 58 sve vrijednosti osim B su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost B može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 59 sve vrijednosti osim C su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost C može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 60 sve vrijednosti osim D su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost D može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 61 sve vrijednosti osim  $m_1$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_1$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

$m_0$  je fiksiran na najmanji član intervala u kojem sustav neće ispasti iz kaosa:  $m_0 = -1E + 15$

A	(0.51, 0.67)
B	0.5
C	1
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-1E + 15

tablica 62

A	0.65
B	(0.42, 0.98)
C	1
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-1E + 15

tablica 63

A	0.65
B	0.5
C	(0.86, 1.50)
D	1
$m_1$	-0.5
$m_0$	-1E + 15

tablica 64

A	0.65
B	0.5
C	1
D	(0.95, 1.99)
$m_1$	-0.5
$m_0$	-1E + 15

tablica 65

A	0.65
B	0.5
C	1
D	1
$m_1$	-0.50
$m_0$	-1E + 15

tablica 66

U tablici 57 sve vrijednosti osim A su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost A može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 58 sve vrijednosti osim B su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost B može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 59 sve vrijednosti osim C su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost C može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 60 sve vrijednosti osim D su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost D može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

U tablici 61 sve vrijednosti osim  $m_1$  su fiksirane na svoju početnu vrijednost te promatramo u kojem intervalu se vrijednost  $m_1$  može kretati, a da je sustav u kaotičnom režimu rada.

### 3.5. ZAKLJUČAK PROVEDENE SIMULACIJE

Kroz simulaciju pronađeni su intervali u kojima će sustav biti u kaosu, tj. intervale u kojima se može provesti sinkronizacija kaotičnih sustava. Također, može se primijetiti međusobna ovisnost intervala u kojima se događa kaos. Dakle, postavi li se neku od vrijednosti na njen najveći, odnosno najmanji član intervala jedan od članova intervala u kojem je sustav u kaosu preostalih vrijednosti biti će zapravo zadana vrijednost. Važno je primjetiti kako će  $m_0$  uvijek biti u kaosu u jednom od ova dva intervala:  $(-\infty, -1.1)$  ili  $(-2, -1.1)$ . Postoje odstupanja od navedene pojave, no do odstupanja dolazi zbog nedovoljno preciznog određivanja intervala u kojem je sustav u kaosu. Navedeno odstupanje se najbolje vidi na primjeru određivanja intervala kada je  $D$  na najvećem članu intervala gdje je taj najveći član najvjerojatnije nedovoljno precizno određen te je jedini slučaj kada  $m_0$  nije u jednom od navedenih intervala. Do pogreške je došlo jer osnovna metoda određivanja granice kaosa je bila metoda pomicanje vrijednosti dok sustav ne ispadne iz kaosa i onda se vizualno određuje je li sustav u kaosu, a što nije potpuno objektivna i egzaktna metoda određivanja.

## 4. ZAKLJUČAK

Istraživanje sinkronizacije u kaotičnim sustavima predstavlja područje koje prošlo kroz značajan napredak i privuklo pažnju istraživača iz različitih znanstvenih disciplina. Kroz iskorištavanje sposobnosti sinkronizacije kaotičkih komponenti, istraživači su uspješno oblikovali sustave s raznolikim funkcionalnostima. Korištenje principa sinkronizacije u područjima kao što su sigurna komunikacija, kriptografija, obrada signala i dizajn kompleksnih sustava rezultiralo je novim pristupima i povećanjem pouzdanosti i sigurnosti ovih aplikacija. Trenutna istraživanja novih mehanizama sinkronizacije, razvoj naprednih strategija upravljanja i primjene u različitim područjima obećavaju daljnji napredak ovog polja. Razumijevanje novih fenomena sinkronizacije, razvoj novih matematičkih tehnika i integracija principa sinkronizacije s drugim znanstvenim disciplinama donose potencijal za unapređenje razumijevanja složenih sustava i otkrivanje praktičnih primjena. Simulacija Chuinog diskretnog sustava dala je informacije o intervalima u kojima se sustav nalazi u kaosu. Identificirani su intervali za sinkronizaciju kaotičnih sustava i primijećena je međusobna ovisnost između tih intervala. Važno je napomenuti da je postavljanjem vrijednosti na rubove intervala moguće predvidjeti ponašanje sustava unutar tih intervala. Ipak, postoje odstupanja od očekivanja, koja su uzrokovana nedovoljno preciznom metodom određivanja granica kaosa. Ova simulacija pruža dublje razumijevanje kaotičnih sustava, ali naglašava potrebu za preciznijim metodama određivanja granica kaosa radi smanjenja odstupanja.



## 5. LITERATURA

- [1] Christian Oestreicher; „A history of chaos theory“, URL; <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3202497/>, zadnji posjet stranici: 6.9.2023.
- [2] Pecora, L. M., & Carroll, T. L. (1990); „Synchronization in chaotic systems“
- [3] Zhen Wang, Atefeh Ahmadi, Huaigu Tian, Sajad Jafari, Guanrong Chen; „Lower-dimensional simple chaotic systems with spectacular features“, URL; <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S096007792300200X>, zadnji posjet stranici: 6.9.2023.
- [4] Deniz Eroglu<sup>a,b</sup>, Jeroen S. W. Lambb and Tiago Pereira; „Synchronisation of chaos and its applications“, URL; <https://sites.icmc.usp.br/tiago/index.html/assets/synchronisation-of-chaos-and-its-applications.pdf>, zadnji posjet stranici: 6.9.2023.
- [5] Adel Ouannas, Abdulrahman Karouma, Giuseppe Grassi, Viet-Thanh Pham, Van Su Luong; „A novel secure communications scheme based on chaotic modulation, recursive encryption and chaotic masking“, URL; <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1110016820306177>, zadnji posjet stranici: 6.9.2023.
- [6] Johan Markdahl; „Synchronization on Riemannian manifolds: Multiply connected implies multistable“, URL; <https://arxiv.org/pdf/1906.07452.pdf>, zadnji posjet stranici: 6.9.2023.
- [7] E.M. Shahverdiev, L.H. Hashimova, N.T. Hashimova; „Chaos synchronization in some power systems“, URL; <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0960077906009404>, zadnji posjet stranici: 6.9.2023.
- [8] *Double pendulum* simulator, URL; <https://www.myphysicslab.com/pendulum/double-pendulum-en.html>, zadnji posjet stranici: 6.9.2023.
- [9] Christian Bick, Mark J. Panaggio, Erik A. Martens; „Chaos in Kuramoto oscillator networks“, URL; <https://arxiv.org/pdf/1802.05481.pdf>, zadnji posjet stranici: 6.9.2023.
- [10] A. Arenas, A. Díaz-Guilera, J. Kurths, Y. Moreno, C. Zhou; „Synchronization in complex networks.“, URL; <https://arxiv.org/abs/0805.2976>, zadnji posjet stranici: 6.9.2023.
- [11] M. Barahona, L.M. Pecora; „Synchronisation in small-world systems“, URL; <https://arxiv.org/abs/nlin/0112023>, zadnji posjet stranici: 6.9.2023.

[12] H. Strogatz; „From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators.“, URL; <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167278900000944>, zadnji posjet stranici: 6.9.2023.

[13] Kathleen T. Alligood Tim D. Sauer James A. Yorke; „CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems“, URL; <http://ndl.ethernet.edu.et/bitstream/123456789/12518/1/80pdf.pdf>, zadnji posjet stranici: 6.9.2023.

[14] Qiang Lai, Bocheng Bao, Chaoyang Chen, Jacques Kengne, Akif Akgul; „Circuit application of chaotic systems: modeling, dynamical analysis and control“, URL; <https://link.springer.com/article/10.1140/epjs/s11734-021-00202-0>, zadnji posjet stranici: 6.9.2023.

[15] Coupling and Synchronizing Chua Circuits, URL; <https://www.chuacircuits.com/synchronization.php>, zadnji posjet stranici: 6.9.2023.

## **6. SAŽETAK**

Ovaj završni rad istražuje temu sinkronizacije u kaotičkim sustavima. Navodi se povijesna pozadina, izazovi i koncepti koji se odnose na sinkronizaciju. Navedene su informacije o dizajnu kompleksnih sustava temeljenih na principima sinkronizacije i istraživanju sinkronizacije u mrežama oscilatora. Simulacija istražuje intervale u kojima se Chua sustav nalazi u kaotičnom režimu rada.

**KLJUČNE RIJEČI:** Sinkronizacija, kaotični sustavi, oscilatori, Chua, nepredvidljivost.

## **SYNCHRONIZATION OF CHAOTIC SYSTEMS**

### **ABSTRACT**

This final thesis explores the topic of synchronization in chaotic systems. It introduces the historical background, challenges, and concepts related to synchronization. It discusses the engineering of complex systems based on synchronization principles and investigates synchronization in networks of oscillators. The simulation explores intervals in which the Chua's system operates in a chaotic regime.

**KEYWORDS:** Synchronization, chaotic systems, oscillators, Chua, unpredictability.

## **7. PRILOG**

U prilogu 1 je ostavljen program u MS Excell-u pomoću kojeg je odrađena simulacija u 3. poglavlju.